Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 11, с. 797 – 802 © 2019 г. 10 июня

О точных решениях для жидкости Латинджера с одной примесью

В. В. Афонин[+1)], *В. Ю. Петров*[*]

[+] *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия*

[*] *Санкт-Петербургский институт ядерной физики, 188300 С.-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 11 марта 2019 г.
После переработки 28 апреля 2019 г.
Принята к публикации 29 апреля 2019 г.

В работе обсуждаются причины существования точных решений модели Латинджера. Показано, что при некоторых значениях константы связи электрон-электронного взаимодействия рассеяние на примесях может быть записано в терминах фермиевских квазичастиц, точно учитывающих электрон-электронное взаимодействие. Это существенно упрощает анализ, а в ряде случаев приводит к существованию точных решений.

DOI: 10.1134/S0370274X19110134

I. Введение. Система одномерных взаимодействующих фермионов (модель Латинджера) допускает точное решение. Это решение может быть получено различными методами. Однако наиболее употребительным является метод бозонизации [1, 2].

Как известно, в одномерных системах с линейным спектром состояние с одной и той же энергией может быть представлено в виде большого числа различных нерасплывающихся пакетов, состоящих из разного числа частиц. Это явление принято называть вырождением состояний. Понятно, что пакеты, состоящие из четного и нечетного числа фермионов обладают разными коммутационными свойствами. Первые являются бозонами, а вторые – фермионами. Таким образом, любая наблюдаемая величина может быть выражена как на языке бозонных, так и фермионных операторов. Отличить эти описания можно, только если указанное вырождение снимается. Например, это происходит, если в задаче появляется щель, причем вырождение может сниматься как в пользу бозонов, так и в пользу фермионов (так происходит, наример, в безмассовой модели Швингера [3]). Вместе с этим, хорошо известно, что в нерелятивистской модели Латинджера с точечным электрон-электронным (e-e) взаимодействием спектр остается линейным, – перенормируется лишь скорость Ферми. Основным состоянием в этом случае является фаза Костерлица–Таулеса–Березинского: все функции Грина спадают степенным образом с нецелыми показателями, меньшими, чем в свободной теории, а основное состояние представляет из себя макроскопически большое число киральных (отталкивание) или куперовских (притяжение) пар [4]. Линейность же спектра приводит к тому, что даже с учетом взаимодействия описание модели Латтинджера на языке бозонов и фермионов оказывается равноправным. Однако свойства и квантовые числа этих квазичастиц сильно отличаются друг от друга. Поэтому возникает вопрос, на языке каких возбуждений удобнее описывать наблюдаемые величины, а также возмущения, введенные в систему. Обычно, удобнее использовать бозонное представление, поскольку квазичастицы в этом случае тесно связаны с операторами плотности заряда и тока электронов. Однако, поскольку исходная модель Латинджера описывает электроны, использование фермионного представления для квазичастиц выглядит более естественным.

Точная решаемость одномерной модели Латинджера связана с высокой симметрией этой теории. До тех пор, пока отсутствует рассеяние назад, она обладает двумя симметриями – калибровочной (волновые функции и правых и левых электронов домножаются на экспоненту с одной и той же фазой) и киральной (фазы в преобразовании волновых функций правых и левых электронов отличаются знаком). Благодаря этому в теории сохраняются не только полное число электронов, но и число правых и левых частиц по отдельности. Это приводит к тому, что имеются два сохраняющихся тока: обычный электрический ток, входящий в уравнение неразрывности для электрического заряда (он определяется суммой правых и левых электронов), и аксиальный ток. Последний входит в уравнение неразрывности для кирального заряда (разности чисел правых и левых электронов). Введение же даже одной точечной примеси в одномерный канал нарушает это свойство и

[1)]e-mail: vasili.afonin@mail.ioffe.ru

теория, в общем случае, более не может быть решена точно.

Модель Латинджера с точечной примесью была предметом исследования во многих работах, начиная с классических статей [5, 6]. Теория исследовалась в двух различных приближениях. В рамках первого приближения предполагалось, что примесь рассеивает слабо, а взаимодействие сколь угодно велико. Решение задачи в этом случае может быть получено методом бозонизации. Во втором подходе наоборот считалось, что рассеяние на примеси не мало, а взаимодействие электронов предполагалось достаточно слабым. В этом случае поправки к взаимодействию приводят к логарифмически расходящимся диаграммам, которые могут быть учтены методом ренормализационной группы.

Уже в одной из первых работ [5], посвященнных данной задаче, указывалось, что она может быть решена точно для специального значения величины е-е взаимодействия, при котором $v_c = 2$ (задача с отталкиванием электронов). С разных точек зрения случай $v_c = 2$ изучался и в других работах (см. [7] и ссылки в ней.) Из соображений дуальности можно ожидать, что точно решаемым будет и случай $v_c = \frac{1}{2}$. (Все скорости мы измеряем в единицах исходной скорости Ферми).

Отметим, что точное решение модели Латинджера оказалось востребованным и в других задачах теории твердого тела. В частности, в работе [8] было показано, что гамильтониан системы, описывающий идеальный точечный контакт и состоящий из квантовой точки и двумерного берега, может быть сведен к гамильтониану модели Латинджера с одной упругой примесью при $v_c = 2$. Существование точного решения в этом случае позволило исследовать эффекты, связанные с кулоновской блокадой при коэффициенте туннелирования, близком к единице.

В данной работе мы покажем, что точные решения задачи с примесью возможны потому, что взаимодействие электронов с примесью при некоторых значениях v_c выглядит просто на языке фермионных квазичастиц модели Латинджера, в которых все исходное е-е взаимодействие уже учтено. В случае $v_c = 2$ гамильтониан примеси линеен, а при $v_c = \frac{1}{2}$ квадратичен по операторам квазичастиц. В обоих случаях полный гамильтониан задачи может быть приведен к диагональному виду с помощью унитарного преобразования, и, следовательно, задача может быть решена точно. Мы также разберем гамильтонианы, получающиеся при некоторых других значениях v_c, в которых рассеяние взаимодействующих электронов на примеси может быть записано как самодействие фермиевских квазичастиц с константой связи, зависящей от примесного рассеяния. Это самодействие существует только в одной точке (месте расположения примеси), а в остальных – фермиевские квазичастицы не взаимодействуют между собой. Этот факт существенно облегчает анализ даже в том случае, когда задача не является точно решаемой.

II. Ферминизация теории латинджеровской жидкости с примесным рассеянием. В подавляющем большинстве работ, посвященных исследованию влияния упругого рассеяния взаимодействующих электронов на транспортные свойства одномерного канала, обычно используют гамильтониан:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\rm tot} &= \\ &= v_{\rm F}\int dx\left[\hat{\Psi}_R^+(x)(-i\partial_x)\hat{\Psi}_R(x)+\hat{\Psi}_L^+(x)(i\partial_x)\hat{\Psi}_L(x)\right]+\\ &+\frac{1}{2}\int dxdy\;\rho(x)U_{ee}(x-y)\rho(y)+ \qquad (1)\\ &+\int dx\;U_{\rm imp}(x)[\Psi_R^+(x)\Psi_L(x)+h.c.].\end{aligned}$$

В этом выражении $\hat{\Psi}(x)_{L,R}$ – волновые функции правых и левых электронов (для простоты мы считаем электроны однокомпонентными), а $\rho(x) = \rho_R(x) + \rho_L(x)$ – полная плотность электронов. (Мы используем систему единиц, в которой постоянная Планка равна 1).

Строго говоря, процедура линеаризации исходного гамильтониана, необходимая для получения выражения (1), возможна только для рассеяния с малым изменением импульса электронов. Рассеяние же назад требует изменения импульса на величину порядка $2p_{\rm F}$. Так что описание рассеяния назад, как $\int dx\; U_{\rm imp}(x)[\Psi_R^+(x)\Psi_L(x) + h.c.]$ выглядит не вполне последовательным. Однако, можно надеяться, что для исследования отклика электронов на медленно меняющееся внешнее поле важен только факт существования рассяния назад, а детали поведения электронных волновых функций на масштабе $\leq 1/p_{\rm F}$ несущественны для транспортных свойств одномерного канала (здесь $p_{\rm F}$ – импульс Ферми). Это приводит к тому, что линеаризованный гамильтониан (1) считается справедливым и для точечной примеси. Поэтому мы тоже будем использовать выражение (1), считая примесь точечной ($U_{\rm imp}(x) = V_{\rm imp}\delta(x)$), а взаимодействие – короткодействующим ($U_{ee}(x) = V_{ee}\delta(x)$). (Альтернативный подход изложен в [9], см. также ссылки в ней).

Мощным методом для решения задач, связанных с одномерными взаимодействующими электронами, является метод бозонизации. Он основывается на возможности выразить операторы рождения фермионов $\hat{\Psi}^\dagger_\pm(x)$, двигающихся вправо и влево ($\pm$), через бозонные поля $\hat{\mathcal{O}}(x)_\pm$:

$$\hat{\Psi}^\dagger_\pm(x) = \exp\left(\mathcal{A}^\dagger_\pm(x)\right)\frac{\hat{\sigma}^\dagger_\pm}{\sqrt{L}}\exp\left(-\mathcal{A}_\pm(x)\right). \quad (2)$$

$$\mathcal{A}^\dagger_\pm(x) = \frac{1}{L}\sum_{n>0}\exp\left(\mp ip_n x\right)\sqrt{\frac{2\pi}{p_n}}\hat{\mathcal{O}}_\pm(x)(p),$$

– в этом выражении предполагаются периодические граничные условия для электронных полей, т.е. $p_n = 2\pi n/L$, $\hat{\sigma}_\pm$ – аналог лестничных операторов Халдейна [10], определяемых условиями $\hat{\sigma}^\dagger_\pm\hat{\sigma}_\pm = 1$, $\{\hat{\sigma}_\pm, \hat{\sigma}_\mp\} = 0$ и коммутирующих со всеми бозонами. Отметим, что антикоммутация электронных полей $\hat{\Psi}_\pm(x)$ на δ-функцию получается в пределе $L \to \infty$ и для этого в показателях экспонент $\mathcal{A}_\pm$ важен только с-числовой коэффициент при бозонных полях $\hat{\mathcal{O}}(x)_\pm$ (сами же поля $\hat{\mathcal{O}}(x)_\pm$ могут быть любыми).

В теории твердого тела под бозонизацией чаще всего понимают случай, когда $\hat{\mathcal{O}}(x)_\pm$ – это просто бозонные поля $\hat{C}_{R,L}(p)$, связанные с плотностью правых или левых электронов соотношением [11, 12]:

$$\hat{C}_{R,L}(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{p}}\int dx\exp(\mp ipx)\hat{\varrho}_{R,L}(x), \qquad p > 0. \quad (3)$$

В этом случае фермионные поля, фигурирующие в левой части (2), – их волновые функции ($\hat{\Psi}_{R,L}(x)$).

Иногда для решения вопросов, непосредственно не связанных с вычислениями транспортного тока, удобны другие представления электронных операторов. Например, в работе [13] нами использовалось представление (2) для получения выражения для нормальных возбуждений латинджеровской жидкости без примеси и точечным взаимодействием – $\hat{\chi}_\pm(x)$. Для этого оказалось достаточно использовать вместо поля $\hat{\mathcal{O}}(x)_\pm$ бозонные поля, диагонализующие исходный гамильтониан (1) без примесного рассеяния и выражающиеся через бозоны (3) с помощью преобразования

$$\begin{aligned}\hat{C}(p) &= \mathrm{ch}\theta\hat{C}_R(p) + \mathrm{sh}\theta\hat{C}^\dagger_L(p),\\ \hat{C}^\dagger(-p) &= \mathrm{ch}\theta\hat{C}^\dagger_L(p) + \mathrm{sh}\theta\hat{C}_R(p).\end{aligned} \quad (4)$$

(В этом выражении “угол поворота” θ определяется соотношением $\mathrm{sh}2\theta = V_{ee}/(2\pi v_c)$, а $v_c = \sqrt{1 + V_{ee}/\pi}$ – перенормированная скорость Ферми). Без примеси эти квазачастицы не взаимодействуют друг с другом, и, из-за поляриризации основного состояния, их заряд (e_*) отличен от заряда электрона и равен $e/\sqrt{v_c}$. Таким образом, кондактанс канала без примеси и с δ-функционным е-е взаимодействием может быть вычислен по обычной формуле, справедливой для невзаимодействующих фермионов: $e_*^2/2\pi$. Квазичастичное представление жидкости Латинджера оказывается полезным для понимания качественной картины явления, но, на первый взгляд, кажется бесполезным для использования в качестве “нулевого приближения” при решении задач, связанных с рассеянием электронов на упругих примесях. Дело в том, что нормальные возбуждения $\hat{\chi}_\pm(x)$ из-за сильного е-е взаимодействия связаны с исходными электронами с помощью сложного нелинейного преобразования

$$\hat{\chi}_+(x) \propto \hat{\sigma}_+[\hat{\sigma}^\dagger_R\hat{\Psi}_R(x)]^{\mathrm{ch}\theta}[\hat{\sigma}_L\hat{\Psi}^\dagger_L(x)]^{\mathrm{sh}\theta},$$

с нецелыми степенями полей $\Psi_{R,L}(x)$ в правой части этого соотношения. Таким образом, примесная часть гамильтониана (1) при произвольной силе е-е взаимодействия будет содержать дробные степени операторов $\hat{\chi}_\pm(x)$. Это полностью нивелирует преимущества, возникающие из-за того, что все е-е взаимодействие оказывается учтенным до решения задачи о рассеянии электронов на примеси. Однако, при некоторых, вполне конкретных значениях v_c, с помощью соотношения (2) можно ввести поля $\hat{\chi}(x)$ таким образом, чтобы примесная часть гамильтониана выражалась через целочисленные степени этих операторов. Тот факт, что е-е взаимодействие в этом случае уже учтено, облегчает решение задач с примесным рассеянием при больших значениях V_{ee}. Существование точного решения в одной из этих точек $v_c = 2$ хорошо известно [14, 15]. В следующем разделе мы, для доказательства правильности предложенного подхода, выведем этот эквивалентный гамильтониан. Кроме того, мы покажем, что ферминизация модели Латтинджера позволяет получить эквивалентные теории с целочисленными степенями фермионных полей при других значениях v_c. Преимущество такого подхода состоит в том, что он содержит в качестве взаимодействия только примесное рассеяние и, вместе с этим, допускает применение обычных методов теории поля, т.к. содержит только целые степени фермионных полей. Это возможно для $v_c = 2, 1/2, 1/8, 2/9, 2/25 \ldots$. В качестве примера, в следующем разделе мы выведем эквивалентный гамильтониан для $v_c = 1/2$.

III. Эквивалентные гамильтонианы жидкости Латинджера при специальных значениях v_c.

A. $v_c = 2$.

Как уже отмечалось выше, операторы волновых фунций правого (левого) электронов в шредингеровском представлении могут быть записаны в виде:

$$\hat{\Psi}_{R,L}(x) = \exp\left[-\frac{1}{L}\sum_{n>0} e^{\mp ipx}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\hat{C}^{+}_{R,L}(p)\right]\frac{\hat{\sigma}_{R,L}}{\sqrt{L}} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{L}\sum_{n>0} e^{\pm ipx}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\hat{C}_{R,L}(p)\right]. \qquad (5)$$

Нетрудно убедиться, что показатель экспоненты для выражения $\Psi_R(0)\Psi^+_L(0)$, описывающий рассеяние назад, может быть представлен в виде

$$-\frac{1}{L}\sum_{n>0}\sqrt{\frac{2\pi}{v_c p}}(\hat{C}^\dagger(p) - \hat{C}^\dagger(-p)) +$$
$$+\frac{1}{L}\sum_{n>0}\sqrt{\frac{2\pi}{v_c p}}(\hat{C}(p) - \hat{C}(-p)). \qquad (6)$$

В таком случае при $v_c = 2$ мы можем ввести бозонные поля $\hat{B}_{1,2}(p) = 1/\sqrt{2}[\hat{C}(p) \pm \hat{C}(-p)]$ и определить новые фермионы $\hat{\Xi}_{1,2}(x)$:

$$\hat{\Xi}_{1,2}(x) = \exp\left[-\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}e^{\mp ipx}\hat{B}^{+}_{1,2}(p)\right]\frac{\hat{\sigma}_{R,L}}{\sqrt{L}} \times$$
$$\times \left[\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}e^{\pm ipx}\hat{B}_{1,2}(p)\right], \qquad (7)$$

антикоммутирующие на δ-функцию. В терминах этих фермионов примесная часть гамильтониана оказывается пропорциональна $\hat{\sigma}_R\hat{\Xi}^\dagger_2(x)$. Работать с таким "взаимодействием" трудно, так как операторы $\hat{\sigma}$ не являются настоящими фермионами: их квадрат (по сути, произведение двух фермионных операторов уничтожения, взятых в одной точке) – не нуль. Попытка дополнить свойства лестничных операторов требованием $\hat{\sigma}_i^2 = 0$ привела бы к тому, что отличной от нуля была бы только свободная функция Грина операторов $\hat{\Xi}_2$; очевидно, что это неправильно. Однако ничто не мешает нам ввести другие фермионы $(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2) = (\hat{\Xi}_1, \hat{\Xi}_2\hat{\sigma}^\dagger_R)$. Как и $\hat{\Xi}_{1,2}$, они тоже обладают нужными антикоммутационными свойствами. В терминах этих частиц часть гамильтониана латинджеровской жидкости, зависящая от примесного рассеяния, записывается в виде

$$\mathcal{H}_{\rm imp} = v_c\int dx\hat{\chi}^\dagger_2(x)i\partial_x\hat{\chi}_2(x) +$$
$$+\frac{\Delta^{1-1/v_c}}{\sqrt{L}}V_{\rm imp}\left[\hat{\chi}^\dagger_2(x=0) + \hat{\chi}_2(x=0)\right], \qquad (8)$$

здесь

$$\ln\Delta = \ln\left(\frac{\mathcal{M}L}{2\pi}\right) + \gamma_E,$$

а $\mathcal{M}$ – ультрафиолетовое обрезание. (В дальнейшем мы будем оставлять символ v_c в выражениях, справедливых при любой силе е-е взаимодействия, и писать ее конкретное значение в противном случае.)

Несмотря на то, что взаимодействие, связанное с примесным рассеянием, оказалось линейным по фермионным операторам, все выражение (8) нельзя привести к квадратичной форме просто сдвижкой поля $\hat{\chi}_2$: полученный в результате такого действия оператор перестает быть фермионом – он не будет антикоммутировать на δ-функцию. (В этом принципиальное отличие нашей задачи от бозонной теории). Тем не менее этот гамильтониан тоже может быть приведен к квадратичной форме. С этой целью мы введем майорановские фермионы $\hat{\zeta}$

$$\hat{\zeta}^\dagger = \hat{\zeta}, \quad \hat{\zeta}^2 = 1,$$

постоянные во всем пространстве ($\partial_x\hat{\zeta} = 0$) и с их помощью определим операторы рождения и уничтожения поля $\hat{\chi}_2$ как

$$\hat{\chi}_2(x) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}[\hat{\zeta}\hat{a}(p)\exp{(-ipx)} + \hat{b}^\dagger(p)\hat{\zeta}\exp{(ipx)}]. \qquad (9)$$

Такое представление тоже допустимо, т.к. сохраняет антикоммутатор полей $\hat{\chi}_2$. В итоге взаимодействующая часть гамильтониана представляется в виде

$$\gamma\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\zeta}\left(\hat{a}^\dagger(p) + \hat{b}^\dagger(p)\right) + \left(\hat{a}(p) + \hat{b}(p)\right)\hat{\zeta}]$$

с "константой взаимодействия" $\gamma = \sqrt{2\Delta/L}V_{\rm imp}$, зависящей от ультрафиолетового обрезания, но не от размера образца.

Из этого выражения видно, что из двух возможных комбинаций полей, взаимодействующей оказывается только одна – $1/\sqrt{2}\cdot(a^\dagger(p) + b^\dagger(p))$. Для диагонализации взаимодействующую часть гамильтониана удобно записать в терминах единого майорановского поля

$$\hat{\Phi}_n = 1/\sqrt{2}\begin{cases} i\left(\hat{a}_n + \hat{b}_n\right) & n > 0 \\ \hat{\zeta} & n = 0 \\ -i\left(\hat{a}^\dagger_{-n} + \hat{b}^\dagger_{-n}\right) & n < 0 \end{cases} \qquad (10)$$

с правилом антикоммутации $\{\hat{\Phi}_n, \hat{\Phi}_{n'}\} = \delta_{n,-n'}$ (на этом шаге мы перешли к конечному образцу). В итоге, существование рассеяния назад в жидкости Латинджера в данном случае описывается эквивалентным гамильнонианом

$$\mathcal{H}_{\rm imp} = \sum_{{\rm all}\, n} p_n\hat{\Phi}_{-n}\hat{\Phi}_n - i\gamma\sqrt{2/L}\hat{\Phi}_0\sum_{n\neq 0}\hat{\Phi}_n, \qquad (11)$$

не сохраняющим числа частиц. Однако это выражение квадратично по полю Φ, а поэтому всегда может быть диагонализовано с помощью унитарного поворота (см. [7, 8]). Получившиеся в результате этого поворота частицы останутся фермионами с известным основным состоянием (сферой Ферми).

B. $v_c = 1/2$.

Для того, чтобы построить эквивалентные гамильтонианы при других v_c, заметим, что показатель экспоненты (6) можно записать в виде

$$-\sqrt{\frac{2}{v_c}\frac{2\pi}{p}}\hat{B}_2^\dagger(p) + \sqrt{\frac{2}{v_c}\frac{2\pi}{p}}\hat{B}_2(p).$$

Таким образом, в точках, в которых выполняется условие $2/v_c = m^2$ (m – целое число), гамильтониан (1) сводится к теории, в которой примесное рассеяние заменяется на разумную фермионную теорию с самодействием. Примесное рассеяние исходных взаимодействующих электронов в этом случае будет заменено на произведение "m" фермионных операторов в точке $x = 0$. Единственное, на что необходимо будет обратить внимание, это регуляризация фиктивных расходимостей, отсутствующих в исходном гамильтониане и возникающих в процессе бозонизации. Продемонстрируем это на примере теории с $v_c = 1/2$ ($m = 2$). В этом случае видно, что примесное действие должно быть пропорционально квадрату фермионных операторов, взятых в *одной точке* $x = 0$. Хорошо известно, что при вычислении произведения фермионных операторов в одной точке бозонизация приводит к появлению дополнительных ультрафиолетовых расходимостей, которые должны быть регуляризованы с помощью симметричной раздвижки фермионных операторов:

$$\hat{\Psi}_R(\delta)\hat{\Psi}_L^\dagger(-\delta) \sim L\Delta^{1-1/v_c}[(\frac{1}{2i\delta})\hat{\Xi}(\delta)\hat{\Xi}(-\delta)+(\delta\to-\delta)].$$

Эта расходимость – фиктивная. Для того, чтобы убедиться в этом, разложим оператор $\hat{\Xi}$ в ряд $\hat{\Xi}(\delta) = \hat{\Xi}(0) + \delta\hat{\Xi}'(0) + ...$ После этого в пределе $\delta \to 0$ в правой части выражения для $\hat{\Psi}_R(\delta)\hat{\Psi}_L^\dagger(-\delta)$ получаем множитель $\hat{\Xi}(0)\hat{\Xi}'(0)$.

Для написания эквивалентного гамильтониана нам осталось разобраться с лестничным оператором поля $\hat{\chi}_2$ ($\hat{\sigma}$). Мы не будем сейчас обсуждать всю алгебру операторов $\hat{\sigma}$, так как для построения и анализа свойств эквивалентного гамильтониана важно только то, что

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_R\hat{\sigma}_L^\dagger, \quad \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger = 1$$

и его антикоммутация с лестничным оператором поля $\hat{\chi}_1$. В результате поле, учитывающее все e-e взаимодествие, представляется в виде, аналогичном предыдущему случаю:

$$\hat{\chi}_2(x) = \exp\left[-\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}e^{ipx}\hat{B}_2^\dagger(p)\right]\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{L}} \times \times\left[\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}e^{-ipx}\hat{B}_2(p)\right], \quad (12)$$

а часть гамильтониана, полностью описываюшая примесное рассеяние, теперь имеет вид

$$\mathcal{H}_{\rm imp} = v_c\int dx\hat{\chi}_2^\dagger(x)i\partial_x\hat{\chi}_2(x) - - i\gamma_{1/2}\left(\hat{\chi}(0)\partial_x\hat{\chi}(0) - \partial_x\hat{\chi}^\dagger(0)\hat{\chi}^\dagger(0)\right). \quad (13)$$

Здесь $\gamma_{1/2} = V_{\rm imp}L/2\pi\Delta$. Этот гамильтониан сразу диагонализуется с помощью унитарного поворота.

Из рассмотренного выше примера виден общий алгоритм получения эквивалентных теорий при произвольном значении "m". Понятно, что примесное рассеяние будет приводить к самодействию: произведению "m" операторов $\hat{\chi}_2$, взятых в одной точке $x = 0$. Однако, $\hat{\chi}_2$ – это фермиевские операторы, и мы получили их произведение *в одной точке*, т.е. произведение этих операторов в обычной ситуации было бы равно нулю. Однако, как мы убедились, процедура ферминизации приводит к существованию расходимости: каждый оператор $\hat{\chi}_2(\delta)$, начиная со второго, входит с множителем $1/\delta$. То есть мы получили неопределенность $0\cdot\infty$. Она должна быть раскрыта с помощью симметричной раздвижки аргументов операторов $\hat{\chi}_2$. В итоге, действуя, как и в случае $v_c = 1/2$, мы получим самодействие, пропорциональное

$$\hat{\chi}_2(0)\partial_x\hat{\chi}_2(0)\partial_x^2\hat{\chi}_2(0)...\partial_x^{m-1}\hat{\chi}_2(0),$$

и отличное от нуля только в точке расположения примеси. Этот факт существенно облегчает дальнейший анализ теории, так как задача свелась к рассеянию свободных фермионов на точечном центре, в котором происходит рождение и уничтожения частиц.

Резюмируем. В работе показано, что сильнейшее вырождение состояний в системе одномерных электронов с точечным электрон-электронным взаимодействием и линейным спектром приводит к тому, что задача об их рассеянии на примеси (при выполнении условия $2/v_c = m^2$; m – целое число) сводится к эквивалентной фермионной теории с самодействием. Это самодействие существует только в точке расположения примеси с константой связи, зависящей от величины примесного рассеяния исходных одномерных электронов. Получившийся эквивалентный гамильтониан справедлив и при сильном электрон-электронном и примесном рассеяниях, т.е. в той области значений параметров, где отказывает ренормгрупповой подход, обычно используемый для изучения сильно взаимодействующих систем. Фактически мы сводим исходную задачу о рассеянии на примеси *сильно взаимодействующих между собой электронов* к задаче о рассеянии *невзаимодействующих* фермионов на точечном центре, в котором происходит рождение и уничтожение частиц.

1. J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
2. D. C. Mattis and E. H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965).
3. J. Schwinger, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).
4. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, JETP **107**, 542 (2008).
5. C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 15233 (1992).
6. A. Furusaki and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **47**, 4531 (1993).
7. J. von Delft and H. Schoeller, arXiv:cond-mat/9805275 v.3.
8. K. A. Matveev, Phys. Rev. B **51**, 1743 (1994).
9. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, J. Phys.: Condens. Matter **30**, 355601 (2018).
10. F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).
11. D. C. Mattis and E. H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965).
12. J. Voit, Rep. Prog. Phys. **58**, 977 (1995).
13. V. V. Afonin and V. Yu. Petrov, Found. Phys. **40**, 190 (2010); DOI 10.1007/s10701-009-9385-7.
14. F. Guinea, Phys. Rev. B **32**, 7518 (1985).
15. Y. Oreg and A. M. Finkel'stein, Phys. Rev. B **53**, 10928 (1996).