

Статистические свойства поля скорости зарождающейся трехмерной гидродинамической турбулентности

Д. С. Агафонцев^{+*1)}, Е. А. Кузнецов^{*×°}, А. А. Майлыбаев[∇]

⁺Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия

^{*}Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

[×]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

[°]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

[∇]Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 22460-320 Rio de Janeiro, Brazil

Поступила в редакцию 1 июня 2019 г.

После переработки 1 июня 2019 г.

Принята к публикации 6 июня 2019 г.

В настоящей работе исследуются численно статистические корреляционные функции поля скорости на стадии зарождения трехмерной гидродинамической турбулентности, когда динамика определяется блинообразными структурами высокой завихренности. Мы наблюдаем формирование степенных скейлингов для продольных и поперечных моментов в том же интервале масштабов, что и для спектра энергии. Несмотря на сильную анизотропию турбулентности на этой стадии, показатели степени структурных функций обладают теми же ключевыми свойствами, что и для стационарной изотропной турбулентности. В частности, показатели зависят от порядка момента нетривиальным образом, свидетельствуя о перемежаемости и наличии аномального скейлинга, а продольные показатели оказываются больше поперечных. Когда спектр энергии имеет скейлинг, близкий к колмогоровскому, продольная структурная функция третьего порядка растет линейно с расстоянием, как и для закона 4/5 Колмогорова для изотропной стационарной турбулентности.

DOI: 10.1134/S0370274X19140078

1. Несмотря на большое практическое значение, в теории турбулентности известны лишь несколько точных результатов, основным из которых является закон 4/5 Колмогорова [1–3]. В инерционном интервале масштабов r этот закон записывается как

$$\langle \delta v_{\parallel}^3 \rangle = -(4/5) \varepsilon r, \quad (1)$$

где δv_{\parallel} – продольное приращение скорости, ε – средняя диссипация энергии в единице массы, а $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю. Используя метод размерностей, из этого точного закона Колмогоровым были получены соотношения для структурных функций второго порядка, $\langle \delta v^2 \rangle \propto \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$, а также эквивалентный им спектр турбулентности $E_k \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Вывод всех трех соотношений основан на предположениях о статистической однородности, изотропии турбулентности и локальности нелинейного взаимодействия в инерционной области масштабов. Последнее означает, что динамику турбулентности на этих масштабах можно

описывать в рамках уравнений Эйлера, а появление колмогоровских соотношений следует ожидать еще до возбуждения вязких масштабов [4–7].

Как было показано в наших предыдущих работах [8, 9], степенной спектр энергии со скейлингом, близким к колмогоровскому, может наблюдаться в полностью невязком режиме, определяемом блинообразными областями высокой завихренности [10–12]. Такие структуры в Фурье-пространстве представляют собой сильно анизотропные распределения в виде “джетов”, вытянутых в направлениях, перпендикулярных блинам. При этом джеты, которые занимают лишь небольшую долю всего спектрального пространства, доминируют в спектре энергии, что при определенных условиях приводит к образованию степенного интервала $E_k \propto k^{-\alpha}$ с показателем α , близким к 5/3, с последующим расширением этого интервала в область меньших масштабов. Степенной скейлинг может занимать значительно больший интервал масштабов, если направления появляющихся джетов оказываются близкими по углу, усиливая тем самым анизотропию турбулентного потока.

¹⁾e-mail: dmitrij@itp.ac.ru

В настоящей статье мы продолжаем исследовать процесс зарождения гидродинамической турбулентности и приводим численное подтверждение того, что, несмотря на сильную анизотропию, структурные функции третьего порядка могут иметь линейный скейлинг с расстоянием еще до возбуждения вязких масштабов. С помощью численного моделирования уравнений Эйлера мы исследуем двухточечные структурные функции (моменты) поля скорости. Мы наблюдаем формирование степенного скейлинга $[M_{\parallel}^{(n)}(r)]^{1/n} \propto r^{\xi_n}$ и $[M_{\perp}^{(n)}(r)]^{1/n} \propto r^{\zeta_n}$ для продольных и поперечных моментов в том же интервале масштабов, что и для спектра энергии E_k . Показатели степени ξ_n и ζ_n демонстрируют те же ключевые свойства, что и для случая развитой (стационарной) турбулентности: они уменьшаются с порядком момента n , что указывает на перемежаемость и аномальный скейлинг, а продольные показатели оказываются несколько больше поперечных. Выполняя анализ моделирования для различных начальных условий, мы приходим к примерному соотношению $\xi_3 \simeq \alpha/5$; таким образом, когда скейлинг спектра энергии близок к колмогоровскому, продольный момент третьего порядка зависит линейно от расстояния, как и для закона 4/5 Колмогорова (1). Распределение завихренности характеризуется сильно не-рэлеевской формой, также указывающей на перемежаемость, а степенной хвост этого распределения указывает на нетривиальную геометрию блинообразных структур высокой завихренности.

2. Несжимаемые трехмерные уравнения Эйлера (в терминах завихренности)

$$\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t = \text{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{v} = \text{rot}^{-1}\boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

интегрируются численно в периодическом ящике $\mathbf{r} = (x, y, z) \in [-\pi, \pi]^3$ с помощью псевдоспектрального метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Мы стартуем с начальных условий, взятых как суперпозиция сдвигового потока

$$\boldsymbol{\omega}_{sh}(\mathbf{r}) = (\sin z, \cos z, 0), \quad |\boldsymbol{\omega}_{sh}(\mathbf{r})| = 1, \quad (3)$$

представляющего собой стационарное решение уравнений Эйлера, и случайного периодического возмущения. Обратный оператор ротора и все пространственные производные вычисляются в Фурье-пространстве. Мы используем анизотропную прямоугольную решетку, которая является равномерной для каждого направления и адаптируется независимо по каждой из трех координат; адаптация происходит из анализа Фурье-спектра завихренности. Шаг по времени реализуется с помощью критерия

устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви (Courant–Friedrichs–Lewy – CFL) с числом Куранта 0.5. Мы стартуем с кубической решетки 128^3 , увеличивая ее до тех пор, пока общее число узлов не достигает 2048^3 (1024^3 для некоторых симуляций), затем фиксируем решетку и продолжаем до тех пор, пока Фурье-спектр завихренности на $2K_{\max}^{(j)}/3$ не превысит 10^{-13} от своего максимального значения по любому из трех направлений. Здесь $K_{\max}^{(j)} = N_j/2$ – максимальные волновые числа, а N_j – размеры решетки по направлениям $j = x, y, z$. Для более подробной информации см. [8, 9, 12], где было проверено, что точность на временном интервале моделирования очень высока, а моделирование уравнений Эйлера в представлении вихревых линий приводит к точно такому же полю завихренности.

Для некоторых симуляций мы наблюдаем постепенное формирование степенного скейлинга в спектре энергии $E_k \propto k^{-\alpha}$ на малых и средних волновых числах, начиная с $k \geq 2$. Первая гармоника $k = 1$, в которой сконцентрированы начальные условия, содержит большую часть энергии (до 97%) и не принадлежит этому интервалу. Чтобы исключить ее влияние на структурные функции скорости, мы вычисляем моменты для модифицированной скорости $\tilde{\mathbf{v}}$, полученной из исходной путем удаления девяти гармоник $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ с $k_{x,y,z} = -1, 0, 1$.

В отличие от развитой (стационарной) турбулентности, для которой моменты могут быть вычислены с использованием усреднения по времени (см., например, [13]), вычисление моментов для (нестационарной) зарождающейся турбулентности требует гораздо больше вычислительных ресурсов. Мы выполняем этот расчет следующим образом. Во-первых, для заданного радиуса r мы находим достаточное количество точек \mathbf{r} , равномерно распределенных на сфере $|\mathbf{r}| = r$. Затем для каждого \mathbf{r} вычисляем приращение скорости $\delta\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ в каждом узле решетки \mathbf{x} , используя интерполяцию по ближайшим соседям для “сдвинутой” скорости $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)$. Наконец, продольный и поперечный моменты порядка n ,

$$M_{\parallel}^{(n)}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\mathbf{r}|=r} d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} (\delta\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{m}_r)^n, \quad (4)$$

$$M_{\perp}^{(n)}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\mathbf{r}|=r} d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \left| \delta\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{m}_r \right|^n, \quad (5)$$

где $\mathbf{m}_r = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор, вычисляются как соответствующие интегральные суммы по всем точкам на сфере \mathbf{r} и всем узлам \mathbf{x} .

3. Мы начинаем с моделирования начального потока I_1 из [8] на решетке с общим числом узлов 2048^3

(некоторые детали этого моделирования были опубликованы ранее в нашей статье [11]). Моделирование достигает финального времени $t = 7.75$ на решетке $972 \times 2048 \times 4096$ с ростом максимума завихренности ω_{\max} от 1.5 до 18.4.

Эволюция спектра энергии для этого моделирования показана на рис. 1. На больших волновых числах

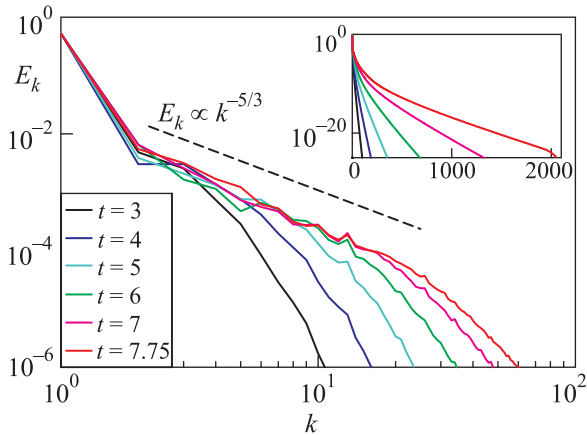


Рис. 1. (Цветной онлайн) Спектр энергии E_k в двойном логарифмическом масштабе. Вставка показывает спектр в одинарном логарифмическом масштабе

k спектр убывает экспоненциально, как показано на вставке рисунка. На малых и средних k мы отчетливо наблюдаем постепенное формирование степенного интервала со скейлингом, близким к колмогоровскому $E_k \propto k^{-5/3}$. Степенной интервал характеризуется “замороженным” спектром, в отличие от сильных изменений со временем на больших волновых числах; он расширяется до декады $2 \lesssim k \lesssim 30$ к концу моделирования. Необходимо отметить, что этот интервал содержит только малую долю энергии: даже в финальное время 97.2% энергии все еще содержится в первой гармонике $k = 1$, тогда как волновые числа $2 \leq k \leq 30$ и $k > 30$ получают только 2.8% и менее, чем 0.1% энергии, соответственно.

Распределение поля скорости, связанное со степенным спектром энергии, исследуется нами с помощью моментов скорости. Так как первая гармоника, содержащая большую часть энергии, не принадлежит степенному интервалу, мы исключаем ее из анализа, как объяснено выше. Эволюция моментов третьего порядка показана на рис. 2а; см. также рис. 2б, где показаны моменты в финальное время с большим масштабом. Степенной интервал со скейлингом, близким к линейному $M^{(3)} \propto r$, постепенно формируется как для продольного, так и для поперечного моментов на достаточно больших масштабах, расширяясь до $0.2 \lesssim r \lesssim 1$ в финальное вре-

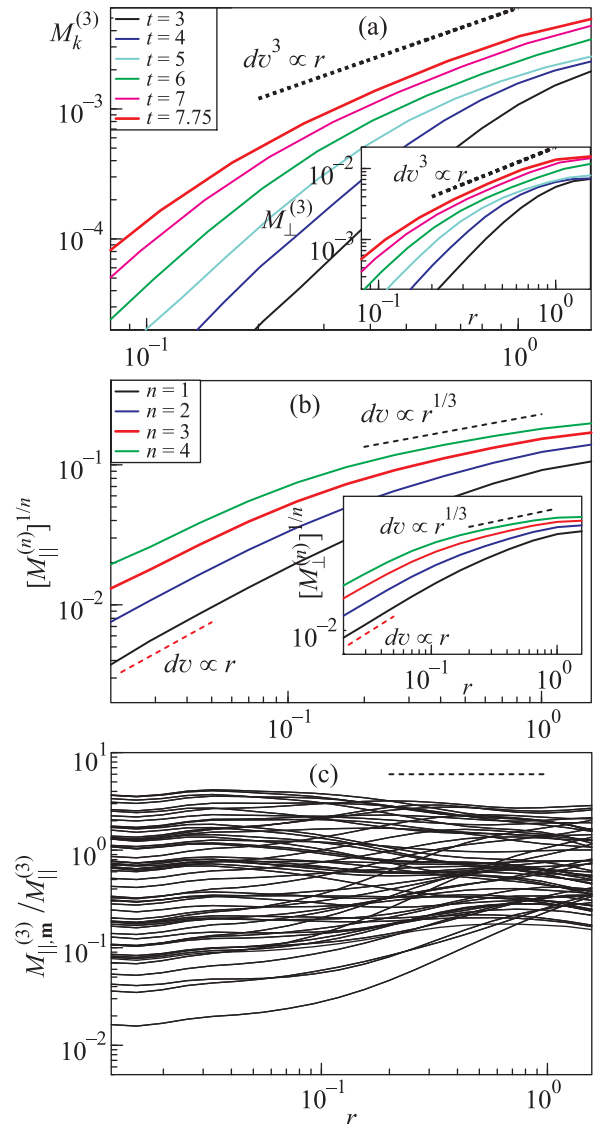


Рис. 2. (Цветной онлайн) (а) – Продольные моменты третьего порядка $M_{\parallel}^{(3)}$. Черная пунктирная линия показывает скейлинг $M^{(3)} \propto r$. (б) – Продольные моменты $[M_{\parallel}^{(n)}]^{1/n}$ порядков $n = 1, 2, 3, 4$ в финальное время $t = 7.75$. Черная пунктирная линия показывает скейлинг $[M^{(n)}]^{1/n} \propto r^{1/3}$ для степенного интервала, а красная пунктирная линия – скейлинг $[M^{(n)}]^{1/n} \propto r$ на меньших масштабах. Вставки на рисунках (а) и (б) показывают поперечные моменты. (с) – Скомпенсированные продольные моменты третьего порядка по направлениям $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}/M_{\parallel}^{(3)}$ для 114 направлений \mathbf{m} , равномерно распределенных по сферическим координатам, в финальное время. Пунктирная горизонтальная линия показывает степенной интервал для $M_{\parallel}^{(3)}$ на рисунке (б)

мя. Этим масштабам соответствуют волновые числа $6 \lesssim k \lesssim 30$, принадлежащие степенному интервалу в спектре энергии на рис. 1.

Показатели степени ξ_n и ζ_n для продольных и поперечных моментов $[M_{\parallel}^{(n)}]^{1/n} \propto r^{\xi_n}$ и $[M_{\perp}^{(n)}]^{1/n} \propto r^{\zeta_n}$ уменьшаются с порядком момента n , указывая на перемежаемость и аномальный скейлинг; см. рис. 2b. Первые четыре продольных показателя имеют следующие значения: $\xi_1 = 0.60 \pm 0.06$, $\xi_2 = 0.48 \pm 0.04$, $\xi_3 = 0.39 \pm 0.03$ и $\xi_4 = 0.32 \pm 0.03$. Соответствующие поперечные показатели $\zeta_1 = 0.55 \pm 0.07$, $\zeta_2 = 0.42 \pm 0.06$, $\zeta_3 = 0.33 \pm 0.05$ и $\zeta_4 = 0.26 \pm 0.04$ несколько меньше, $\xi_n \gtrsim \zeta_n$, но остаются в пределах стандартных отклонений. Необходимо отметить, что для развитой турбулентности поперечные показатели также оказываются несколько меньше продольных, см., например, [14, 15].

Анизотропию распределения скорости мы изучаем с помощью моментов скорости по направлениям, в частности, продольного момента третьего порядка,

$$M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(n)}(r) = \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} (\delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{m})^n, \quad (6)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{m}r$, а \mathbf{m} – единичный вектор, задающий направление. Поведение моментов по направлению $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}$ относительно усредненного по углам момента $M_{\parallel}^{(3)}$ показано на рис. 2c для 114 направлений, равномерно распределенных по сферическим координатам. На масштабах степенного интервала моменты по направлениям $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}$ меняются до порядка величины с направлением, и для некоторых направлений растут существенно быстрее (медленнее) с расстоянием r , чем усредненный по углам момент $M_{\parallel}^{(3)}$. Отметим однако, что для большинства направлений моменты $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}$ меняются с расстоянием практически так же, как и $M_{\parallel}^{(3)}$. Подобное поведение было впервые обнаружено для двумерной гидродинамической турбулентности в режиме прямого каскада [16], когда спектр Крайчнана появляется вследствие квазишоков завихренности [17, 18], аналогичных блинообразным структурам завихренности в трехмерном случае. Для поперечных моментов по направлению мы наблюдаем такие же свойства.

Для того чтобы более детально исследовать связь между спектром энергии и моментами поля скорости, мы выполнили дополнительные 30 симуляций на решетках с общим числом узлов 1024^3 для 30 начальных течений, взятых как суперпозиция сдвигового потока (3) и случайного периодического возмущения

$$\omega_p(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{h}} [\mathbf{A}_{\mathbf{h}} \cos(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{B}_{\mathbf{h}} \sin(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r})]. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ – вектор с целыми компонентами $|h_j| \leq 2$, $j = x, y, z$, а вектора $\mathbf{A}_{\mathbf{h}}$ и $\mathbf{B}_{\mathbf{h}}$ действительных случайных коэффициентов с нулевым средним и стандартным отклонением $\sigma_{\mathbf{h}}^2 \sim \exp(-|\mathbf{h}|^2)$ удовлетворяют условиям ортогональности, $\mathbf{h} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{h}} = 0$, необходимым для самосогласованности. Начальные условия выбирались как суперпозиция течений (3) и (7),

$$\omega_0(\mathbf{r}) = (1 - p) \omega_{sh}(\mathbf{r}) + p R \omega_p(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где p – коэффициент смешивания, а $R = \sqrt{4\pi^3/E_p}$ – коэффициент перенормировки. Здесь $4\pi^3$ и E_p – энергии сдвигового потока (3) и возмущения (7) в ящике интегрирования $[-\pi, \pi]^3$, так что коэффициент R перенормирует возмущение к той же энергии, что и у сдвигового потока. Было выполнено три группы экспериментов с $p = 1$ (случайные периодические течения), $p = 0.1$ и $p = 0.02$, для 10 случайных реализаций начальных течений для каждой группы. Отметим, что в статье [9] мы исследовали похожие течения, однако начальные условия там выбирались путем корректировки максимальной завихренности возмущения, а не энергии, как в настоящей статье.

Для первой группы экспериментов со случайными периодическими потоками ни одна из десяти симуляций не показала степенной интервал для спектра энергии или для моментов скорости. Для второй группы $p = 0.1$ все десять симуляций демонстрируют степенной интервал для спектра энергии, и шесть из десяти симуляций развивают степенной интервал для моментов скорости; интервалы достигают $2 \lesssim k \lesssim 20$ для спектра и $0.3 \lesssim r \lesssim 0.8$ для моментов. Третья группа с $p = 0.02$ показывает степенные интервалы для спектра и моментов для всех десяти симуляций; соответствующие интервалы достигают $2 \lesssim k \lesssim 40$ и $0.15 \lesssim r \lesssim 0.8$. Для всех симуляций нижняя граница r_l степенной области $r_l \lesssim r \lesssim r_h$ для моментов (если эта область существует) связана с верхней границей k_h степенной области $k_l \lesssim k \lesssim k_h$ для спектра как $r_l \approx 2\pi/k_h$. Верхняя граница r_h примерно соответствует волновому числу $2\pi/r_h \approx 6$.

Для третьей группы экспериментов мы наблюдаем степенной скейлинг $E_k \propto k^{-\alpha}$ для спектра энергии с показателем α между 0.9 и 1.8; для большинства симуляций α близка к 1.6. Показатели ξ_3 и ζ_3 , описывающие степенной скейлинг моментов скорости $[M_{\parallel}^{(3)}(r)]^{1/3} \propto r^{\xi_3}$ и $[M_{\perp}^{(3)}(r)]^{1/3} \propto r^{\zeta_3}$, принимают значения $0.2 \leq \xi_3 \leq 0.45$ и $0.13 \leq \zeta_3 \leq 0.35$. Продольные показатели оказываются несколько больше поперечных, $\xi_3 \gtrsim \zeta_3$, и большинство из десяти симуляций демонстрируют ξ_3 вблизи 0.35 и ζ_3 вблизи 0.25. Как показано на рис. 3, симуляции, имеющие больший показатель α , также показывают большие

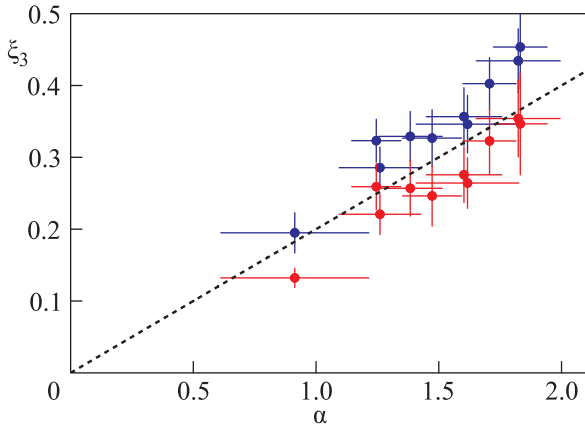


Рис. 3. (Цветной онлайн) Показатели ξ_3 (синий) и ζ_3 (красный) для степенного скейлинга продольных и поперечных моментов третьего порядка в зависимости от показателя α скейлинга спектра энергии; 10 симуляций из третьей группы экспериментов с $p = 0.02$. Горизонтальные и вертикальные линии показывают стандартные отклонения, пунктирная черная линия показывает соотношение $\xi_3 = \zeta_3 = \alpha/5$

показатели ξ_3 и ζ_3 , и наоборот, с приближенным соотношением для продольного показателя

$$\xi_3 \simeq \alpha/5. \quad (9)$$

Отметим, что такое соотношение не может быть получено из Фурье-анализа. Действительно, приращение скорости, удовлетворяющее $\delta v \propto r^\zeta$, имеет скейлинг $\delta v_k \propto k^{-\zeta-1}$ в Фурье-пространстве, что приводит к спектру энергии $E_k \propto k^{-2\zeta-1}$. Соотношения $\zeta = \alpha/5$ и $\zeta = (\alpha - 1)/2$ пересекаются только в одной точке: $\alpha = 5/3$, $\zeta = 1/3$.

Поведение еще одной функции - функции распределения абсолютного значения завихренности $\mathcal{P}(\omega)$ также указывает на перемежаемость зарождающейся турбулентности. Эволюция этой функции для симуляции с начальным течением I_1 показана на рис. 4. Распределение имеет сильно не-рэлеевскую форму с так называемым “тяжелым хвостом”, расширяющимся в область больших завихренностей, когда максимальная завихренность растет во времени. Значение второго локального максимума завихренности (показано на рис. 4 пунктирной вертикальной линией) существенно меньше первого, что позволяет изучить распределение завихренности внутри изолированной блинообразной области, соответствующей глобальному максимуму завихренности. В локальном ортонормированном базисе $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m + a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + a_3 \mathbf{w}_3$ блина модуль завихренности может быть описан с помощью квадратичного приближения [8],

$$\frac{|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})|}{\omega_{\max}} = 1 - \sum_{j=1}^3 \left(\frac{a_j}{\ell_j} \right)^2 + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|^2), \quad (10)$$

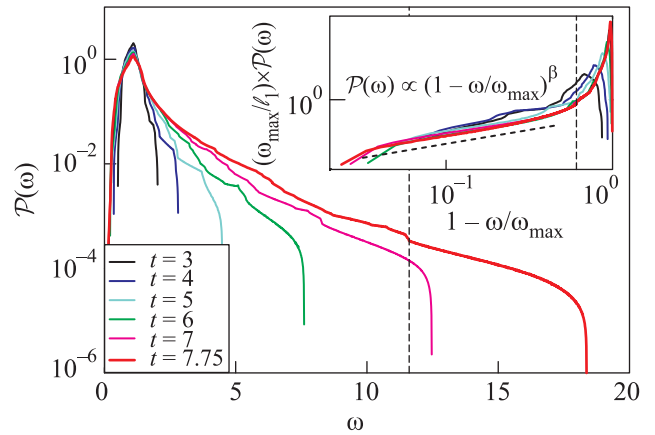


Рис. 4. (Цветной онлайн) Распределение завихренности для симуляции I_1 . Вставка показывает нормированное распределение в зависимости от $(1 - \omega/\omega_{\max})$. Вертикальная пунктирная линия показывает второй локальный максимум завихренности, а толстая пунктирная линия на вставке - скейлинг $\mathcal{P}(\omega) \propto (1 - \omega/\omega_{\max})^\beta$ с $\beta = 0.6$

где \mathbf{x}_m - положение локального максимума, $\ell_j = \sqrt{2\omega_{\max}/|\lambda_j|}$ - характерные размеры блина, $\ell_1 \ll \ell_2 \lesssim \ell_3$, а $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ и \mathbf{w}_j являются собственными значениями и собственными единичными векторами для (симметричной) матрицы $\partial^2 |\boldsymbol{\omega}| / \partial x_i \partial x_j$, вычисленной в \mathbf{x}_m . Используя это приближение, мы получаем

$$\mathcal{P}(f) \propto |dV/df| \propto (\ell_1 \ell_2 \ell_3) (1 - f)^{1/2}, \quad f = \omega/\omega_{\max},$$

где $V = (4\pi/3) \ell_1 \ell_2 \ell_3 (1 - f)^{3/2}$ - объем эллипсоида (10). Как мы обнаружили в [8], только толщина блина ℓ_1 существенно меняется со временем, тогда как два других размера $\ell_{2,3}$ остаются порядка единицы. Это позволяет исключить $\ell_{2,3}$ из соотношения выше, что приводит к

$$\mathcal{P}(\omega) \propto (\ell_1/\omega_{\max}) (1 - \omega/\omega_{\max})^\beta, \quad \beta = 1/2. \quad (11)$$

Результаты численных экспериментов, представленные в настоящей статье, находятся в хорошем соответствии со скейлингом (11), показывая, однако, несколько больший показатель β между 0.5 и 0.7, см., например, вставку на рис. 4 для симуляции I_1 . Мы считаем, что это расхождение отражает нетривиальную геометрию блина, который может отклоняться от своей основной плоскости на десятки и более своих толщин, см. [8, 11].

4. В данной работе мы систематически исследовали двухточечные структурные функции (моменты) поля скорости. Несмотря на сильную анизотропию, присущую (нестационарной) задаче о зарождении трехмерной гидродинамической турбулентности,

мы обнаружили формирование степенного скейлинга для продольных и поперечных моментов в том же интервале масштабов, что и для спектра энергии. Показатели степени структурных функций обладают теми же ключевыми свойствами, что и для развитой (стационарной) турбулентности. В частности, показатели зависят нетривиально от порядка момента, указывая на перемежаемость и аномальный скейлинг, а продольные показатели оказываются несколько больше поперечных. Анализируя результаты численных экспериментов для различных начальных условий, мы пришли к примерному соотношению $\xi_3 \simeq \alpha/5$, связывающему показатели скейлинга для продольного момента третьего порядка и спектра энергии. Таким образом, когда спектр энергии имеет степенной скейлинг, близкий к колмогоровскому, продольный момент третьего порядка показывает близкий к линейному скейлинг с расстоянием, совместимый с законом $4/5$ Колмогорова (1) для стационарной развитой турбулентности. Необходимо отметить, что перед усреднением по углам моменты третьего порядка демонстрируют сильно анизотропное поведение; при этом для большинства направлений структурные функции имеют линейную зависимость от расстояния. Распределение завихренности характеризуется сильно не-рэлеевской формой, что также указывает на перемежаемость. Степенной скейлинг (11) для хвоста этого распределения имеет показатель $\beta \gtrsim 1/2$, что указывает на нетривиальную геометрию блинообразных структур завихренности.

Работа Д. С. Агафонцева и Е. А. Кузнецова была поддержана Российским научным фондом (грант # 19-72-30028). Моделирование проводилось в Новосибирском суперкомпьютерном центре (НГУ), а анализ результатов – в дата-центре IMPA (Рио-де-Жанейро). Д. С. Агафонцев благодарит IMPA за поддержку во время визитов в Бразилию. Работа А. А. Майлыбаева осуществлялась при поддержке Российского фонда фундаментальных

исследований (грант # 17-01-00622) и Национального совета по научно-техническому развитию (грант # 303047/2018-6, Бразилия).

1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **32**, 16 (1941).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика, Теоретическая физика*, 3-е изд., перераб., Наука, М. (1986), т. VI.
3. U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
4. P. Orlandi and S. Pirozzoli, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24**, 247 (2010).
5. D. D. Holm and R. M. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **88**(24), 244501 (2002).
6. C. Cichowlas, P. Bonaïti, F. Debbasch, and M. Brachet, *Phys. Rev. Lett.* **95**(26), 264502 (2005).
7. D. D. Holm and R. M. Kerr, *Phys. Fluids* **19**, 025101 (2007).
8. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, *Phys. Fluids* **27**, 085102 (2015).
9. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 695 (2016).
10. M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, and P. L. Sulem, *Phys. Fluids A* **4**, 2845 (1992).
11. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, *J. Fluid Mech.* **813**, R1 (2017).
12. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, *Phys. Fluids* **30**, 095104 (2018).
13. T. Ishihara, T. Gotoh, and Y. Kaneda, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**, 165 (2009).
14. T. Gotoh, D. Fukayama, and T. Nakano, *Phys. Fluids* **14**, 1065 (2002).
15. К. П. Зыбин, В. А. Сирота, *УФН* **185**, 593 (2015).
16. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, *Письма в ЖЭТФ* **102**, 870 (2015).
17. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, and J. J. Rasmussen, *Phys. Fluids* **19**, 105110 (2007).
18. А. Н. Кудрявцев, Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 783 (2013).