Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 2, стр. 99 – 101 *25 января 1989 г.*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ОДНОМЕРНЫХ МАГНЕТИКОВ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ, ВЫХОДЯЩИМ ЗА РАМКИ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

А.М.Цвелик

С помощью подстановки Бете получены точные решения ряда моделей одномерных магнетиков, в том числе цепочки спинов 1/2, с взаимодействием, выходящим за рамки ближайших соседей. Модели описывают фрострированное и ферримагнитное состояния.

В настоящее время в квазиодномерных проводниках известен ряд феноменов, не имеющих объяснения в рамках решенных в настоящее время моделей, в частности, переход с вектором $4k_F$. Ряд авторов для описания всего многообразия свойств одномерных проводников предлагает решеточную модель электронного газа, в котором взаимодействие выходит за рамки ближайших соседей (см., например, [1] и ссылки там). Я полагаю, что точное решение ряда более простых моделей могло бы послужить преамбулой к решению более общей и сложной модели, предлагаемой в работе [1].

В настоящей статье я разбираю три модели, решаемые при помощи подстановки Бете. Первая из них – изотропная цепочка спинов 1/2 с взаимодействием соседей, следующих за ближайшими. Ее гамильтониан имеет вид:

$$\mathcal{H} = J_1 \sum_{n=1}^{N} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1} + J_2 \sum_{n=1}^{N} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+2} . \tag{1}$$

Вторая – модель решеточных бесспиновых фермионов

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{N} (-(a^+_{n+1} a_n + a^+_n a_{n+1}) + U_1 a^+_{n+1} a_{n+1} a^+_n a_n + U_2 a^+_{n+2} a_{n+2} a^+_n a_n). \tag{2}$$

Третья – $SU(2)$ – инвариантный магнетик с четверным обменом:

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{N} (X^n_{ij} X^{n+1}_{ji} + U X^n_{ij} X^{n+1}_{jk} X^{n+2}_{kp} X^{n+3}_{pi}); \; (X_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb} . \tag{3}$$

Последняя модель дальше от реальности, чем первые две, однако проще в решении и сохраняет нетривиальную физику моделей (1, 2). При $|U\pi| = +1$ основное состояние этой модели является фрострированным, а при $|U\pi| > 1$ – ферримагнитным. Того же самого следует ожидать и для модели (1), поэтому анализ более простого случая модели (3) позволит сделать некоторые заключения и о модели (1), где вычислить физические величины мне пока еще не удалось.

Рассмотрим модель (1). Волновая функция одномагнонного состояния имеет вид

$$|k> = \sum_n e^{ikn} \sigma^-_n |0>, \qquad \sigma^+_m |0> = 0.$$

ее энергия

$$E(k) = -2[1 + \cos k + U(1 + \cos 2k)]. \tag{4}$$

Будем искать двухмагнонную функцию в виде

$$|k_1, k_2> = \sum_{n,m} [f(n-m) e^{ik_1 n + ik_2 m} + f(m-n) e^{ik_2 n + ik_1 m}] \sigma^-_n \sigma^-_m |0> . \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнение Шредингера $H\psi = E\psi$, получим систему уравнений

$$E(k_1, k_2) = E(k_1) + E(k_2) \tag{6a}$$

$$X(z_2 + z_1^{-1}) - S(z_2 + z_1^{-1} + U(z_2^2 + z_1^{-2} - 2)) = z_2^2 z_1^{-2}(z_1 + z_2^{-1} + U(z_1^2 + z_2^{-2} - 2)) \tag{6б}$$

$$X(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} - 2 + U(z_1^2 + z_1^{-2} + z_2^2 + z_2^{-2} - 2 - z_1 z_2 - z_1^{-1} z_2^{-1})) -$$

$$- S(z_1 + z_2^{-1} + U(z_1^2 + z_2^{-2})) = z_2 z_1^{-1}(z_2 + z_1^{-1} + U(z_2^2 + z_1^{-2})), \tag{6в}$$

где

$$S = f(2)/f(-2); \quad X = z_2(f(-1)z_1^{-1} + f(1)z_2^{-1})/f(-2), \; z = e^{ik}, \; U = J_2/J_1 .$$

Решив систему (6), получим матрицу рассеяния магнонов:

$$S(z_1, z_2) = - z_2^2 P(z_1, z_2)/z_1^2 P(z_2, z_1) \tag{7а}$$

$$P(z_1, z_2) = (z_1 + z_2^{-1})(z_1 + z_2^{-1} - 2) + 2U(2 + z_1^2 z_2^{-1} + z_2^2 z_1^{-1} - z_2 - z_1^{-1} - z_2^{-1} - z_1 +$$

$$+ z_1^3 + z_2^{-3} - z_2^{-2} - z_1^2) + U^2(z_1^2 + z_2^{-2} - 2)(z_1^2 + z_1^{-2} + z_2^2 + z_2^{-2} - z_1 z_2 - z_1^{-1} z_2^{-1}) \tag{7б}$$

Следуя стандартной процедуре тметода Бете (2) позволяющей по двухчастичной функции вычислить многочастичную (здесь не может быть к этому никаких препятствий, поскольку частицы являются скалярными, их матрица рассеяния – число и поэтому, очевидно, удовлетворяет уравнению треугольников), получим следующие уравнения для собственных значений гамильтониана (1) на цепочке с периодическими граничными условиями:

$$(z_j)^N = \prod_{k=1}^{M} S(z_j, z_k), \tag{8а}$$

$$E = -2J_1 \sum_{j=1}^{M} (z_j + z_j^{-1} + U(z_j^2 + z_j^{-2} + 1) + 1). \tag{8б}$$

Спин системы $S^z = N/2 - M$.

Нетрудно проверить, что при $U = 0$ замена $z = (\lambda + i)/(\lambda - i)$ делает матрицу (7) функцией от разности быстрот $\lambda_j - \lambda_k$ и приводит уравнения (7, 8) к привычному виду [2]:

$$\left(\frac{\lambda_\alpha + i}{\lambda_\alpha - i}\right)^N = \prod_{\beta=1}^{M} \left(\frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta + 2i}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta - 2i}\right). \tag{9}$$

При $J_1 = 0$ ($U \to \infty$) магнетик (1) распадается на два независимых друг от друга магнетика с числом спинов $N/2$ в каждом. В этом случае замена $z^2 = (\lambda + i)/(\lambda - i)$ приводит (7, 8) к двум независимым уравнениям на быстроты $\{\lambda_\alpha\}$ и $\{\lambda'_\alpha\}$. Эти уравнения совпадают с уравнением (9) с заменой N на $N/2$ и коэффициентом $(-1)^{N/2}$ в левой части одного из них.

При остальных значениях U подобной замены переменных, по-видимому, не существует. Такой случай уже известен в теории интегрируемых систем [3].

Решение модели (2) ничем принципиально не отличается от решения модели (1). Матрица рассеяния имеет вид (7а), но

$$P(z_1, z_2) = (z_1 + z_2^{-1} - U_1)(z_1 + z_2^{-1} - U_2) - U_2 z_2/z_1 (z_1 + z_2^{-1}). \tag{10}$$

Решение модели (3) в принципе уже известно в литературе (см., например, [4]), хотя ее физическими свойствами никто не занимался. Дело в том, что четверной член в гамильтониане (3) является интегралом движения XXX- цепочки Гейзенберга, а именно, является второй производной от логарифма ее трансфер-матрицы [4]. Решение модели (3) описывается поэтому уравнениями (9), но с другой энергией:

$$E = -\frac{4}{\pi}\sum_{\alpha=1}^{M}\left(\frac{1}{1+\lambda_\alpha^2} + U\frac{d^2}{d\lambda_\alpha^2}\frac{1}{1+\lambda_\alpha^2}\right) \tag{11}$$

(я полагаю для простоты $J = \pi/4$).

Термодинамические уравнения практически совпадают с уравнениями для XXX-цепочки (5). Свободная энергия системы есть

$$F = -T\int d\lambda \frac{1}{2\operatorname{ch}\pi\lambda}\ln(1+e^{\epsilon_1(\lambda)/T}), \tag{12}$$

а функции $\epsilon_j(\lambda)$ удовлетворяют бесконечной системе нелинейных уравнений:

$$\epsilon_j(\lambda) = Ts * \ln(1+e^{\epsilon_{j-1}(\lambda)/T})(1+e^{\epsilon_{j+1}(\lambda)/T}) - \\ - \delta_{j,1}\left[\frac{(1+\pi U)}{2}(\operatorname{ch}\pi\lambda)^{-1} - \pi U(\operatorname{ch}\pi\lambda)^{-3}\right], \tag{13a}$$

$$\lim_{j\to\infty}\epsilon_j/j = H$$

$$s * f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda'(2\operatorname{ch}\pi(\lambda-\lambda'))f(\lambda') \tag{13б}$$

(H – магнитное поле).

При $|\pi U| < 1$ основное состояние модели совпадает с состоянием XXX-цепочки; оно является антиферромагнитным ($S^z = 0$). При $|\pi U| > 1$ основное состояние ферримагнитно ($0 < S^z < N/2$). В этом случае при $T = 0$ все $\epsilon_j(\lambda) > 0$ кроме $\epsilon_1(\lambda)$, которое < 0 при $|\lambda| > Q$, Q – определяется из уравнения

$$\epsilon_1(\lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda-\lambda')\epsilon_1(\lambda')d\lambda' = -\frac{(1+\pi U)}{2}(\operatorname{ch}\pi\lambda)^{-1} + \pi U(\operatorname{ch}\pi\lambda)^{-3}, \tag{14}$$

$$\epsilon_1(\pm Q) = 0.$$

$$R(\omega) = (1+e^{|\omega|})^{-1}.$$

При $\pi U = 1$ функция $\epsilon_1(\lambda)$ обращается в ноль только в одной точке (фрострация): $\epsilon_1(\lambda) \approx -2\pi^2\lambda^2$ ($|\lambda| \ll 1$). Теплоемкость при $T \to 0$ в этом случае имеет вид

$$C = AT^{1/2} + \frac{\pi}{6}T.$$

При дальнейшем повышении U линейный по T член в теплоемкости уменьшается в два раза.

Литература

1. *Masumdar S., Dixit S.N.* Phys. Rev. B, 1986, **34**, 3683.
2. *Bethe H.* Z. Phys., 1931, 71, 205; *Yang C.N., Yang C.P.* Phys. Rev., 1966, **150**, 327.
3. *McCoy B.M., Perk J.H.H., Tang S., Sah C.-H.* Phys. Lett. A, 1987, **125**, 9.
4. *Фаддеев Л.Д.* Препринт ЛОМИ P-2-79, Ленинград 1979.
5. *Takahashi M.* Prog. Theor. Phys., 1971, **46**, 401.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1988 г.