Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 4, стр. 204 – 207 *25 февраля 1989 г.*

ФЕРМИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ И ЛОКАЛЬНАЯ $U(1)$-СИММЕТРИЯ

А.В.Балацкий

Рассматривается взаимодействие фермионных степеней свободы, возникающих при допировании, в антиферромагнетике (АФМ) с магнитными. Для этого строится группа инвариантности АФМ $G_{АФМ}$. Показано, что локальная $U(1)$-симметрия в коллинеарном АФМ возникает естественным образом в CP^1-представлении для фермионов. Используя локальную $U(1)$-симметрию и дискретные элементы $G_{АФМ}$ строится длинноволновый фермионный гамильтониан.

В последнее время вопрос о взаимодействии фермионных степеней свободы с магнитными в АФМ вызывает большой интерес. В целом здесь достигнут значительный прогресс, однако основной подход, который при этом используется – это различные микроскопические модели [1 – 5]. Представляется очевидным, что среди множества микроскопических моделей и предположений о фермионах в АФМ существуют чисто симметрийные утверждения, не связанные с микроскопическими предположениями. Мы рассмотрим симметрийные следствия существования АФМ упорядочения для дополнительных частиц в АФМ и построим длинноволновый гамильтониан фермионов в АФМ.

Ниже мы рассматриваем коллинеарный АФМ, характеризуемый параметром порядка – единичным вектором $\mathbf{n}$. При этом в АФМ существует локальная $U(1)$-симметрия, связанная с вращениями в спиновом пространстве вокруг $\mathbf{n}$. В чистом АФМ эта симметрия не важна, однако при наличии фермионов она становится явной и приводит к преобразованию фазы фермионной волновой функции. Очевидным образом наличие инвариантности относительно локальной группы приводит к ограничению вида фермионного гамильтониана. Кроме того будет показано, что при наличии внешнего магнитного поля или ферромагнитного вектора в системе фермионы взаимодействуют не только с $\mathbf{n}$, но и с перпендикулярными к нему векторами $\vec{\Delta}_1$ и $\vec{\Delta}_2$, где $\vec{\Delta}_1 \times \vec{\Delta}_2 = \mathbf{n}$ – триада единичных векторов в спиновом пространстве. Для иллюстрации фермионного представления $G_{АФМ}$ используется CP^1-анзатц. Мы ограничимся случаем двумерной квадратной решетки.

Рассмотрим АФМ без дополнительных частиц. В неупорядоченной фазе группа инвариантности состоит из подгрупп:

$$G = \{D_4, T, R, SU(2)_{spin}\}, \tag{1}$$

где D_4 — точечная группа кристалла, T – группа трансляций, R – операция обращения времени, $SU(2)$ – группа вращений в спиновом пространстве. При спонтанном нарушении симметрии появляется параметр порядка – единичный вектор $\mathbf{n}$ на сфере $S^2 \approx \approx SU(2)/U(1)$. При этом из группы вращений $SU(2)$ остается ненарушенным (не имеющим вакуумного среднего) один из генераторов – отвечающий вращениям вокруг n. Это и приводит к локальной $U(1)$-симметрии в АФМ [4,8] Группа инвариантности АФМ состояния имеет вид (мы выбираем ячейку трансляции с центром в узле) [6,7]:

$$G_{\text{АФМ}} = (D_4,\ RT,\ T^2,\ U(1)) \subset G. \tag{2}$$

Удвоение периода и возникновение двух подрешеток следует из зацепления T и R в $G_{\text{АФМ}}$. При этом относительно G $\mathbf{n}$ преобразуется как

$$D_4\mathbf{n} = \mathbf{n}, \qquad T\mathbf{n} = -\mathbf{n}, \qquad R\mathbf{n} = -\mathbf{n}. \tag{3}$$

Предположим теперь, что при малой концентрации фермионов в системе сохраняется АФМ упорядочение, описываемое $G_{\text{АФМ}}$. Рассмотрим фермион, описываемый волновой функцией $\psi(r)$, имеющей дополнительные индексы, которые мы не выписываем. Эта волновая функция преобразуется по неприводимому представлению $G_{\text{АФМ}}$. Причем, поскольку в $G_{\text{АФМ}}$ входит инверсия времени R, то рассмотрим двузначное неприводимое представление подгруппы (E, RT, T^2) (точечная группа не важна):

$$\begin{aligned} T^2\psi &= -e^{-2i\lambda}\psi \qquad & T^2\chi &= -e^{-2i\lambda}\chi \\ RT\psi &= e^{i\lambda}\chi^* \qquad & RT\chi &= -e^{i\lambda}\psi^* \end{aligned}, \tag{4}$$

где $e^{-2i\lambda}$ – характер группы трансляций T^2. Представление (4) естественно возникает при использовании CP^1-формализма. Для этого поставим в соответствие параметру порядка $\mathbf{n}$ – спинор (z_1, z_2) так, что $\mathbf{n} = z^*\vec{\sigma}z$. При этом потребуем, чтобы:

$$Rz_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}z^*_\beta \qquad T_a z_\alpha(r) = \epsilon_{\alpha\beta}z^*_\beta(r+a). \tag{5}$$

Тогда из (5) следует (3). Предположив, что существуют две подрешетки A и B, разложим исходный реальный фермион по когерентным состояниям на этих подрешетках (аналог преобразования Боголюбова)

$$\hat{\psi}_\alpha = \psi(r)z_\alpha(r) + \chi(r)\epsilon_{\alpha\beta}z^*_\beta(r), \qquad T\hat{\psi}_\alpha = e^{-i\lambda}\hat{\psi}_\alpha. \tag{6}$$

В предельном случае можно положить, что амплитуды ψ и χ обращаются в ноль на подрешетках B и A соответственно, как это делается в [4,9]. Поскольку (6) представляет собой разложение исходного реального фермиона на бесспиновые частицы ψ и χ и спиноры z, ϵz^*, то из (5) и (6) следует:

$$R\psi = \psi^*, \quad R\chi = \chi^*, \quad T\psi = e^{-i\lambda}\chi, \qquad T\chi = -e^{-i\lambda}\psi. \tag{7}$$

Окончательно из (7) следует двузначное представление (4), которое можно постулировать. Преимуществом использования CP^1-представления – является очевидная локальная $U(1)$-симметрия:

$$z \to e^{-i\alpha}z \qquad \psi \to e^{i\alpha}\psi, \qquad \chi \to e^{-i\alpha}\chi. \tag{8}$$

Хотя (8) следует из микроскопики, оно является вместе с (4) представлением $G_{\text{АФМ}}$.

Для дальнейшего введем соответствующий $U(1)$ калибровочный потенциал A_μ, $\mu = x, y$

$$A_\mu = z^* \frac{\partial_\mu}{i} z, \qquad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha, \qquad z \to e^{-i\alpha} z$$
$$RA_\mu = - A_\mu, \qquad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu . \tag{9}$$

Физически интересен случай, когда помимо АФМ вектора присутствует также и ферромагнитный вектор **h**

$$R\mathbf{h} = -\mathbf{h}, \qquad T\mathbf{h} = \mathbf{h}, \qquad D_4\mathbf{h} = \mathbf{h},$$

например, внешнее магнитное поле или малый ферромагнитный вектор, отвечающий локальной намагниченности [10,3].

Теперь нетрудно написать фермионный гамильтониан для частиц в АФМ, составляя всевозможные инварианты. Мы предположим, что динамическими переменными в АФМ являются амплитуды ψ и χ и ограничимся рассмотрением длинноволнового гамильтониана, предполагая простой минимум $k^2/2m$ для фермионов в центре зоны Бриллюэна. Тогда, требуя сохранения локальной $U(1)$-симметрии (8), можно записать гамильтониан в виде:

$$\mathcal{H}_{int} = \int d^2x \, \{ \frac{1}{2m} |D_\mu \psi|^2 + \frac{1}{2m} |D^+_\mu \chi|^2 + \mu(\psi^+ \psi + \chi^+ \chi) +$$
$$+ g [(\psi^+ \psi - \chi^+ \chi) \mathbf{h}\mathbf{n} + \psi^+ \chi (\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2) \mathbf{h}] + \tag{10}$$
$$+ \tilde{g} [(\psi^+ D_\mu \psi - \chi^+ D^+_\mu \chi) \mathbf{h} \partial_\mu \mathbf{n} + \psi^+ D^+_\mu \chi \mathbf{h} D_\mu (\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2)] + q \, \psi^+ D^+_\mu \chi z^* \epsilon \partial_\mu z^* + \text{h. c.} \}$$

Мы ограничились членами второго порядка по градиентам. Все константы в (10) – скаляры.

Интересно, что в гамильтониане при $U(1)$ неинвариантной комбинации $\psi^+ \chi$ стоит комплексный вектор $\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2 \approx z^* \vec{\sigma} \epsilon z^*$

$$R(\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2) = T(\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2) = (\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2)^* . \tag{11}$$

Где $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \mathbf{n}$ – образуют полную систему векторов в спиновом пространстве. При преобразовании (8) вектора $\vec{\Delta}_1$ и $\vec{\Delta}_2$ вращаются вокруг $\mathbf{n}: \vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2 \to (\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2) e^{2i\alpha}$.

Таким образом, в этой работе исходя из симметрии АФМ состояния построен гамильтониан фермионов. При этом явно учтена локальная симметрия в коллинеарном АФМ. Эта симметрия порождает калибровочное поле A_μ, на фоне которого живут фермионы. Интересно исследовать возможность существования нетривиальных автолокализованных решений в (10). Исходя из других принципов аналогичный, но не совпадающий гамильтониан построен в [11].

Важно подчеркнуть, что построенное двузначное представление явно учитывающее локальную $U(1)$-симметрию, не является исключительным и может быть проиллюстрировано на простейшем примере волны спиновой плотности. Кроме того, видно, что в рассматриваемом случае поля ψ и χ имеют различные заряды относительно $U(1)$. Можно построить представление, в котором ψ и χ имеют одинаковые заряды относительно локальной группы или не имеют их вовсе. По-видимому, случаю коллинеарного АФМ соответствует лишь рассмотренный случай. Таким образом, можно утверждать, что АФМ является $U(1)$ калибровочной теорией. Отметим, что в этой статье не рассматриваются специфические свойства точечной группы, проявляющиеся в особых точках зоны Бриллюэна [11].

Мне приятно поблагодарить А.Ф.Андреева и Г.Е.Воловика за полезные обсуждения. А также С.А. Бразовского и И.А.Лукьянчука за плодотворные дискуссии в ходе этой работы.

Литература

1. *Trugman S.A.* Phys. Rev. B, 1988, **37**, 1597.
2. *Smitt-Rink S., Varma C.M., Ruckenstein A.E.* Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 2793.
3. *Shraiman B.I., Siggia E.* Phys. Rev. Lett., 1988, **61**, 467.
4. *Wiegmann P.B.* Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 821.
5. *Нагаев Э.Л.* Физика магнитных полупроводников. М.: Наука, 1976.
6. *Андреев А.Ф., Марченко В.И.* УФН, 1980, **130**, 39.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974; Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
8. *Baskaran G., Anderson P.W.* Phys. Rev. B, 1988, **37**, 580; *Volovik G.E.* J. of Phys., 1987, **20**, L83.
9. *Wen X.G.* Preprint NSF-ITP-125, 1988.
10. *Haldane F.D.M.* Phys. Lett. A, 1983, **93**, 464.
11. *Бразовский С.А., Лукьянчук И.А.* ЖЭТФ, в печати.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 января 1989 г.