Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 10, с. 666 – 676

Генерация и преобразование световых пучков и импульсов, содержащих сингулярности поляризации, в средах с нелокальностью нелинейно-оптического отклика (Миниобзор)

К. С. Григорьев[+*], *В. А. Макаров*[+*1)]

[+]*Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[*]*Международный Лазерный Центр МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 апреля 2019 г.
После переработки 16 апреля 2019 г.
Принята к публикации 16 апреля 2019 г.

Обсуждаются полученные аналитические выражения, связывающие значения двух параметров, характеризующих топологический тип сингулярностей линейной и круговой поляризации в непараксиальных световых полях, со значениями компонент комплексной амплитуды электрического поля и их первых пространственных производных. Описаны необходимые условия для возникновения светового импульса на удвоенной частоте в объеме изотропной гиротропной среды с частотной дисперсией квадратичной нелинейности, налагаемые на поперечную структуру неоднородно поляризованного импульса основного излучения и на его временную развертку. Описано электрическое поле светового пучка, отраженного от поверхности изотропной гиротропной среды с пространственной дисперсией квадратичной нелинейности, при произвольной структуре и геометрии падения неоднородно поляризованных пучков основного излучения. Определены области параметров эллиптически поляризованного гауссова пучка и среды с локальной и нелокальной кубичной нелинейностью, при которых в поперечных сечениях пучка, самофокусирующегося в среде, происходит формирование линий сингулярности круговой поляризации.

DOI: 10.1134/S0370274X19100059

1. Введение. В конце XX столетия в свет вышла книга Дж. Ф. Ная "Естественная фокусировка и тонкая структура света" [1]. Этот фундаментальный труд обобщал результаты более двадцати предшествующих лет исследований, на основании которых возник новый раздел современной оптики – сингулярная оптика. Предметом ее изучения являются оптические сингулярности — точки в распространяющемся электромагнитном излучении, в которых одна из его характеристик имеет особенность поведения. Классическим примером оптических сингулярностей в однородно поляризованных световых полях являются точки фазовых дислокаций, также называемые фазовыми или оптическими вихрями. В таких точках интенсивность поля равна нулю, а фаза его колебаний не определена. Вблизи точки сингулярности фронт распространяющейся волны имеет спиралевидную структуру, что позволяет характеризовать каждую сингулярность топологическим индексом, который определяется как нормированное на 2π изменение фазы поля, сосчитанное при обходе точки сингулярности вдоль малого замкнутого контура. Аналогичные структуры были предсказаны и обнаружены в неоднородно поляризованных световых полях и получили название поляризационных сингулярностей (C-точек). Так были названы те точки светового поля, в которых оно имеет чисто круговую поляризацию и в которых из-за этого невозможно однозначно определить ориентацию большой полуоси эллипса. Вблизи такой точки эллипсы поляризации имеют все возможные ориентации, что позволяет определить топологический индекс таких точек, как количество оборотов поляризационного эллипса, сосчитанное при обходе сингулярности по малому замкнутому контуру. Сингулярности фазы и поляризации электромагнитного поля обладают устойчивостью к его малым возмущениям и преобразуются при его распространении по строго определенным законам [2]. Линии тока вектора Умова–Пойнтинга вблизи точек сингулярности фазы или поляризации имеют вихревую структуру, поэтому исследование оптических сингулярностей тесно связано с разделом

[1)] e-mail: vamakarov@phys.msu.ru

оптики, изучающим угловой момент электромагнитного излучения [3].

Уже в 1990-х гг. были описаны и реализованы эксперименты, в которых основная поперечная мода лазерного излучения посредством цилиндрических линз преобразовывалась в лагерр-гауссовы моды, содержащие фазовую сингулярность [4, 5]. Среди возникших в то время устройств для формирования световых полей, содержащих сингулярности фазы, можно также отметить спиральные фазовые пластинки и голографические фазовые элементы [6, 7]. Большим прорывом для экспериментальной сингулярной оптики стала разработка компактных жидкокристаллических элементов, позволяющих формировать оптические вихри с произвольной структурой, и систем микрозеркал с цифровым управлением, позволяющих не только создавать световые пучки со сколь угодно сложной структурой фазового профиля, но и осуществлять быстрое (за десятые доли миллисекунд) переключение между генерируемыми структурами [8–12]. Столь же стремительно развивались и методики создания неоднородно поляризованного излучения с заданным распределением поляризации. Одним из них является простое конструирование лазерного пучка из суперпозиции поперечных мод с различными состояниями поляризации [13, 14]. Более сложные методы, позволяющие формировать неоднородно поляризованные лазерные пучки и импульсы, базируются на использовании оптических элементов с наведенным двулучепреломлением [15–17]. Наконец, современные цифровые микрозеркальные устройства позволяют создавать излучение, содержащее сингулярности поляризации произвольного типа, в широком диапазоне длин волн [18].

На сегодняшний день существует большое количество теоретических и экспериментальных исследований в линейной оптике, связанных с сингулярностями поляризации электромагнитного излучения. Среди них можно отметить работы, посвященные сингулярностям в когерентных световых полях, статистике сингулярностей в случайных полях, их возникновению в задачах линейной фотоники и плазмоники, и даже в рассеянном солнечном свете [19–28].

Подобному росту научного интереса к поляризационным сингулярностям сопутствует развитие методов их детектирования: от классических интерференционных до современных методов ближнепольной микроскопии и квантовой оптики [24, 29–33]. Исследования в области нелинейной сингулярной оптики в большей степени посвящены фазовым, а не поляризационным сингулярностям светового поля. В то же время, спектр подобных исследований весьма широк и имеет богатую историю. Так, исследования трехволнового смешения световых пучков с фазовыми сингулярностями были начаты более двадцати лет назад [34–37]. Одним из ключевых предметов исследования является соотношение между топологическими индексами сингулярностей в сигнальном и основном излучении. Столь же давнюю историю имеют и исследования нелинейной рефракции лазерного излучения, которой сопутствует образование оптических вихрей в поперечном сечении распространяющейся электромагнитной волны [38, 39]. Как правило, в вышеупомянутых исследованиях нелинейная среда имела упорядоченную структуру (кристаллы, жидкие кристаллы или фотонные кристаллы). В то же время, рождение и преобразование сингулярностей фазы возможно осуществить даже в изотропных нелинейных средах таких, как воздух, благородные газы или плазма [40–43].

Как уже было отмечено, нелинейные процессы, в которых участвуют неоднородно поляризованные световые пучки и импульсы, содержащие сингулярности поляризации, освещены в значительно меньшем количестве работ. Среди них можно отметить исследования формирования поляризационных сингулярностей при распространении циркулярно поляризованного излучения в одноосном кристалле KDP, симметрия которого нарушается приложенным к кристаллу внешним электрическим полем [44], анализ стабилизации распространения светового пучка, содержащего сингулярность поляризации на своей оси [45], а также классическую для нелинейной оптики задачу генерации второй гармоники в кристалле KTP с использованием излучения с поляризационной сингулярностью [46]. Стимулом для проведения подобных экспериментов является построение строгой теории взаимодействия неоднородно поляризованного излучения с веществом. Особый интерес с точки зрения сингулярной поляризационной оптики представляют среды с нелокальным нелинейно-оптическим откликом, исключительно чувствительным к состоянию поляризации распространяющегося в них света. Ранее в серии оригинальных исследований [47–53] было теоретически предсказано формирование в таких средах неоднородно поляризованных световых пучков даже в том случае, когда пучки основного излучения имеют гауссов поперечный профиль и однородную поляризацию. Ниже приведен обзор недавно полученных результатов исследований аналогичных задач, направленных на поиск режимов генерации поляризационных сингулярностей и изучение законов преобразования излучения, изначально содержащего сингулярности, в изотропных средах с нелокальным нелинейным откликом.

2. Топологические характеристики сингулярностей электромагнитного поля. Пространственное распределение напряженности электрического поля $\tilde{\mathbf{E}}$ параксиального квазимонохроматического светового импульса и его зависимость от времени могут быть выражены с использованием комплексной амплитуды $\mathbf{E}$:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t)\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kz) + c.c. \quad (1)$$

Здесь ω – несущая частота импульса, k — волновое число, соответствующее этой частоте. Импульс, описываемый (1), распространяется вдоль положительного направления оси Oz, при этом $\mathbf{r} = \{x, y\}$ является компонентой радиус-вектора, перпендикулярной направлению распространения импульса. Комплексная амплитуда $\mathbf{E}$ является медленно меняющейся функцией своих аргументов на масштабах порядка периода электромагнитных колебаний $T = 2\pi/\omega$ и длины волны $\lambda = 2\pi/k$. Компонента $\mathbf{E}_\perp$ векторной комплексной амплитуды неоднородно поляризованного светового импульса, перпендикулярная его направлению распространения, может быть представлена в виде следующей суммы:

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{e}_+ E_+(\mathbf{r}, z, t) + \mathbf{e}_- E_-(\mathbf{r}, z, t). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{e}_\pm = (\mathbf{e}_x \mp \mathrm{i}\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ – единичные комплексные векторы волн с правой и левой круговой поляризацией, а $E_\pm = (E_x \pm \mathrm{i}E_y)/\sqrt{2}$ – комплексные амплитуды циркулярно поляризованных компонент импульса. Форму и ориентацию эллипса можно задать двумя величинами:

$$M = \frac{|E_+|^2 - |E_-|^2}{|E_+|^2 + |E_-|^2}, \quad \Psi = \frac{1}{2}\arg(E_+ E_-^*). \quad (3)$$

Первая из них называется степенью эллиптичности, а вторая – это угол между главной осью эллипса и осью Ox. Степень эллиптичности принимает значения от -1 (левая круговая поляризация) до 1 (правая круговая поляризация), и ее знак определяет направление вращения вектора электрического поля.

Существует два основных типа сингулярностей — фазовые и поляризационные. Каждому типу сингулярностей соответствует величина q, неопределенная в самой сингулярной точке и принимающая в ее малой окрестности все допустимые значения. В однородно поляризованных световых полях величина q – это фаза скалярной комплексной амплитуды E_+ или E_-, которые в однородных полях отличаются друг от друга постоянным множителем. В неоднородно поляризованных полях в качестве характеристической величины q рассматривается угол Ψ. Световые сингулярности характеризуются топологическим индексом, который равен изменению характеристики q, сосчитанному при обходе точки сингулярности по малому замкнутому контуру γ и нормированному на 2π:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma dq. \quad (4)$$

Топологический индекс фазовой сингулярности принимает значения 1 или -1, что соответствует возрастанию или убыванию фазы любой из циркулярно поляризованных компонент $E_\pm$ при обходе точки сингулярности. Поляризационные сингулярности характеризуются полуцелым индексом 1/2 или $-1/2$, поскольку эллипс поляризации тождественен сам себе уже при повороте на пол-оборота. Для более детального описания световых сингулярностей каждому их типу ставится в соответствие комплексная величина U, равная нулю в самой точке сингулярности. Аргумент величины U связан с характеристикой q и для фазовых сингулярностей в качестве U можно выбирать любую из амплитуд $E_\pm$. Для поляризационных сингулярностей $U = E_+ E_-^*$, причем $\arg U = 2\Psi$. Вблизи сингулярной точки, имеющей в некотором поперечном сечении координаты (x_0, y_0) комплексную характеристику U можно разложить в ряд Тейлора:

$$U \approx A[(x - x_0) + \mathrm{i}(y - y_0)] + B[(x - x_0) - \mathrm{i}(y - y_0)]. \quad (5)$$

Коэффициенты разложения позволяют построить важную характеристику световой сингулярности – параметр изотропии:

$$\Upsilon = \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A|^2 + |B|^2}. \quad (6)$$

Эта величина, в отличие от топологического индекса, не дискретна и может принимать любые значения от -1 до 1. Поляризационная сингулярность характеризуется дополнительным вторым параметром, выражаемым через коэффициенты A и B следующим образом:

$$\eta = \arg\left\{\left(A^3\right)^* B\right\}. \quad (7)$$

Наряду с параксиальными световыми полями в современной оптике все чаще рассматриваются полностью трехмерные поля, которые являются суперпозицией плоских волн, распространяющихся в существенно разных направлениях. Зависимость вектора их электрического поля от координат и времени может быть представлена в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{E}(\mathbf{R}, t)\exp(-\mathrm{i}\omega t) + c.c, \quad (8)$$

где $\mathbf{R} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор точки пространства. Плоскость эллипсов поляризации таких полей может иметь произвольную ориентацию, а их сингулярностями являются точки, в которых поле имеет круговую или линейную поляризацию (C^T-точки и L^T-точки соответственно). Вблизи C^T точки все эллипсы поляризации лежат практически в одной плоскости, поэтому ее можно, как и поляризационную сингулярность параксиального светового поля, характеризовать двумя параметрами Υ и η, аналогичным (6) и (7). Эти параметры связаны с комплексной амплитудой поля [54]:

$$\Upsilon_C = \frac{|\mathbf{E}^* \cdot \nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})|^2 - |\mathbf{E}\cdot\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})|^2}{|\mathbf{E}^* \cdot \nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})|^2 + |\mathbf{E}\cdot\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})|^2} \tag{9}$$

$$\eta_C = \arg\left\{[\mathbf{E}\cdot\nabla(\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{E}^*)]^3\, \mathbf{E}\cdot\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\right\}, \tag{10}$$

где $\nabla = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$. Точки линейной поляризации поля интересны тем, что все эллипсы поляризации в их малых окрестностях ориентированы преимущественно вдоль одного направления, а единичные нормали $\mathbf{n}$ к этим эллипсам поляризации лежат практически в одной плоскости, перпендикулярной этому направлению, но имеют в ней все возможные ориентации. Соответственно, определяя характеристику q как угол между нормалью к эллипсу поляризации и выбранным направлением в этой плоскости, можно определить топологический индекс L^T точек по общей формуле (4). Кроме того, вводя в плоскости нормалей ортогональный базис $O\zeta\eta$, можно определить комплексную характеристику $U = n_\zeta + \mathrm{i}n_\eta$, где n_ζ, n_η — проекции нормали на выбранный базис. Характеристика U позволяет построить два параметра для описания L^T точки по аналогии с (9) и (10), которые также можно выразить через комплексную амплитуду поля [54]:

$$\Upsilon_L = \frac{|\mathbf{E}|^6 e_{ilm} e_{jpq} T_{pl} T_{qm} E_i E_j^*}{\sum\limits_{r,s=x,y,z} [((|\mathbf{E}|^2\delta_{rl} - E_r E_l^*)(|\mathbf{E}|^2\delta_{sm} - E_s E_m^*) T_{lm}]^2}. \tag{11}$$

$$\eta_L = \arg\{\mathrm{Im}\,(\mathbf{E}^*\cdot[\nabla\times\mathbf{E}]) + + \mathrm{i}\mathrm{Im}\left(\frac{0.5(\mathbf{E}^*\cdot\nabla)(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) - |\mathbf{E}|^2(\nabla\cdot\mathbf{E})}{\sqrt{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})}}\right)\right\}. \tag{12}$$

В формуле (11) символы δ и e обозначают тензоры Кронекера и Леви–Чивиты соответственно, и по повторяющимся индексам производится суммирование, а тензор $T_{ij} = \mathrm{Im}\left(\sqrt{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})}\partial_i E_j\right)$.

3. Возникновение сингулярностей поляризации в световых импульсах на суммарной, удвоенной и утроенной частотах в объеме изотропной среды с нелокальным оптическим откликом. Сигнал на суммарной частоте в объеме изотропной среды может возникать в том случае, когда она обладает хиральностью. Два импульса вида (1) с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми числами k_1 и k_2, коллинеарно и соосно распространяющиеся в объеме такой среды, порождают поле нелинейной поляризации вещества $\tilde{\mathbf{P}}_3$ с частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и волновым вектором $k_\Sigma = k_1 + k_2$. Вклад в сигнал от объема нелинейной среды дает только вихревая часть нелинейной поляризации, амплитуду поперечной компоненты которой можно найти при помощи следующего приближенного выражения [55]:

$$\mathbf{P}_{3\perp}^{(\mathrm{s})} \approx \chi^{(2)}\left[\mathrm{i}\mathbf{e}_z \times \left(k_1^{-1}\mathbf{E}_{2\perp}\nabla\cdot\mathbf{E}_{1\perp}\right) - \right. \left. - k_2^{-1}\mathbf{E}_{1\perp}(\nabla\cdot\mathbf{E}_{2\perp}) + k_\Sigma^{-1}\left[\nabla\times[\mathbf{E}_{1\perp}\times\mathbf{E}_{2\perp}]\right]\right)\right], \tag{13}$$

где $\chi^{(2)}$ – единственная независимая компонента тензора локальной квадратичной восприимчивости изотропной гиротропной среды. Из-за взаимодействия продольных и поперечных компонент импульсов основного излучения вихревая часть нелинейной поляризации вещества зависит не только от поперечных полей $\mathbf{E}_{1\perp}$ и $\mathbf{E}_{2\perp}$, но и от их пространственных производных. Электрическое поле импульса на суммарной частоте в приближении заданного поля находится интегрированием неоднородного параболического уравнения

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_3}\frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2k_3}\Delta_\perp + \frac{\mathrm{i}k_3''}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_{3\perp} = = \frac{2\pi \mathrm{i} k_3}{n_3^2}\mathbf{P}_{3\perp}^{(\mathrm{s})}\exp\left(\mathrm{i}(k_\Sigma - k_3)z\right). \tag{14}$$

Здесь n_3 и k_3 – показатель преломления и волновое число импульса на суммарной частоте, v_3 и k_3'' – групповая скорость импульса и коэффициент ее дисперсии, $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Начальные условия для уравнения (14) выбираются нулевыми: $\mathbf{E}_{3\perp}(\mathbf{r}, 0, t) = \mathbf{0}$.

Рассмотрим случай однородной поляризации импульсов основного излучения. Состоящий из суперпозиции соосных лагерр-гауссовых мод импульс с номером $m = 1, 2$ может содержать в своих поперечных сечениях фазовые сингулярности, суммарный топологический индекс которых равен I_{Um}. Здесь и далее индекс U показывает, что рассматривается заряд фазовых сингулярностей. Эта величина одинакова для сингулярностей в любом поперечном сечении импульса и не зависит от времени. Рождающийся в объеме среды импульс на суммарной частоте в общем случае поляризован неоднородно, поэтому имеет смысл рассматривать суммарные топологические индексы сингулярностей правой (I_{C+}) и левой круговой (I_{C-}) поляризации. Значения этих суммарных индексов также не зависят от выбора поперечного сечения сигнального импульса и момента времени и определяются значениями степеней эллиптичности пучков основного излучения M_1 и M_2 и углом Ψ между осями их эллипсов поляризации [56]. Если угол

$$\Psi_{c\pm}=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{k_\Sigma^2\mu_{1\pm}^2\mu_{2\pm}^2-k_1^2\mu_{1\pm}^2\mu_{2\mp}^2-k_2^2\mu_{1\mp}^2\mu_{2\pm}^2}{2k_1k_2\mu_{1+}\mu_{1-}\mu_{2+}\mu_{2-}}\right), \quad (15)$$

где $\mu_{m\pm}=\sqrt{1\pm M_m}$, имеет физический смысл (модуль выражения в скобках меньше единицы), то справедливо соотношение

$$I_{C3\pm}=\mp\frac{I_{U1}+I_{U2}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\Psi_{c\mp}-\Psi). \quad (16)$$

В противном случае, для вычисления суммарных индексов $I_{C3\pm}$ в формуле (16) вместо второго слагаемого надо подставлять $1/2$ при выполнении неравенства $|k_1\mu_{1\pm}\mu_{2\mp}-k_2\mu_{1\mp}\mu_{2\pm}|<k_\Sigma\mu_{1\pm}\mu_{2\pm}$ или $-1/2$ при выполнении неравенства $k_\Sigma\mu_{1\pm}\mu_{2\pm}>$ $>k_1\mu_{1\pm}\mu_{2\mp}+k_2\mu_{1\mp}\mu_{2\pm}$.

Генерация второй гармоники в объеме изотропной среды возможна в том случае, когда последняя обладает пространственной или частотной дисперсией квадратичного отклика. В первом случае материальное уравнение для поля нелинейной поляризации среды имеет вид

$$\tilde{\mathbf{P}}_3=\gamma_1\tilde{\mathbf{E}}_1(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{E}}_1)+\frac{1}{2}\gamma_2\nabla(\tilde{\mathbf{E}}_1\cdot\tilde{\mathbf{E}}_1)+\gamma_3(\tilde{\mathbf{E}}_1\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{E}}_1, \quad (17)$$

где $\gamma_1-\gamma_3$ – независимые компоненты тензора нелокальной квадратичной восприимчивости. В соответствии с приближением заданного поля, первое слагаемое в (17) равно нулю, как того требует соответствующее уравнение Максвелла. Второе слагаемое в материальном уравнении представляет собой потенциальное векторное поле, а, следовательно, не дает вклада в нелинейный отклик, зарождающийся в толще среды. Третье слагаемое, напротив, является преимущественно поперечным векторным полем. Таким образом, интенсивность сигнала на удвоенной частоте, сгенерированного в объеме изотропной среды с нелокальным откликом, пропорциональна только одной материальной константе γ_3. Решая уравнение (14) с новым материальным уравнением для $\tilde{\mathbf{P}}_3$, можно показать, что сигнальный импульс на удвоенной частоте не может возникнуть в толще среды при однородной поляризации импульса основного излучения. В настоящей работе рассмотрен пример импульса основного излучения, имеющего следующее распределение электрического поля в перетяжке [57]:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r})=[E_g\mathbf{e}_S+ \\ +E_v\frac{p(x-\mathrm{i}M_Sy)+q(x+\mathrm{i}M_Sy)}{w}\mathbf{e}_S^*\Big]\exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right). \quad (18)$$

Здесь E_g, E_v – амплитуды циркулярно-поляризованных компонент импульса с единичными векторами поляризации $\mathbf{e}_S=(\mathbf{e}_x-\mathrm{i}M_S\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ и $\mathbf{e}_S^*$, w – характерный поперечный размер импульса. В любой момент времени на его оси в любом поперечном сечении лежит точка сингулярности круговой поляризации со степенью эллиптичности M_S, которая может быть равна 1 или -1. Несмотря на сложную структуру импульса основного излучения, сигнальный импульс на удвоенной частоте имеет однородную поляризацию, причем его степень эллиптичности M_3 с точностью до знака равна параметру изотропии C-точки в импульсе накачки:

$$M_3=\frac{|p|^2-|q|^2}{|p|^2+|q|^2}\operatorname{sgn}M_S=\Upsilon_C\operatorname{sgn}M_S. \quad (19)$$

Импульс на удвоенной частоте также может возникать в объеме изотропной хиральной среды с частотной дисперсией квадратичной нелинейности. Материальное уравнение, связывающее амплитуду поля нелинейной поляризации вещества и амплитуду электрического поля импульса накачки в первом приближении теории дисперсии имеет вид:

$$\mathbf{P}_3=\mathrm{i}D_\chi\left[\frac{\partial\mathbf{E}_1}{\partial t}\times\mathbf{E}_1\right], \quad (20)$$

где $D_\chi=\partial\chi^{(2)}/\partial\omega$ – коэффициент частотной дисперсии квадратичной нелинейности. Чтобы вихревая часть нелинейной поляризации, выделенная из (20), была отлична от нуля, необходимо, чтобы импульс основного излучения был неоднородно поляризован как в пространстве, так и во времени [57]. В качестве такого импульса рассмотрим суперпозицию импульсов (18), следующих друг за другом с временным отставанием 2δ, причем второй импульс получается из первого при помощи двупреломляющей фазовой пластинки. В этом случае импульс на удвоенной частоте, как и в среде с нелокальной квадратичной нелинейностью, однородно поляризован в пространстве и во времени, а его степень эллиптичности равна параметру изотропии сингулярности в основном импульсе:

$$M_3=\frac{|p|^2-|q^2|}{|p|^2+|q^2|}=\Upsilon_C. \quad (21)$$

Важно подчеркнуть, что этот результат не зависит от типа двупреломляющей фазовой пластинки и порядка следования импульсов.

В заключение этого раздела рассмотрим задачу о генерации третьей гармоники в изотропной среде с локальным откликом [58]. В качестве импульса основного излучения выбирался импульс (18). В отличие от предыдущих случаев, количество световых сингулярностей в сигнальном импульсе подчиняется “стандартным правилам”, а именно, в три раза превышает количество сингулярностей в основном импульсе. Однако, только две C-точки сигнального импульса из трех имеют то же вращение поляризации, что и исходная C-точка и схожее с ней значение параметра изотропии. Эти сингулярности рождаются на оси импульса третьей гармоники, но по мере его распространения расходятся от нее. Образуемые ими в пространстве траектории имеют форму спиралей, причем закрученность спирали зависит от знака фазовой расстройки. Третья поляризационная сингулярность все время лежит на оси сигнального импульса, но вращение ее поляризации и параметр изотропии противоположны соответствующим характеристикам исходной C-точки.

4. Появление сингулярностей поляризации в световых пучках, возникающих в процессах трехволнового смешения на поверхности изотропной среды с нелокальной квадратичной нелинейностью. Из-за взаимодействия продольных и поперечных компонент пучков основного излучения, а также из-за нелокального характера отклика среды в случае вырождения их частот, нелинейный сигнал от поверхности среды пропорционален не только попарным произведениям компонент пучков основного излучения, но и попарным произведениям компонент на их пространственные производные [59]:

$$E_{3\alpha}(\mathbf{r}_3) = \left(c_{\alpha\beta\gamma} + d^{(13)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial}{\partial u_\delta} + \right.$$
$$\left. + d^{(23)}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial}{\partial v_\delta}\right) E_{1\beta}(\boldsymbol{u})E_{2\gamma}(\boldsymbol{v})\Big|_{\substack{\boldsymbol{u}=\left(\hat{\Pi}_1\hat{\Pi}_3^{-1}\right)^T\mathbf{r}_3 \\ \boldsymbol{v}=\left(\hat{\Pi}_2\hat{\Pi}_3^{-1}\right)^T\mathbf{r}_3}}. \qquad (22)$$

Выражение (22) позволяет найти распределение электрического поля отраженного сигнального пучка $\mathbf{E}_3$ в точках, задаваемых поперечным радиус-вектором $\mathbf{r}_3 = \{x_3, y_3\}$ в сечении с центром на поверхности нелинейной среды, при помощи известных распределений полей пучков основного излучения $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в аналогичных сечениях. Каждое распределение задано в собственной системе координат падающего пучка, ось аппликат которой направлена вдоль направления распространения пучка, и для переходов между тремя координатными системами используются операторы $\hat{\Pi}_1$–$\hat{\Pi}_3$. В формуле (22) индексы α–δ принимают значения x, y, соответствующие системам координат пучков, а коэффициенты $c_{\alpha\beta\gamma}$, $d^{(13)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $d^{(23)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ сложным образом зависят от геометрии падения пучков и компонент тензоров линейной и нелинейной восприимчивости среды и ее поверхности.

Особо интересными для сингулярной оптики являются ситуации, когда первая группа слагаемых в (22), пропорциональная $c_{\alpha\beta\gamma}$, обращается в нуль. При использовании двух однородно поляризованных пучков основного излучения подобной ситуации можно достичь при любых углах падения, подбирая специальным образом состояние их поляризации (в общем случае существуют две пары таких состояний). Если среда обладает только локальной квадратичной нелинейностью, а влиянием приповерхностного слоя можно пренебречь, пучки основного излучения должны быть линейно поляризованы для обращения в нуль первой группы слагаемых в (22). В случае, если плоскости падения пучков основного излучения совпадают, они должны быть поляризованы перпендикулярно этой плоскости, а в случае некомпланарной геометрии падения углы Ψ_1 и Ψ_2, задающие ориентацию направления колебаний векторов электрического поля пучков в их собственных системах координат, сложным образом зависят от углов падения пучков, соотношения их частот и показателей преломления среды. Отраженный сигнал на суммарной частоте оказывается при этом линейно неоднородно поляризованным (см. рис. 1) и содержит

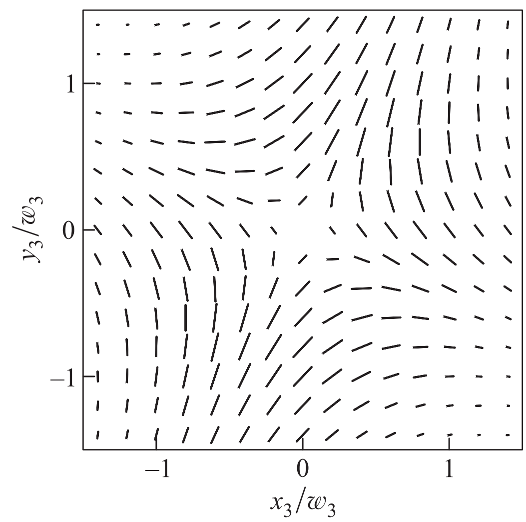

Рис. 1. Пример поперечного распределения поляризации в пучке на суммарной частоте, сгенерированном двумя линейно поляризованными гауссовыми пучками, падающими на поверхность среды под углами $\theta_1 = \pi/4$ и $\theta_2 = \pi/3$. Поперечные координаты x_3 и y_3 нормированы на $w_3 = w_1 w_2/\sqrt{w_1^2 + w_2^2}$

поляризационные сингулярности даже в том случае, когда падающие пучки имеют гауссов профиль интенсивности и сингулярностей не содержат.

В задаче о генерации второй гармоники, когда на среду падает только один пучок, обращение в нуль первой группы слагаемых в (22) в общем случае нельзя достичь подбором его состояния поляризации. Однако при нормальном падении пучка коэффициенты $c_{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю. Отраженный световой пучок на удвоенной частоте возникает даже в том случае, когда падающий пучок имеет однородную поляризацию и гауссов профиль интенсивности [59]. Каждая циркулярно-поляризованная компонента сигнального пучка в этом случае состоит из двух лагерр-гауссовых мод первого порядка, и интенсивность пучка на его оси равна нулю. За исключением особых случаев можно подобрать такую степень эллиптичности падающего на среду пучка, при которой амплитуды лагерр-гауссовых мод, входящих в состав левополяризованной или правополяризованной компоненты отраженного пучка, будут равны. При этом в любом его поперечном сечении будет лежать линия сингулярности правой или левой поляризации соответственно (рис. 2).

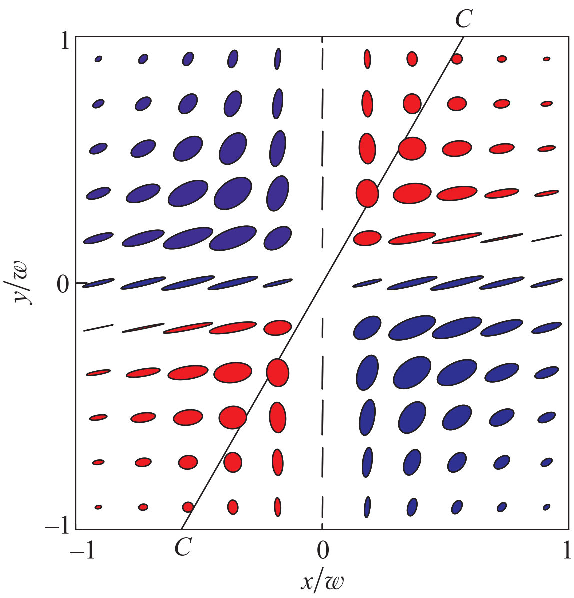

Рис. 2. (Цветной онлайн) Поперечное распределение поляризации в отраженном пучке на удвоенной частоте при специально подобранном состоянии поляризации нормально падающего на среду гауссова пучка основного излучения. Точки сингулярности правой поляризации в поперечном сечении отраженного пучка лежат вдоль прямой, отмеченной символами C–C, поперечные координаты нормированы на полуширину падающего пучка w

Завершая этот раздел, рассмотрим генерацию второй гармоники от поверхности изотропной хиральной среды в геометрии нормального падения в том случае, когда световой пучок основного излучения содержит уединенную сингулярность левой поляризации на своей оси [60]. Из-за нелокальности отклика толщи среды и ее поверхности, а также из-за пространственной ограниченности падающего и отраженного пучков, последний в общем случае содержит более одной точки сингулярности как правой, так и левой круговой поляризации. В случае, когда поверхностным откликом среды можно пренебречь, отраженный сигнальный пучок на удвоенной частоте возникает за счет нелокального отклика ее толщи и содержит по крайней мере две C-точки. Каждая из них имеет топологический индекс $1/2$ вне зависимости от индекса сингулярности в падающем пучке. От его знака зависит только направление вращения поляризации двух сгенерированных C-точек. В сигнальном пучке также могут присутствовать и дополнительные C-точки с противоположной поляризацией, однако их суммарный топологический индекс равен нулю. Если же поверхностный отклик среды сравним по амплитуде с ее объемным откликом, структура сигнального пучка усложняется. В частности, суммарный топологический индекс сингулярностей отраженного пучка с правой поляризацией имеет иные значения, нежели в случае чисто объемного отклика среды (рис. 3).

5. Возникновение сингулярностей поляризации в процессе самовоздействия эллиптически поляризованного света в средах с локальным и нелокальным кубическим откликом. Распространение эллиптически поляризованного светового пучка в среде с локальным кубично-нелинейным откликом описывается следующей системой уравнений для амплитуд $E_\pm$ циркулярно-поляризованных компонент его электрического поля [61, 62]:

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}}{2k}\left(\frac{\partial^2 E_\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_\pm}{\partial y^2}\right) = \\ = \frac{4\mathrm{i}\pi k}{n^2}\left(\chi_1|E_\pm|^2 + (\chi_1+\chi_2)|E_\mp|^2\right)E_\pm. \qquad (23)$$

Здесь k и n — волновое число и показатель преломления среды на частоте светового пучка, распространяющегося вдоль оси Oz, а χ_1 и χ_2 — независимые компоненты тензора кубической восприимчивости среды. Соотношение между ними определяется природой нелинейного отклика среды и типичными значениями дроби $\beta = \chi_2/\chi_1$ являются 0 (тепловая нелинейность), 1 (электронная нелинейность) и 6 (ориентационная нелинейность). Отметим, что независимо от механизма нелинейности самофокусировка пучка с заданной мощностью протекает оди-

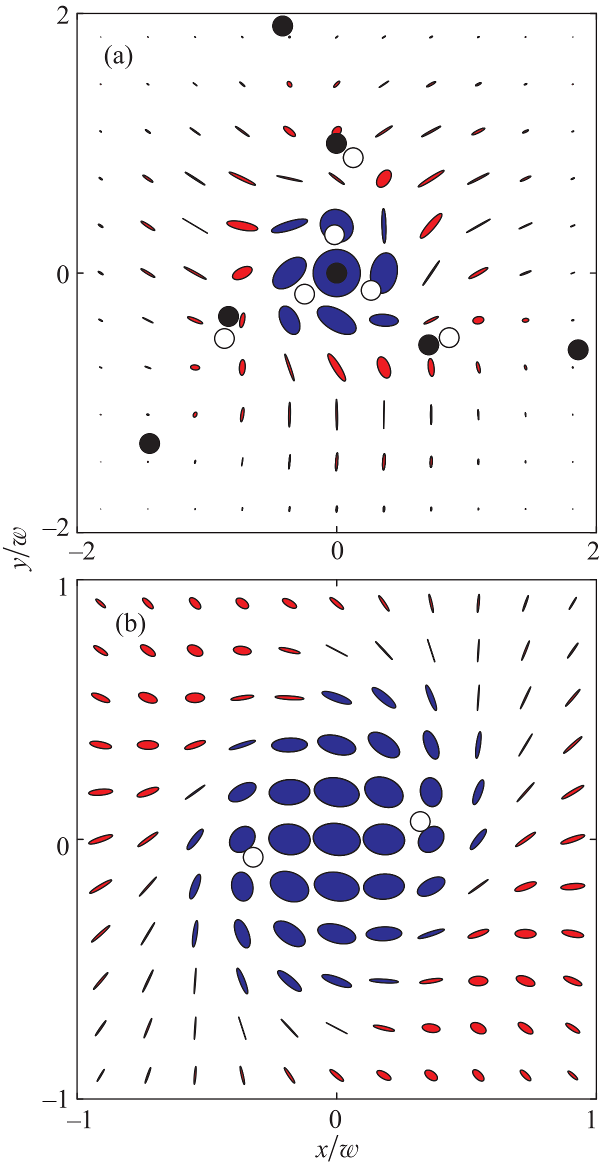

Рис. 3. (Цветной онлайн) Поперечное распределение поляризации в сигнальном пучке в случае наличия (a), отсутствия (b) поверхностного нелинейного отклика среды. Падающий на среду пучок содержит уединенную поляризационную сингулярность с индексом $-1/2$

наковым образом, если он имеет круговую поляризацию. При распространении такого пучка его поляризация не меняется, и в его поле могут возникать линии фазовой сингулярности вследствие нелинейной аберрации. Из-за осевой симметрии задачи эти линии имеют форму окружностей с центром на оси пучка. Плоскости, в которых они лежат, перпендикулярны этой оси [63]. Однако эти окружности имеют достаточно большой радиус и представляют малую практическую ценность. В случае теплового механизма нелинейного отклика распространяющийся пучок сохраняет свою однородную поляризацию, и возникающие в нем линии фазовой сингулярности также лежат далеко от его оси. Напротив, при электронном и ориентационном механизме нелинейности циркулярно-поляризованные компоненты пучка ведут себя существенно разным образом, вследствие чего пучок становится неоднородно поляризованным в поперечном сечении. Если начальная поляризация пучка достаточно далека от линейной, циркулярно- поляризованная компонента с меньшей начальной интенсивностью обращается в нуль на линиях, лежащих достаточно близко к оси пучка, так что контрастность сингулярной линии V, определяемая как отношение интенсивности пучка на этих линиях к интенсивности поля на его оси, может достигать значений порядка 10^{-1}. Рисунок 4 иллюстрирует зависимость контрастности V для первой возника-

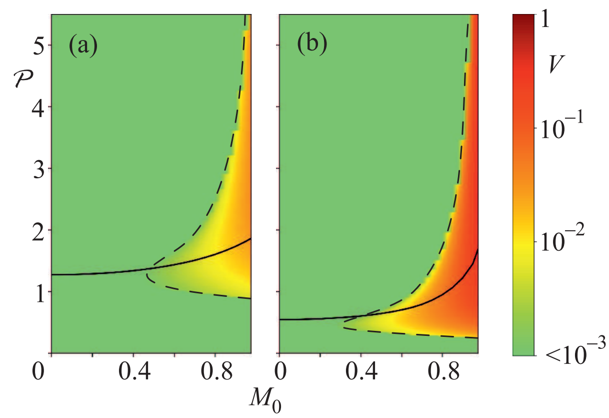

Рис. 4. (Цветной онлайн) Отношение V интенсивности поля в первой линии сингулярности поляризации, образующейся в поле светового пучка, и интенсивности поля на оси пучка в том же сечении при различных значениях его мощности $\mathcal{P}$, выраженной в относительных единицах, и начальных степенях эллиптичности гауссового пучка M_0 для случаев электронной (a), ориентационной (b) нелинейности среды. Границы области, в которых $V \geq 10^{-3}$, отмечены пунктирной линией. Сплошной линией показана зависимость пороговой мощности самофокусировки от начальной степени эллиптичности пучка M_0

ющей линии сингулярности от начального состояния поляризации пучка и его полной мощности, выраженной в безразмерных единицах. Этот рисунок наглядно демонстрирует, что C-линии в поле светового пучка имеют большую заметность и возникают в более широком диапазоне параметров пучка в случае ориентационного отклика среды.

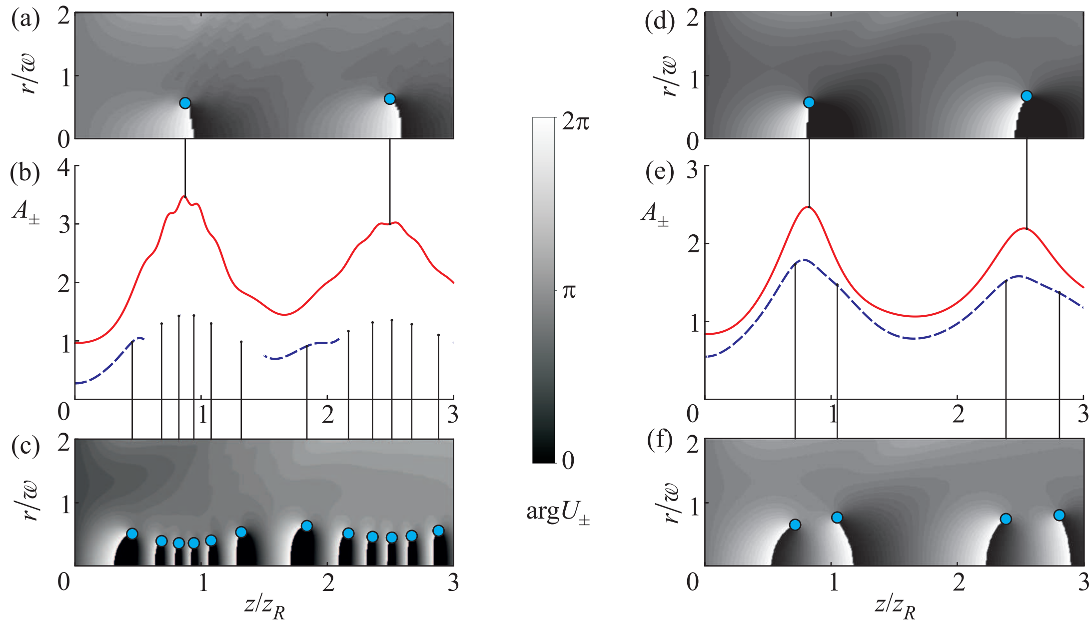

Рис. 5. (Цветной онлайн) Распределение фазы правополяризованной (a), (d) и левополяризованной (c), (f) компоненты гауссова пучка при его самофокусировке в изотропной фазе НЖК. Зависимости пиковых амплитуд компонент изображены на графиках (b), (e). Синими кружками отмечены точки с неопределенным значением $\arg U_+$ или $\arg U_-$, соответствующие кольцеобразным линиям сингулярности поляризации. Начальная степень эллиптичности пучка равна 0.85 (a)–(c), 0.4 (d)–(f). Координата z нормирована на дифракционную длину пучка

Нелокальность нелинейного оптического отклика значительно усложняет описанную выше картину возникновения сингулярностей поляризации. В качестве примера рассмотрим теперь находящийся в изотропной фазе нематический жидкий кристалл (НЖК), температура которого близка к температуре перехода в мезофазу. Распространение светового пучка в такой среде описывается системой связанных дифференциальных уравнений для амплитуд $E_\pm$ и комбинаций Q и $q_\pm$ компонент тензора параметра порядка кристалла:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_\pm}{\partial z} - \dfrac{\mathrm{i}}{2k}\Delta_\perp E_\pm = \dfrac{2\mathrm{i}\pi k\Delta\chi}{3n^2}\left(QE_\pm + q_\pm E_\mp\right), \\ (a\Delta T - L_1\Delta_\perp)Q = \dfrac{\Delta\chi}{18}(|E_+|^2+|E_-|^2), \\ (a\Delta T - L_1\Delta_\perp)q_\pm = \dfrac{\Delta\chi}{3}E_\pm E_\mp^*. \end{cases} \tag{24}$$

В системе (24) a, L_1 и $\Delta\chi$ – характеристики НЖК, ΔT – разность его температуры и температуры фазового перехода. Если предположить, что параметр $L_1 = 0$, система (24) может быть упрощена до одного уравнения (23) с отношением $\chi_2/\chi_1 = 6$. Однако, в жидком кристалле $L_1 > 0$, и если поперечный размер пучка достаточно мал, нелокальность нелинейного отклика, описываемая двумя последними уравнениями в (24), вносит значительные изменения в самовоздействие светового пучка в НЖК [64]. Нелокальность отклика НЖК препятствует нелинейному коллапсу пучка, в результате чего в толще кристалла возникают чередующиеся области с локальными максимумами и минимумами пиковой интенсивности пучка – своего рода многофокусная структура. Каждый ее пик сопровождается образованием линий сингулярности как правой, так и левой поляризации, лежащими достаточно близко к оси пучка, так что их контрастность V превышает 10^{-3}. Образование заметных линий сингулярности поляризации не прекращается, даже если начальное состояние поляризации гауссового пучка близко к линейному (рис. 5).

Заключение. Приведенные выше аналитические выражения и математические законы позволяют получить всестороннее представление о тонких деталях нелинейно-оптических процессов и могут быть использованы для создания методами нелинейной оптики световых пучков и импульсов с неоднородным распределением электрического поля, содержащим сингулярности поляризации. Описанные методы управления количеством и суммарным топологическим индексом возникающих сингулярностей путем изменения состояния поляризации пучков и импульсов основного излучения перспективны для применения в квантово-информационных оптических системах. Условия возникновения сингулярностей поляризации в сигнальных пучках и импульсах могут быть использованы в задачах нелинейной спектроскопии толщи и поверхности изотропной гиротропной среды с пространственной дисперсией квадратичной нелинейности. Все это делает дальнейший поиск режимов генерации поляризационных сингулярностей и изучение законов преобразования излучения, изначально содержащего сингулярности, весьма актуальным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13-02-00324 и 16-02-00154) и фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Авторы благодарны И. А. Пережогину за полезные обсуждения.

---

1. J. F. Nye, *Natural Focusing and Fine Structure of Light*, Institute of Physics Publishing: Bristol and Philadelphia (1999).
2. M. R. Dennis, K. O'Holleran, and M. J. Padgett, Progress in Oprics **53**, 293 (2009).
3. L. Allen, S. M. Barnett, and M. J. Padgett, *Optical Angular Momentum*, CRC Press (2003).
4. E. Abramochkin and V. Volostnikov, Opt. Commun. **83**, 123 (1991).
5. L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, and J. Woerdman, Phys. Rev. A **45**, 8185 (1992).
6. K. Sueda, G. Miyaji, N. Miyanaga, and M. Nakatsuka, Opt. Express **12**, 3548 (2004).
7. H. He, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, J. Mod. Opt. **42**, 217 (1995).
8. E. Brasselet, N. Murazawa, H. Misawa, and S. Juodkazis, Phys. Rev. Lett. **103**, 103903 (2009).
9. B. Yang and E. Brasselet, J. Opt. **15**, 044021 (2013).
10. E. Brasselet, G. Gervinskas, G. Seniutinas, and S. Juodkazis, Phys. Rev. Lett. **111**, 193901 (2013).
11. M. Mirhosseini, O. S. Maga na Loaiza, C. Chen, B. Rodenburg, M. Malik, and R. W. Boyd, Opt. Express **21**, 30196 (2013).
12. N. Radwell, D. Briäkus, T. W. Clark, and S. Franke-Arnold, Opt. Express **22**, 12845 (2014).
13. E. J. Galvez, B. L. Rojec, V. Kumar, and N. K. Viswanathan, Phys. Rev. A **89**, 031801 (2014).
14. E. J. Galvez, S. Khadka, W. H. Schubert, and S. Nomoto, Appl. Opt. **51**, 2925 (2012).
15. A. M. Beckley, T. G. Brown, and M. A. Alonso, Opt. Express **18**, 10777 (2010).
16. F. Cardano, E. Karimi, L. Marrucci, C. de Lisio, and E. Santamato, Opt. Express **21**, 8815 (2013).
17. H. Larocque, J. Gagnon-Bischoff, F. Bouchard, R. Fickler, J. Upham, R. W. Boyd, and E. Karimi, J. Opt. **18**, 124002 (2016).
18. K. Mitchell, N. Radwell, S. Franke-Arnold, M. Padgett, and D. Phillips, Opt. Express **25**, 25079 (2017).
19. F. Flossmann, U. T. Schwarz, M. Maier, and M. R. Dennis, Phys. Rev. Lett. **95**, 253901 (2005).
20. S. Vyas, Y. Kozawa, and S. Sato, Opt. Express **21**, 8972 (2013).
21. M. V. Berry and M. R. Dennis, Proc. R. Soc. A **457**, 141 (2001).
22. M. R. Dennis, Opt. Commun. **213**, 201 (2002).
23. F. Flossmann, K. O'Holleran, M. R. Dennis, and M. J. Padgett, Phys. Rev. Lett. **100**, 203902 (2008).
24. M. Burresi, R. Engelen, A. Opheij, D. van Oosten, D. Mori, T. Baba, and L. Kuipers, Phys. Rev. Lett. **102**, 033902 (2009).
25. A. de Hoogh, L. Kuipers, T. D. Visser, and N. Rotenberg, Photonics **2**, 553 (2015).
26. M. V. Berry, M. R. Dennis, and R. L. Lee Jr., New J. Phys. **6**, 162 (2004).
27. А. А. Чернышов, Г. В. Богатырева, П. В. Полянский, М. С. Соскин, Письма в ЖЭТФ **88**, 490 (2008).
28. В. И. Васильев, М. С. Соскин, Письма в ЖЭТФ **87**, 90 (2008).
29. O. Angelsky, I. Mokhun, A. Mokhun, and M. Soskin, Phys. Rev. E **65**, 036602 (2002).
30. T. Bauer, P. Banzer, E. Karimi, S. Orlov, A. Rubano, L. Marrucci, E. Santamato, R. W. Boyd, and G. Leuchs, Science **347**, 964 (2015).
31. T. Bauer, S. Orlov, U. Peschel, P. Banzer, and G. Leuchs, Nature Photon. **8**, 23 (2013).
32. N. Radwell, M. A. Boukhet, and S. Franke-Arnold, Opt. Express **21**, 22215 (2013).
33. K. E. Ballantine, J. F. Donegan, and P. R. Eastham, Sci. Adv. **2**, 1501748 (2016).
34. I. V. Basistiy, V. Yu. Bazhenov, M. S. Soskin, and M. V. Vasnetsov, Opt. Commun. **103**, 422 (1998).
35. Y. Toda, S. Honda, and R. Morita, Opt. Express **18**, 17796 (2010).
36. A. Stabinis, S. Orlov, and V. Jarutis, Opt. Commun. **197** 419 (2001).
37. A. Dreischuh, D. N. Neshev, V. Z. Kolev, S. Saltiel, M. Samoc, W. Krolikowski, and Y. S. Kivshar, Opt. Express **16**, 5406 (2008).
38. A. V. Ilyenkov, A. I. Khiznyak, L. V. Kreminskaya, M. S. Soskin, and M. V. Vasnetsov, Appl. Phys. B **62**, 465 (1996).
39. M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, Pure and Applied Optics A **7**, 301 (1998).
40. M. Beresna, P. G. Kazansky, Y. Svirko, M. Barkauskas, and R. Danielius, Appl. Phys. Lett. **95**, 121502 (2009).
41. M. Zürch, C. Kern, P. Hansinger, A. Dreischuh, and Ch. Spielmann, Nature Phys. **8**, 743 (2012).
42. G. Maleshkov, D. N. Neshev, E. Petrova, and A. Dreischuh, J. Opt. **13**, 064015 (2011).

43. V. Jukna, C. Milián, C. Xie, T. Itina, J. Dudley, F. Courvoisier, and A. Couairon, Opt. Express **22**, 25410 (2014).
44. X. Lu, Z. Wu, W. Zhang, and L. Chen, Sci. Rep. **4**, 4865 (2014).
45. F. Bouchard, H. Larocque, A. M. Yao, C. Travis, I. De Leon, A. Rubano, E. Karimi, G.-L. Oppo, and R. W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **117**, 233903 (2016).
46. L. Zhang, X. Qiu, F. Li, H. Liu, X. Chen, and L. Chen, Opt. Express **26**, 11678 (2018).
47. N. I. Koroteev, V. A. Makarov, and S. N. Volkov, Opt. Commun. **157**, 111 (1998).
48. N. I. Koroteev, V. A. Makarov, and S. N. Volkov, Laser Phys. **9**, 655 (1999).
49. С. Н. Волков, В. А. Макаров, И. А. Пережогин, Квантовая электроника **36**, 860 (2006).
50. V. A. Makarov and I. A. Perezhogin, Opt. Commun. **281**, 3906 (2008).
51. V. A. Makarov and I. A. Perezhogin, J. Optics A **11**, 074008 (2009).
52. V. A. Makarov and I. A. Perezhogin, Quantum Electronics **39**, 627 (2009).
53. V. A. Makarov, I. A. Perezhogin, and N. N. Potravkin, Radioelectronics. Nanosystems. Information Technologies **3**, 18 (2011).
54. K. S. Grigoriev, N. Yu. Kuznetsov, Yu. V. Vladimirova, and V. A. Makarov, Phys. Rev. A **98**, 063805 (2018).
55. K. S. Grigoriev, V. A. Makarov, and I. A. Perezhogin, Phys. Rev. A **92**, 023814 (2015).
56. K. S. Grigoriev, V. A. Makarov, and P. S. Ryzhikov, Laser Phys. Lett. **16**, 045402 (2019).
57. K. S. Grigoriev, N. Yu. Kuznetsov, E. B. Cherepetskaya, and V. A. Makarov, Opt. Express **25**, 6253 (2017).
58. K. S. Grigoriev, P. S. Ryzhikov, E. B. Cherepetskaya, and V. A. Makarov, Opt. Express **25**, 25416 (2017).
59. К. С. Григорьев, В. А. Макаров, И. А. Пережогин, Н. Н. Потравкин, Квантовая электроника **41**, 993 (2011).
60. K. S. Grigoriev, V. A. Makarov, and I. A. Perezhogin, J. Opt. **18**, 014004 (2016).
61. С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, УФН **56**, 123 (2013).
62. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 3-ed., Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA (2008).
63. N. A. Panov, V. A. Makarov, K. S. Grigoriev, M. S. Yatskevitch, and O. G. Kosareva, Physica D **332**, 73 (2016).
64. V. A. Makarov, K. S. Grigoriev, and G. M. Shishkov, Molecular Crystals and Liquid Crystals **650**, 23 (2017).