Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 7, с. 500 – 503 © 2019 г. 10 апреля

О подвижных неоднородностях нелинейного уравнения Клейна–Гордона

Р. К. Салимов[1)]

Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 9 января 2019 г.
После переработки 24 января 2019 г.
Принята к публикации 7 февраля 2019 г.

Рассмотрена система из точечной материальной частицы и поля, описываемого нелинейным уравнением Клейна–Гордона. Частица создает неоднородность поля и взаимодействует с ним. Показано, что при учете релятивистких эффектов, в некоторых случаях, для такой системы невозможен устойчивый минимум энергии при нулевой скорости. Подобное поведение интересно с точки зрения построения солитонных моделей частиц с собственным не нулевым моментом количества движения или солитонных моделей частиц с осциллирующей массой.

DOI: 10.1134/S0370274X19070130

В современной нелинейной волновой теории большое внимание уделяется нахождению пространственно локализованных и периодических по времени решений для большого количества моделей и различных размерностей (см., например, [1–6]). Такие пространственно локализованные решения имеют конечную энергию и соответствуют статическим частицеподобным объектам или различным бегущим волнам. Хотя, как известно, не существует стационарных локализованных решений Лоренц инвариантных полевых уравнений для пространственной размерности более одной, не исключено существование локализованных решений при наличии различных неоднородностей или притягивающих примесей. Одним из часто исследуемых по данному вопросу интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений является $(1+1)$ уравнение синус-Гордона (УСГ). Оно имеет много приложений в различных областях физики, включая гидродинамику, физику конденсированного состояния, теории поля и т.д. [7–10]. Делаются попытки нахождения точных аналитических решений (в том числе и локализованных) $(n+1)$ размерных моделей (см., например, [11–15]). В [16] найдено численное доказательства существования долгоживущего, хотя и имеющего конечное время жизни, пространственно локализованного и сферически симметричного $(3+1)$ размерного бризероподобного, объекта, названного “пульсоном”. Другим направлением исследований является добавление слагаемых в нелинейное уравнение для сохранения интегрируемости, т.е. рассматривают некоторое обобщение УСГ. Обычно при рассмотрении уравнений Клейна–Гордона с различными неоднородностями или примесями, примеси считаются стационарными. Неоднородности или примеси в таких задачах моделируют различные дефекты, например, для уравнения синус-Гордона дефекты в магнитных материалах [8, 17–21]. Ранее в [22–24] численно была показана возможность существования в области примеси долгоживущих 2D-пульсонов и 2D-солитонов, структура и динамические свойства которых зависят от параметров примеси.

С более общей точки зрения было бы интересно рассмотреть систему подвижных неоднородностей, взаимодействующих с полем. Интерес к таким системам вызван тем, что на притягивающих неоднородностях возможны локализованные состояния. Если же подвижную притягивающую неоднородность достаточно сильно ускорить, то естественно предположить, что локализованное состояние поля не удержится на неоднородности. Если неоднородность имеет некоторую массу, то состояние примеси с локализованным на ней полем будет добавлять к этой массе некоторую эффективную поправку. Далее, в зависимости от величины ускорения таких неоднородностей можно предположить два состояния с двумя разными эффективными массами таких неоднородностей и переходы между этими состояниями.

Для рассмотрения подвижных неоднородностей или дефектов будем считать, что неоднородность создается частицей с массой m, координату которой обозначим как z, ее скорость как $v = \dot{z}$. Гамильто-

[1)]e-mail: salemsrkk@yandex.ru

ниан неоднородности, взаимодействующей с полем u, запишем в следующем виде (рассматриваем одномерный случай).

$$H = H_{\mathrm{def}} + H_u + H_{\mathrm{int}}, \qquad (1)$$

где H_{def} – энергия частицы,создающей неоднородность.

$$H_{\mathrm{def}} = \frac{m}{\sqrt{(1-v^2)}}, \qquad (2)$$

H_u – энергия скалярного поля.

$$H_u = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x^2}{2} + \frac{u_t^2}{2} + V(u) \right) dx. \qquad (3)$$

H_{int} – энергия взаимодействия скалярного поля и частицы, создающей неоднородность

$$H_{\mathrm{int}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(z,v,x) W(u) dx. \qquad (4)$$

Функция $V(u)$ в выражении (3) записывалась в виде

$$V(u) = \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}. \qquad (5)$$

Из условия сохранения гамильтониана (1), дифференцируя его по времени, получаем уравнения движения для поля и для частицы.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(u_x u_{xt} + u_t u_{tt} + \frac{\partial V}{\partial u} u_t + q \frac{\partial W}{\partial u} u_t \right) dx +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(W \frac{\partial q}{\partial z} \dot{z} + W \frac{\partial q}{\partial v} \dot{v} \right) dx + \frac{m v \dot{v}}{(1-v^2)^{(3/2)}} = 0. \qquad (6)$$

Далее, интегрируя

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_x u_{xt} dx = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx} u_t dx \qquad (7)$$

и считая, что выполняется уравнение движения для поля u

$$-u_{xx} + u_{tt} + \frac{\partial V}{\partial u} + q \frac{\partial W}{\partial u} = 0, \qquad (8)$$

получаем уравнение движения для частицы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (W \frac{\partial q}{\partial z} \dot{z} + W \frac{\partial q}{\partial v} \dot{v}) dx + \frac{m v \dot{v}}{(1-v^2)^{(3/2)}} = 0. \qquad (9)$$

Рассмотрим далее случай взаимодействия H_{int}, где область действия потенциала $q(z,v,x)$ ограничена областью , которую можно выразить через функции Хевисайда, а $W = 2\cos^2(u/2)$.

$$q(x,z,v)W(u) =$$
$$= \frac{U_0 2\cos^2(u/2)}{\sqrt{1-v^2}} (\theta(x - (z - l\sqrt{1-v^2}) -$$
$$- \theta(x - (z + l\sqrt{1-v^2})). \qquad (10)$$

Здесь релятивистское изменение потенциала при движении его источника, т.е. частицы, принимается аналогичным изменению электростатического потенциала ϕ в релятивистском случае, например, изменению потенциала движущегося заряда. То есть значение потенциала при движении для покоящегося наблюдателя становиться больше, а область его действия сужается. Запаздыванием при этом пренебрегаем. Такой потенциал взаимодействия приводит к уравнениям движения для поля

$$u_{xx} - u_{tt} = u + 2u^3 -$$
$$- U_0 \sin(u)(\theta(x - (z - l\sqrt{1-v^2}) -$$
$$- \theta(x - (z + l\sqrt{1-v^2})) \qquad (11)$$

и для частицы

$$\frac{m v \dot{v}}{(1-v^2)^{(3/2)}} + \frac{U_0 v \dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}} \int\limits_{z-l\sqrt{1-v^2}}^{z+l\sqrt{1-v^2}} 2\cos^2(u/2) dx -$$
$$- \frac{U_0 v \dot{v} l}{(1-v^2)} 2\cos^2(u(z - l\sqrt{1-v^2})/2)) -$$
$$- \frac{U_0 v \dot{v} l}{(1-v^2)} 2\cos^2(u(z + l\sqrt{1-v^2})/2)) =$$
$$= \frac{U_0 \dot{z}}{\sqrt{1-v^2}} 2\cos^2(u(z - l\sqrt{1-v^2})/2)) -$$
$$- \frac{U_0 \dot{z}}{\sqrt{1-v^2}} 2\cos^2(u(z + l\sqrt{1-v^2})/2)). \qquad (12)$$

Причем $\dot{z} = v$. Выразим эффективную массу или коэффициент m_{eff} в уравнении движения

$$m_{\mathrm{eff}} \dot{v} = F_{\mathrm{eff}}, \qquad (13)$$

$$m_{\mathrm{eff}} = \frac{m}{(1-v^2)^{(3/2)}} +$$
$$+ \frac{U_0}{(1-v^2)^{3/2}} \int\limits_{z-l\sqrt{1-v^2}}^{z+l\sqrt{1-v^2}} 2\cos^2(u/2) dx -$$
$$- \frac{U_0 l}{(1-v^2)} 2\cos^2(u(z - l\sqrt{1-v^2})/2)) -$$
$$- \frac{U_0 l}{(1-v^2)} 2\cos^2(u(z + l\sqrt{1-v^2})/2)). \qquad (14)$$

Из выражения (14), в частности, следует, что для решения вида $u=0$ эффективная масса равна обычной, т.е. если поле не захватывается неоднородностью, то уравнение движения для частицы совпадает с уравнением движения без учета поля u. Далее система уравнений (11) и (12) решалась численно. Здесь следует выделить 2 основных случая. В первом случае, когда масса покоя m велика, решение будет стремиться к стационарному решению с покоящейся частицей. Например, численное решение при $m=50$, $U_0=20$, $l=0.5$ представленное на рис. 1.

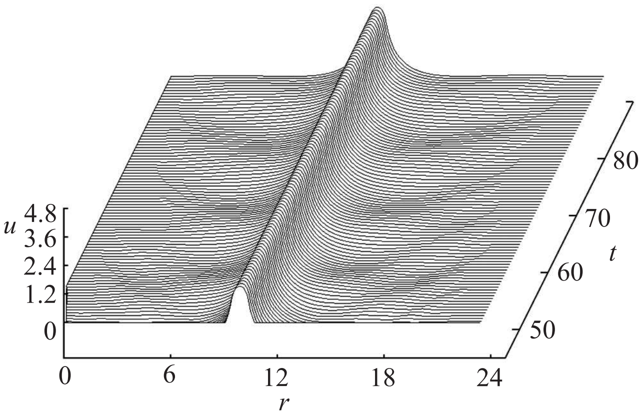

Рис. 1. Численное решение системы уравнений (11) и (12) для поля u при $m=50$, колебания на периферии с течением времени затухают, и решение стремиться к стационарному. Значения энергий в (8) и (9) взяты при $t>200$

Для этого численного решения значения интегралов в (14) равны, соответственно

$$U_0\int\limits_{z-l}^{z+l} 2\cos^2(u/2)dx = 15.22, \tag{15}$$

$$U_0 l(2\cos^2(u(z-l)/2)+2\cos^2(u(z+l)/2)) = 21.78. \tag{16}$$

Покажем теперь невозможность подобного устойчивого стационарного решения для малых значений массы покоя m. Допустим, что при малых m (по сравнению с разницей выражений (16) и (15), 6.56) существует стационарное решение с покоящейся частицей. Тогда решение с минимальной энергией для поля будет иметь стационарный вид, рис. 1. Эффективная масса (14) при этом будет отрицательной. Подобное решение будет неустойчиво при небольшом смещении координаты z относительно центра стационарного решения z_0. Покажем это более подробно. Как видно из рис. 2 при небольшом положительном смещении $z-z_0$ эффективная сила

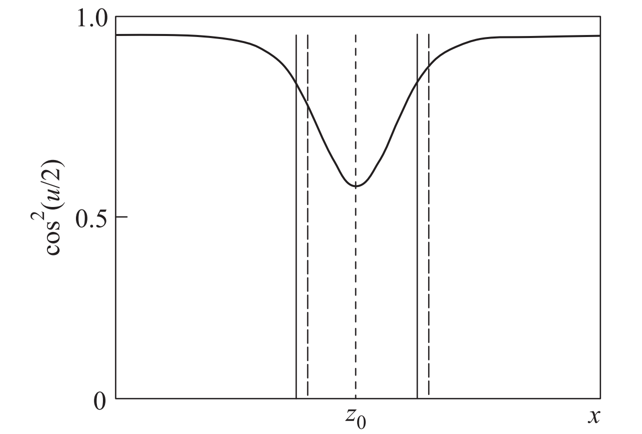

Рис. 2. Сплошными вертикальными линиями обозначено положение границ действия потенциала $z_0 \pm l$ стационарного решения, пунктирными - положение границ действия потенциала при небольшом смещениии частицы относительно центра стационарного решения z_0

$$F_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{1-v^2}} 2\cos^2(u(z-l\sqrt{1-v^2})/2)) - \\ - \frac{U_0}{\sqrt{1-v^2}} 2\cos^2(u(z+l\sqrt{1-v^2})/2)) \tag{17}$$

будет отрицательной. Значение эффективной массы (14) при небольших смещениях и малых m также останется отрицательным и частица получит приращение скорости в сторону смещения. Другими словами, для представленной системы при малой массе покоя m не будет существовать состояния устойчивого равновесия, при скорости $v=0$. Так как этот вывод верен для всех инерциальных систем отсчета, получим, что в состоянии с минимальной энергией частица также не может устойчиво двигаться с постоянной скоростью. То есть устойчивым состоянием для частицы в такой системе будет некое, в общем случае, ускоренное движение. Таким образом, представленная модель при малой массе покоя частицы, описывает постоянно движущуюся с некоторым ускорением частицу. Если подобное движение будет инфинитным, с периодически колеблющейся около ненулевой скорости значением, то ее эффективная масса также будет осциллировать. В этом случае для подобной системы, как для солитонной модели частиц, уместны некие аналогии с нейтрино. В случае финитного движения частицы в двумерном и трехмерном случае, подобная система будет иметь некоторый не нулевой момент количества движения. В этом случае подобную систему уместно рассматривать как солитонную модель спина. Возможность существования подобных решений далее предполагается исследовать численно для всего диапазона значений малых масс покоя m. Для уже проведенного численного решения (11) и (12) при $m = 1$ видно, что решение не стремиться к стационарному, см. рис. 3. Для этого решения значение эффективной массы ко-

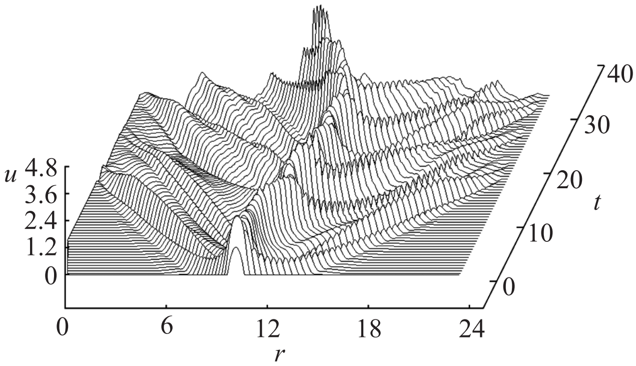

Рис. 3. Численное решение уравнений (11) и (12) для поля u при $m = 1$

леблется около нуля. Случай, в котором эффективная масса частицы будет оставаться положительной, также интересен с точки зрения существования состояний с двумя различными эффективными массами, зависящих от энергии движения частицы. Кроме того, данная модель обладает достаточной новизной и достойна изучения с методологической точки зрения.

1. *Encyclopedia of Nonlinear Science*, ed. by A. Scott, Routledge, N.Y. (2004).
2. X. Jiang, Z. Fan, Z. Chen, W. Pang,and Y. Li, Phys. Rev. A **93**, 023633 (2016).
3. B. A. Malomed, Phys. J. Special Topics **225**, 2507 (2016).
4. G. Fodor, P. Forgacs, Z. Horvath, and A. Lukacs, Phys. Rev. D **78**, 025003 (2008).
5. J. Cuevas, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, P. Dyke, and R. G. Hulet, New J. Phys. **15**, 063006 (2013).
6. Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов, Письма в ЖЭТФ **102**, 135 (2014).
7. Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, ТМФ **21**(2), 160 (1974).
8. М. А. Шамсутдинов, В. Н. Назаров, И. Ю. Ломакина, *Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны*, Наука, М. (2009).
9. J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, and F. Williams, Physics **10**, 263 (2014).
10. T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of solitons*, Cambridge University Press, N.Y. (2010).
11. A. Wazwaz, J. Appl. Math. Informatics **30**(5), 925 (2012).
12. S. Johnson, P. Suarez, and A. Biswas, Mathematics and Mathematical Physics **52**(1), 98 (2012).
13. Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Ю. В. Павлов, ТМФ **158**(3), 98 (2009).
14. M. Qing, H. Binb, and R. Weiguob, Journal of Computer Mathematics **87**(3), 591 (2010).
15. Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов, Журнал вычислительной математики и математической физики **56**(9), 1628 (2016).
16. I. L. Bogoluvskii and V. G. Makhankov, JETP Lett. **24**(12), 107 (1977).
17. Е. Г. Екомасов, А. М. Гумеров, Р. В. Кудрявцев, Письма в ЖЭТФ **101**(12), 935 (2015).
18. E. G. Ekomasov, R. R. Murtazin, and V. N. Nazarov, J. Magn. Magn. Mater. **385**, 217 (2015).
19. Е. Г. Екомасов, Р. Р. Муртазин, Ш. А. Азаматов, Физика твердого тела **54**(8), 1487 (2012).
20. Е. Г. Екомасов, Ш. А. Азаматов, Р. Р. Муртазин, А. М. Гумеров, А. Д. Давлетшина, Известия Российской академии наук. Серия физическая **74**(10), 1520 (2010).
21. Т. Б. Шапаева, Р. Р. Муртазин, Е. Г. Екомасов, Известия Российской академии наук. Серия физическая **78**(2), 155 (2014).
22. E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov, and R. R. Murtazin, Math. Meth. Appl. Sci., DOI: 10.1002/mma.3908 (2016).
23. Е. Г. Екомасов, Р. Р. Муртазин, Ш. А. Азаматов, А. Е. Екомасов, Физика металлов и металловедение **122**(3), 227 (2011).
24. Е. Г. Екомасов, Ш. А. Азаматов, Р. Р. Муртазин, Физика металлов и металловедение **108**(6), 556 (2009).