Письма в ЖЭТФ, том 110, вып. 5, с. 291 – 296 © 2019 г. 10 сентября

Предасимптотический анализ задачи рассеяния

С. Э. Коренблит[+*1)], *С. В. Ловцов*[+], *А. В. Синицкая*[+×]

[+]*Иркутский госуниверситет, 664003 Иркутск, Россия*

[*]*Лаборатория ядерных проблем ОИЯИ, 141980 Дубна, Россия*

[×]*Иркутский национальный исследовательский технический университет, 664074 Иркутск, Россия*

Поступила в редакцию 7 июля 2019 г.
После переработки 24 июля 2019 г.
Принята к публикации 25 июля 2019 г.

Приведен предасимптотический анализ многоканальной задачи рассеяния частиц с произвольным спином для быстроубывающих взаимодействий. Дана полная операторнозначная зависимость рассеянного дифференциального потока от расстояния до мишени, точно согласованная с условием унитарности.

DOI: 10.1134/S0370274X19170016

1. Введение. Как известно, в силу локального сохранения плотности тока радиальный поток уходящих в заданный телесный угол частиц не зависит от расстояния R даже от анизотропного точечного стационарного источника классических частиц, световых лучей или несжимаемой жидкости.

В волновой картине такая независимость справедлива лишь для потока сферической расходящейся (сходящейся) волны $fe^{\pm ikR}/R$ и дает тот же закон обратных квадратов R^{-2} для скорости счета числа событий и независимость от R дифференциального сечения рассеяния $|f|^2$ [1–3]. Нас интересует возможное нарушение этого закона. Будучи чисто волновым эффектом, оно связано с несферичностью точной рассеянной волны, т.е. со следующими – предасимптотическими членами ее асимптотического разложения по R^{-S}. Это разложение найдено здесь в явном операторном виде для всех порядков $S \geqslant 1$, с учетом сохранения соответствующего тока.

Возрастающий интерес к предасимптотическому анализу задачи рассеяния связан как с постановкой и анализом результатов новых экспериментов [4–6], так и с вопросами развития самой теории [7–10]. В отличие от дальнодействующего кулоновского потенциала, поддающегося лишь неасимптотическому анализу [7, 8] на основе точных кулоновских решений, для произвольного короткодействующего локального или нелокального взаимодействия оказывается возможен предасимптотический анализ на основе точных свободных решений [9, 10]. Например, он возможен для рассеяния нейтронов на ядрах с учетом всех нейтральных каналов такой реакции [1–3]. Далее приводится обобщение и уточнение на этот случай результатов предасимптотического анализа одноканального рассеяния, развитого в [9, 10]. Полагаем $\hbar = 1$.

2. Асимптотическое разложение волновой функции. Оно следует из операторного разложения свободной функции Грина. Для векторов $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$, $\mathbf{x} = r\mathbf{v}$ и $\mathbf{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$; операторов $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}} = \mathbf{n}\partial_R + R^{-1}\heartsuit_{\mathbf{n}}$, где в сферическом базисе $\heartsuit_{\mathbf{n}} = (0, \partial_\vartheta, (\sin\vartheta)^{-1}\partial_\varphi)$, квадрата $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \equiv \mathbf{L}^2_{\mathbf{n}} = -\heartsuit^2_{\mathbf{n}}$ оператора орбитального момента $\mathbf{L}_{\mathbf{n}} = -i\,(\mathbf{n}\times\heartsuit_{\mathbf{n}})$ и $\Lambda_{\mathbf{n}} = \sqrt{\mathcal{L}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ имеем, что при $|\mathbf{x}| = r < R$:

$$\frac{e^{\pm ik|\mathbf{R}-\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{x}|} = \frac{\chi_{\Lambda_{\mathbf{n}}}(\mp ikR)}{4\pi R}e^{\mp ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})} \sim$$
$$\sim \frac{e^{\pm ikR}}{4\pi R}\left\{1 + \sum_{S=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{S}[\mathcal{L}_{\mathbf{n}} - \mu(\mu-1)]}{S!(\mp 2ikR)^S}\right\}e^{\mp ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}. \quad (1)$$

Равенство в (1) дает краткую операторную запись [6, 9] мультипольного разложения функции Грина [1] с учетом такого разложения для плоской волны [2]:

$$e^{\mp ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})} = \frac{4\pi}{kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^{\mp l}\,\psi_{l\,0}(kr)\sum_{m=-l}^{l} Y^m_l(\mathbf{n})\overset{*}{Y}{}^m_l(\mathbf{v}), \quad (2)$$

где шаровая функция $Y^m_l(\mathbf{n}) = \langle\mathbf{n}|l,m\rangle$, а регулярное $\psi_{l\,0}(kr) = (2i)^{-1}\left[i^{-l}\chi_l(-ikr) - i^l\chi_l(ikr)\right]$ и иррегулярное решения свободного радиального уравнения:

$$\chi_l(z) \equiv \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{1/2} K_{l+\frac{1}{2}}(z), \qquad z = \mp ikr, \quad (3)$$

[1)]e-mail: korenb@ic.isu.ru

с функцией Макдональда $K_\lambda(z)$ [11], при целых l выражаются через элементарные функции [2, 3, 11]:

$$\chi_l(z) \underset{l=\text{int}}{\longmapsto} e^{-z}\sum_{S=0}^{l}\frac{(l+S)!}{S!(l-S)!(2z)^S}, \quad z=\mp ikR, \quad (4)$$

$$\text{при:} \;\; \chi_{\Lambda_{\mathbf{n}}}(\mp ikR)Y_l^m(\mathbf{n}) = \chi_l(z)Y_l^m(\mathbf{n}). \qquad (5)$$

Ряд по S в (1) для $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \mapsto l(l+1)$ есть известное асимптотическое разложение [11] функции (3), которое вырождается в конечную сумму (4) при целых $l \longleftarrow \Lambda_{\mathbf{n}}$.

Следуя [9], подставим соотношения (1) в уравнение Липпмана–Швингера для волновой функции рассеяния без перестройки в системе центра масс [1]:

$$\Psi_a^{\pm}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) = \Psi_a^0(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) +$$
$$+\int d^3\mathrm{x}\int d^3\mathrm{y}\langle\mathbf{a}|\widehat{G}_a^{\pm}(E;\mathbf{R},\mathbf{x})\widehat{V}^a(\mathbf{x},\mathbf{y})\Psi_a^{\pm}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{y};), \quad (6)$$

с приведенной массой m_a, для свободной функции Грина $\widehat{G}_a^{\pm}$ и взаимодействия $\widehat{V}^a$ как операторов в подпространстве состояний мишени в каналах $\alpha(a)$ с энергиями $\varepsilon_{\alpha(a)}$, при импульсе налетающей внешней a-той частицы $k_{\alpha(a)} = [2\mathrm{m}_a(E-\varepsilon_\alpha)]^{1/2}$ и $\mathbf{k}_\alpha = k_\alpha\boldsymbol{\kappa}$:

$$\Phi_{\beta(a)}(\mathbf{a}) = \langle\mathbf{a}|\beta(a)\rangle, \qquad (7)$$

$$\langle\mathbf{a}|\widehat{G}_a^{\pm}(E;\mathbf{R},\mathbf{x})|\mathbf{a}'\rangle =$$
$$= -\frac{\mathrm{m}_a}{2\pi}\sum_{\beta(a)}\frac{e^{\pm ik_\beta|\mathbf{R}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{x}|}\Phi_{\beta(a)}(\mathbf{a})\Phi^{\dagger}_{\beta(a)}(\mathbf{a}'), \qquad (8)$$

и аналогично для $\widehat{V}^a$. Векторы $\mathbf{R}=\mathbf{R}_a,\mathbf{x},\mathbf{y}$ задают координаты внешней a-той частицы, а $\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{a}$ есть совокупности векторов относительных координат частиц мишени (bc) в ее различных состояниях, привязанных к каналам $\alpha(a),\beta(a)$ с внешней a-той частицей, отвечающим разбиению полного гамильтониана на свободный гамильтониан H^a каналов $\alpha(a)$ с функцией Грина $G_a^{\pm}(E) = [E\pm i0 - H^a]^{-1}$ (8) и взаимодействие V^a в них a-той частицы с мишенью:

$$H = H^a + V^a, \quad H^a = \mathbf{P}_a^2/(2\mathrm{m}_a) + \widehat{H}_{bc}^{(\mathbf{a})}, \qquad (9)$$
$$H\Psi_a^{\pm}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) = E\Psi_a^{\pm}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}), \qquad (10)$$
$$H^a\Psi_a^{0}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) = E\Psi_a^{0}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}), \qquad (11)$$
$$\widehat{H}_{bc}^{(\mathbf{a})}\Phi_{\beta(a)}(\mathbf{a}) = \varepsilon_\beta\Phi_{\beta(a)}(\mathbf{a}), \;\; \text{где при} \;\; E>\varepsilon_\alpha: \qquad (12)$$
$$\Psi_a^{0}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) = (2\pi)^{-3/2}e^{i(\mathbf{k}_\alpha\cdot\mathbf{R})}\Phi_{\alpha(a)}(\mathbf{a}). \qquad (13)$$

Скрытые в (6) интегралы [1] по внутренним переменным $\mathbf{a}'$ состояний мишени (7) приведены ниже в (14). Разбиение полного гамильтониана (9) со свободным гамильтонианом H^a и мишени $\widehat{H}_{bc}^{(\mathbf{a})}$ выделяет в (12) подгруппу каналов $\beta(a)$ с возбуждениями различных связанных состояний мишени (bc), которая не содержит континуум состояний ее непрерывного спектра, отвечающих ее развалу [2]. Тем не менее, сумма (8) по $\beta(a)\mapsto\beta$ [1, 2, 12] включает его в эту полную и ортонормированную систему собственных функций (12), а стало быть, и в систему функций (13).

Индексы каналов α,β и переменные $\mathbf{a}$ в (6)–(13) могут включать дискретные индексы спиновых степеней свободы системы [1]. Выбирая единую фиксированную ось квантования для всех спинов, можно разложить амплитуду рассеяния $f_{\beta\alpha}^{\pm}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha)$ ниже только по шаровым функциям $Y_l^m(\mathbf{n})$ с квантовыми числами и переменными конечных состояний [1].

Положим в (6) матричные элементы $\mathcal{W}_{\beta\alpha}^{a(\pm)}(\mathbf{x})$:

$$\mathcal{W}_{\beta\alpha}^{a(\pm)}(\mathbf{x}) = \int d^3\mathrm{y}\int d^3\mathrm{a}'\Phi^{\dagger}_{\beta}(\mathbf{a}')\int d^3\mathrm{a}''\times$$
$$\times\langle\mathbf{a}'|\widehat{V}^a(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathbf{a}''\rangle\Psi_a^{\pm}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{y};\mathbf{a}'')(2\pi)^{3/2}, \qquad (14)$$

взаимодействия $\widehat{V}^a$ из (9) либо финитными функциями $r=|\mathbf{x}|$, исчезающими вовсе при $r>\rho_0$, либо исчезающими при $r\to\infty$ быстрее любой степени $\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{N}}r^{-\mathrm{N}}$. Тогда с точностью до двух аналогичных [9] добавок:

$$\Delta_R f_{\beta\alpha}^{\pm} = \frac{\chi_{\Lambda_{\mathbf{n}}}(\mp ik_\beta R)}{2\pi R}\mathrm{m}_a\int\limits_{r>R} d^3\mathrm{x}\, e^{\mp ik_\beta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}\mathcal{W}_{\beta\alpha}^{a(\pm)}(\mathbf{x}),$$
$$\Delta_R \mathcal{J}_{\beta\alpha}^{\pm} = -\mathrm{m}_a\int\limits_{r>R} d^3\mathrm{x}\,\frac{e^{\pm ik_\beta|\mathbf{R}-\mathbf{x}|}}{2\pi|\mathbf{R}-\mathbf{x}|}\mathcal{W}_{\beta\alpha}^{a(\pm)}(\mathbf{x}), \quad (15)$$

которые или вовсе отсутствуют при $R>\rho_0$ ввиду конечности нормы $||\Psi|| \equiv \sup\limits_{\mathbf{y},\mathbf{a},\alpha}|\Psi_a^{\pm}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{y};\mathbf{a})|$, или также исчезают быстрее любой степени в силу произвольности $\mathrm{N}\gg 1$ согласно аналогичным оценкам при

$$\sup_\beta\int d^3\mathrm{y}\int d^3\mathrm{a}''\left|\int d^3\mathrm{a}'\Phi^{\dagger}_{\beta}(\mathbf{a}')\langle\mathbf{a}'|\widehat{V}^a(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathbf{a}''\rangle\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}}{r^{\mathrm{N}}},$$
$$\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{N}} = \mathrm{C}_{\mathrm{N}}||\Psi||(2\pi)^{3/2}, \quad |\Delta_R\mathcal{J}_{\beta\alpha}^{\pm}| < \frac{2\mathrm{m}_a\,\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{N}}}{(\mathrm{N}-2)R^{\mathrm{N}-2}},$$
$$|\Delta_R f_{\beta\alpha}^{\pm}| < \frac{2\mathrm{m}_a\,\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{N}}}{(\mathrm{N}-3)R^{\mathrm{N}-2}}\left[1+O(R^{-1})\right], \qquad (16)$$

в результате указанной подстановки приходим к явной операторной форме асимптотического разложения волновой функции рассеяния без перестройки:

$$\Psi_a^{\pm}(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) \sim (2\pi)^{-3/2}\sum_{\beta(a)}\Phi_{\beta(a)}(\mathbf{a})\times$$
$$\times\left\{\delta_{\beta\alpha}e^{i(\mathbf{k}_\alpha\cdot\mathbf{R})} + \frac{\chi_{\Lambda_{\mathbf{n}}}(\mp ik_\beta R)}{R}f_{\beta\alpha}^{\pm}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha)\right\}, \quad (17)$$

$$f_{\beta\alpha}^{\pm}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha) = -\frac{\mathrm{m}_a}{2\pi}\int d^3\mathrm{x}e^{\mp ik_\beta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}\mathcal{W}_{\beta\alpha}^{a(\pm)}(\mathbf{x}), \quad (18)$$

выраженной здесь лишь через физическую амплитуду рассеяния (18) на энергетической поверхности, определяющую дифференциальное и полное сечения рассеяния из канала $\alpha(a)$ в канал $\beta(a)$ [1, 2, 12]:

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega(n)} = \frac{k_\beta}{k_\alpha}\left|f^{\pm}_{\beta\alpha}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha)\right|^2, \tag{19}$$

$$\sigma_{\beta\alpha} = \frac{k_\beta}{k_\alpha}\int d\Omega(\mathbf{n})\left|f^{\pm}_{\beta\alpha}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha)\right|^2. \tag{20}$$

Вклад падающей плоской волны (13) отсутствует в (17) для всех неупругих каналов с $\beta \neq \alpha$. Те же рассуждения и оценки приводят к аналогичным выражениям (17), (18) для столкновений с перестройкой, где, однако, более сложная, чем (13), “падающая” и рассеянная в (17) волны отвечают разным мишеням, и вклад “падающей” волны в канале $\alpha(a)$ ортогонален связанным состояниям конечной мишени в канале $\beta(b)$ [1, 2]. Разложение (1) строится теперь в (17) по степеням расстояния $R \mapsto \mathcal{R} = \mathcal{R}_b$ между другой конечной мишенью (ac) и другой конечной внешней частицей (b), улетающей в другом направлении $\boldsymbol{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\boldsymbol{\nu}$ в конечном канале $\beta(b)$. То есть в (8), (14), (18) при $\alpha = \underline{\alpha}(a)$, $\Psi^{\pm}_a(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) \equiv \widetilde{\Psi}^{\pm}_a(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\boldsymbol{\mathcal{R}};\mathbf{b})$ имеем теперь $\widehat{V}^a \mapsto \widehat{V}^b$, $\mathrm{m}_a \mapsto \mathrm{m}_b$, $\beta \mapsto \beta(b)$, $\mathbf{n} \mapsto \boldsymbol{\nu}$, а в (19), (20) замену $k_\beta/k_\alpha \mapsto \upsilon_\beta/\upsilon_\alpha$ для соответствующих скоростей $\upsilon_\beta = k_\beta/\mathrm{m}_b$, $\upsilon_\alpha = k_\alpha/\mathrm{m}_a$ [1] (ср. [10]).

В любом случае точное асимптотическое разложение волновой функции рассеяния на быстроубывающих потенциалах дается простой заменой экспоненты в выражении для сферической волны на операторнозначную функцию (1): $e^{\pm ik_\beta R} \mapsto \chi_{\Lambda_\mathbf{n}}(\mp ik_\beta R)$, действующую только на угловые переменные $\mathbf{n}$ (или $\boldsymbol{\nu}$) соответствующей амплитуды рассеяния (18).

Полагая фигурную скобку в (17) асимптотическим разложением функции $\eta^{\pm}_{\beta\alpha}(\mathbf{R})$, имеем для нее

$$\Psi^{\pm}_a(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}) = (2\pi)^{-3/2}\sum_{\beta(a)}\Phi_{\beta(a)}(\mathbf{a})\eta^{\pm}_{\beta\alpha}(\mathbf{R}), \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\eta^{\pm}_{\beta\alpha}(\mathbf{R}) \sim \delta_{\beta\alpha}e^{i(\mathbf{k}_\alpha\cdot\mathbf{R})} + \\ + \frac{e^{\pm ik_\beta R}}{R}\left[f^{\pm}_{\beta\alpha}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha) + \sum_{S=1}^{\infty}\frac{h^{\pm}_S(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha)}{(\mp 2ik_\beta R)^S}\right],\end{gathered} \tag{22}$$

$$h^{\pm}_S(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha) = \frac{1}{S!}\prod_{\mu=1}^{S}\left[\mathcal{L}_\mathbf{n} - \mu(\mu-1)\right]f^{\pm}_{\beta\alpha}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha).$$

То есть коэффициенты $h^{\pm}_S$ ее асимптотического разложения (22) оказываются наблюдаемыми вместе с $f^{\pm}_{\beta\alpha}$.

3. Рассеянный дифференциальный поток, условие унитарности и оптическая теорема. Следуя [2, 9], рассмотрим элемент радиального потока через малый элемент сферической поверхности $\mathbf{n}R^2d\Omega(\mathbf{n})$ для недиагональной плотности тока $\mathbf{J}_{\gamma\alpha}(\mathbf{q}_\gamma,\mathbf{k}_\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}',\mathbf{a})$, построенной на волновых функциях (6), (10) вида (21), (17) при $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$, $\mathbf{q}_\gamma = k_\gamma\mathbf{v}$, $\mathbf{k}_\alpha = k_\alpha\boldsymbol{\kappa}$, $\overset{\leftrightarrow}{\partial}_R = \left(\mathbf{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\nabla}}_\mathbf{R}\right) = \overset{\rightarrow}{\partial}_R - \overset{\leftarrow}{\partial}_R$. В силу сохранения тока $(\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{R}\cdot\mathbf{J}_{\gamma\alpha}(\mathbf{q}_\gamma,\mathbf{k}_\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}',\mathbf{a})) = 0$ на уравнениях движения (9)–(12) полный поток через любую замкнутую поверхность должен быть равен нулю, а

$$\begin{gathered}R^2d\Omega(\mathbf{n})\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_{\gamma\alpha}(\mathbf{q}_\gamma,\mathbf{k}_\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a}',\mathbf{a})\right) = \\ = R^2d\Omega(\mathbf{n})\frac{1}{2i}\left[\overset{*}{\Psi}{}^{+}_a(\mathbf{q}_\gamma\gamma,\mathbf{R};\mathbf{a}')\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mathbf{R}\Psi^{+}_a(\mathbf{k}_\alpha\alpha,\mathbf{R};\mathbf{a})\right] = \\ = \frac{R^2d\Omega(\mathbf{n})}{(2\pi)^3}\sum_{\underline{\beta}}\sum_{\beta}\Phi^{\dagger}_{\underline{\beta}}(\mathbf{a}')\Phi_\beta(\mathbf{a})\frac{1}{2i}\left[\overset{*}{\eta}{}^{+}_{\underline{\beta}\gamma}(\mathbf{R})\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mathbf{R}\eta^{+}_{\beta\alpha}(\mathbf{R})\right].\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь и далее верхние стрелки всюду указывают направление действия операторов, а $z_\beta = -ik_\beta R$ и т.д. Подстановка (17) дает элемент потока (23) как сумму трех вкладов, имеющих ясный физический смысл:

$$\begin{gathered}\frac{R^2}{2i}\left[\overset{*}{\eta}{}^{+}_{\underline{\beta}\gamma}(\mathbf{R})\overset{\leftrightarrow}{\partial}_R\eta^{+}_{\beta\alpha}(\mathbf{R})\right] \sim \\ \sim \underbrace{\delta_{\underline{\beta}\gamma}\delta_{\beta\alpha}\frac{R^2}{2}(\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}_\alpha+\mathbf{q}_\gamma))e^{iR(\mathbf{n}\cdot(\mathbf{k}_\alpha-\mathbf{q}_\gamma))}}_{<1>} + \underbrace{\frac{1}{2i}}_{<2>}\times \\ \underbrace{\times\overset{*}{f}{}^{+}_{\underline{\beta}\gamma}(k_{\underline{\beta}}\mathbf{n};\mathbf{q}_\gamma)\left[\chi_{\overset{\leftarrow}{\Lambda}_\mathbf{n}}(-z_{\underline{\beta}})\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mathbf{R}\chi_{\overset{\rightarrow}{\Lambda}_\mathbf{n}}(z_\beta)\right]f^{+}_{\beta\alpha}(k_\beta\mathbf{n};\mathbf{k}_\alpha)}_{<2>} + \\ \underbrace{+\frac{i}{2}\left\{\left(\delta_{\underline{\beta}\gamma}e^{z_\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}\left[z_\gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) + 1 - z_\beta\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right]\times\right.\right.}_{<3>} \\ \underbrace{\left.\left.\times\chi_{\overset{\rightarrow}{\Lambda}_\mathbf{n}}(z_\beta)f^{+}_{\beta\alpha}(k_\beta\mathbf{n};k_\alpha\boldsymbol{\kappa})\right) - \left(\begin{matrix}\mathbf{v}\rightleftharpoons\boldsymbol{\kappa}, \\ \gamma\rightleftharpoons\alpha,\end{matrix}\;\beta\rightleftharpoons\underline{\beta}\right)^{*}\right\}}_{<3>}.\end{gathered} \tag{24}$$

Как обычно [2, 3], первый вклад $<1>$ отвечает падающим потокам, второй $<2>$ описывает теперь рассеянные потоки, а третий $<3>$ соответствует их интерференции. Здесь и далее используются элементарные тождества для производных и Вронскианов [2] произвольных функций ψ,ϕ,w,g и функций χ_l (3) от z:

$$\begin{gathered}\left[w(z)\psi(z)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_z g(z)\phi(z)\right] = \psi(z)\phi(z)\left[w(z)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_z g(z)\right] + \\ + w(z)g(z)\left[\psi(z)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_z\phi(z)\right], \quad \left[\phi(z)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_z\phi(z)\right] = 0,\end{gathered} \tag{25}$$

$$z\left[w(z)\left(\overset{\leftrightarrow}{\partial}_z + \frac{1}{z}\right)\frac{g(z)}{z}\right] = \left[w(z)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_z g(z)\right], \tag{26}$$

$$zce^{zc} = z\partial_z e^{zc}, \qquad \left[\chi_l(z)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_z\chi_l(-z)\right] = 2, \tag{27}$$

которые, с учетом полноты и ортономированности системы функций мишени (7), (12):

$$\int d^3 \mathrm{a} \Phi^{\dagger}_{\underline{\beta}}(\mathbf{a}) \Phi_{\beta}(\mathbf{a}) = \delta_{\underline{\beta}\beta}, \tag{28}$$

определяют результат вычисления проинтегрированного по ним при $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ полного потока от (23), (24). Умножение на $\delta_{\underline{\beta}\beta}$ и суммирование по всем каналам в (23) сводит вклад от интеграла $\int d\Omega(\mathbf{n}) < 1 >$ при $\gamma = \alpha$ к интегралу (42) из [9], который равен нулю. Те же операции, с учетом самосопряженности оператора $\Lambda_{\mathbf{n}}$ на единичной сфере и тождества (27), приводят вклад в результат интегрирования (23) от $<2>$ к виду правой части условия унитарности [1–3]:

$$\longmapsto \sum_{\beta(a)} k_{\beta} \int d\Omega(\mathbf{n}) \overset{*}{f}{}^{+}_{\beta\gamma}(k_{\beta}\mathbf{n}; \mathbf{q}_{\gamma}) f^{+}_{\beta\alpha}(k_{\beta}\mathbf{n}; \mathbf{k}_{\alpha}), \tag{29}$$

где, как и выше, $*$ означает комплексное и/или эрмитово сопряжение в случае спиновых индексов. Эти же операции должны, стало быть, превращать вклад $<3>$ в левую часть условия унитарности. Действительно, при $\underline{\beta} = \beta = \gamma$ (или α), $\int d\Omega(\mathbf{n}) < 3 >$ можно найти с помощью указанного в пункте 2 всегда допустимого разложения амплитуды рассеяния

$$f^{+}_{\gamma\alpha}(k_{\gamma}\mathbf{n}; k_{\alpha}\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\mathbf{n}) B^{lm}_{\gamma\alpha}(k_{\gamma}; k_{\alpha}; \boldsymbol{\kappa}), \tag{30}$$

эффективно заменяющего $f^{+}_{\gamma\alpha}(\mathbf{n}) \mapsto Y_l^m(\mathbf{n})$ в последней строке (24). С учетом (5), оно дает парциальный вклад в $\int d\Omega(\mathbf{n}) < 3 >$ в виде (опуская $B^{lm}_{\gamma\alpha}$):

$$\mapsto \frac{i}{2} \left\{ \left(z_{\gamma} \left[\chi_l(z_{\gamma}) \left(\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{z_{\gamma}} + \frac{1}{z_{\gamma}} \right) \frac{A(z_{\gamma})}{z_{\gamma}} \right] \right) - \left(\begin{matrix} \mathbf{v} \rightleftarrows \boldsymbol{\kappa} \\ \gamma \rightleftarrows \alpha \end{matrix} \right)^{*} \right\},$$

$$\text{где} \quad \frac{A(z_{\gamma})}{z_{\gamma}} = \int d\Omega(\mathbf{n}) e^{z_{\gamma}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})} Y_l^m(\mathbf{n}). \tag{31}$$

Из разложения (2) и ортономированности шаровых функций находим:

$$\frac{A(z_{\gamma})}{z_{\gamma}} = 2\pi Y_l^m(\mathbf{v}) \left[\frac{\chi_l(-z_{\gamma}) - (-1)^l \chi_l(z_{\gamma})}{z_{\gamma}} \right]. \tag{32}$$

Иной способ вычисления вклада $<3>$ в бесспиновом случае [9] позволяет убедиться, что $\chi_l(-z_{\gamma})$ отвечает здесь интерференции в направлении вперед с $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = 1$, а $\chi_l(z_{\gamma})$ обязана интерференции в направлении назад с $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) = -1$. Из тождеств (26) и (25), (27) заключаем тогда, что интерференция в направлении назад отсутствует во всех порядках по R^{-S}, а вклад интерференции в направлении вперед во всех порядках по R^{-S} сводится вновь к шаровой функции, возвращающей нас таким образом к амплитуде (30) уже от $\mathbf{v}$, и в итоге к левой части условия унитарности [1, 2] (со знаком минус). Т.е. согласно (32):

$$\int d\Omega(\mathbf{n}) < 3 > \mapsto -\frac{4\pi}{2i} Y_l^m(\mathbf{v}) B^{lm}_{\gamma\alpha} \longmapsto$$

$$\longmapsto -\frac{4\pi}{2i} \left[f^{+}_{\gamma\alpha}(\mathbf{q}_{\gamma}; \mathbf{k}_{\alpha}) - \overset{*}{f}{}^{+}_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}_{\alpha}; \mathbf{q}_{\gamma}) \right]. \tag{33}$$

Равенство нулю полного потока как суммы (29) и (33) дает условие унитарности [1–3] и, при $\gamma = \alpha$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\kappa}$, с учетом определений (19), (20), приводит к оптической теореме, которые таким образом применимы не только в волновой, но и в ближней зоне на конечных расстояниях от рассеивающей мишени. Явно зависящий от этого расстояния *рассеянный* без перестройки из канала $\alpha(a)$ *дифференциальный поток* определяется вкладом $<2>$ из (24) как:

$$\frac{d\Sigma_{\alpha}(R)}{d\Omega(\mathbf{n})} = \sum_{\beta(a)} \frac{1}{2ik_{\alpha}} \times \tag{34}$$

$$\times \overset{*}{f}{}^{+}_{\beta\alpha}(k_{\beta}\mathbf{n}; \mathbf{k}_{\alpha}) \left[\chi_{\overleftarrow{\Lambda}_{\mathbf{n}}}(-z_{\beta}) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_R \chi_{\overrightarrow{\Lambda}_{\mathbf{n}}}(z_{\beta}) \right] f^{+}_{\beta\alpha}(k_{\beta}\mathbf{n}; \mathbf{k}_{\alpha}),$$

и является той величиной, которая под видом суммы дифференциальных сечений (19) экспериментально измеряется на конечных расстояниях R и при достаточно больших $k_{\beta}R > 1$ на самом деле такова:

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_{\alpha}(R)}{d\Omega(\mathbf{n})} = \sum_{\beta(a)} \frac{k_{\beta}}{k_{\alpha}} \Big\{ & \Big| f_{\beta\alpha}(k_{\beta}\mathbf{n}; \mathbf{k}_{\alpha}) \Big|^2 - \\ & - \frac{1}{(k_{\beta}R)} Im \left[f^{*}_{\beta\alpha} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \right] + \\ & + \frac{1}{(2k_{\beta}R)^2} \left[\Big| \mathcal{L}_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \Big|^2 - Re \left(f^{*}_{\beta\alpha} \mathcal{L}^2_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{3(2k_{\beta}R)^3} Im \Big[f^{*}_{\beta\alpha} \mathcal{L}^3_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} - 3 \left(\mathcal{L}_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \right)^{*} \mathcal{L}^2_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} - \\ & - 2 f^{*}_{\beta\alpha} \mathcal{L}^2_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \Big] + \frac{1}{12(2k_{\beta}R)^4} \Big(3 \Big| \mathcal{L}^2_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \Big|^2 + \\ & + Re \left[f^{*}_{\beta\alpha} \mathcal{L}^4_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} - 4 \left(\mathcal{L}_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \right)^{*} \mathcal{L}^3_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \right] + \\ & + 12 \left[Re \left(f^{*}_{\beta\alpha} \mathcal{L}^2_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \right) - \Big| \mathcal{L}_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \Big|^2 \right] - \\ & - 8 Re \Big[f^{*}_{\beta\alpha} \mathcal{L}^3_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} - \left(\mathcal{L}_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \right)^{*} \mathcal{L}^2_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha} \Big] \Big) + \\ & + O\big((k_{\beta}R)^{-5} \big) \Big\}, \end{aligned} \tag{35}$$

где $f_{\beta\alpha} = f^{+}_{\beta\alpha}(k_{\beta}\mathbf{n}; \mathbf{k}_{\alpha})$, $(\mathcal{L}_{\mathbf{n}} f_{\beta\alpha})^{*} = f^{*}_{\beta\alpha} \overleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}}$, и лишь

$$\lim_{R\to\infty} \frac{d\Sigma_{\alpha}(R)}{d\Omega(\mathbf{n})} = \sum_{\beta(a)} \frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega(n)}. \tag{36}$$

В отличие от обычно используемой волновой зоны $k_{\beta}R \gg 1$, поправки к первому слагаемому в (35) станут заметны задолго до перехода к ближней зоне, где $k_\beta R \ll 1$, например, вблизи порога очередного канала. В то же время при интегрировании по $d\Omega(\mathbf{n})$ все эти поправки автоматически исчезают в каждом порядке по R^{-S}, и, в соответствии с (29) и (20):

$$\Sigma_\alpha(R) \equiv \int d\Omega(\mathbf{n}) \frac{d\Sigma_\alpha(R)}{d\Omega(\mathbf{n})} = \sum_{\beta(a)} \sigma_{\beta\alpha}. \qquad (37)$$

Согласно [9], асимптотический характер разложения (22) делает (35) применимым уже к взаимодействиям, убывающим в (16) как $r^{-\mathrm{N}}$ при $\mathrm{N} \geqslant 7$. Из [10] следует, что при $k_\beta/k_\alpha \mapsto \upsilon_\beta/\upsilon_\alpha$ выражение (35) остается в силе и с учетом $\propto \left(\mathbf{P}_a^2\right)^2$ релятивистской поправки к оператору кинетической энергии в (9).

Для столкновений с перестройкой по тем же причинам [2] из пункта 2 в (24) остается только вклад рассеянных дифференциальных потоков вида <2>, т.е. вида (34), где в (35) $k_\beta/k_\alpha \mapsto \upsilon_\beta/\upsilon_\alpha$ при нормировке амплитуды рассеяния $f^{+}_{\beta(b)\alpha(a)}(k_{\beta(b)}\boldsymbol{\nu};\mathbf{k}_{\alpha(a)})$ как коэффициента при расходящейся сферической волне в волновой функции $\Psi(\mathbf{R}) = \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{\mathcal{R}})$ (10), (6) при $\mathcal{R} \to \infty$ [1, 2, 12]. Напомним, что определение сечения неупругого рассеяния требует перестройки асимптотики $\Psi(\mathbf{R})$ уже в одноканальной задаче [3].

Подстановка (30) в (34) приводит к соответствующему парциальному разложению для рассеянного дифференциального потока, при $z_\beta = -ik_\beta R$:

$$\frac{d\Sigma_\alpha(R)}{d\Omega(\mathbf{n})} = \sum_{\beta(a)} \frac{k_\beta}{k_\alpha} \sum_{l,j=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{\mu=-j}^{j} \overset{*}{Y}{}_l^m(\mathbf{n}) Y_j^\mu(\mathbf{n}) \times \qquad (38)$$
$$\times \overset{*}{B}{}^{lm}_{\beta\alpha}(k_\beta;k_\alpha;\boldsymbol{\kappa}) B^{j\mu}_{\beta\alpha}(k_\beta;k_\alpha;\boldsymbol{\kappa}) \frac{1}{2}\Big[\chi_j(z_\beta) \overleftrightarrow{\partial}_{z_\beta} \chi_l(-z_\beta)\Big],$$

согласованному, разумеется, с (37), с учетом (27) и ортонормированности $Y_l^m(\mathbf{n})$. Соответствующий эквивалент формулы (35) получается подстановкой сюда аналогичного [9] разложения для Вронскиана:

$$\frac{1}{2}\Big[\chi_j(z_\beta) \overleftrightarrow{\partial}_{z_\beta} \chi_l(-z_\beta)\Big] = 1 + \frac{\Delta_{jl}}{2} \int_{z_\beta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \chi_l(-\zeta)\chi_j(\zeta) =$$
$$= 1 + \Delta_{jl} \sum_{n=0}^{l+j} \frac{A_n(l,j)}{(n+1)(2z_\beta)^{n+1}}, \qquad (39)$$

взятого с нужной точностью по степеням R^{-S}, при

$$\Delta_{jl} = j(j+1) - l(l+1), \quad \Upsilon_{jl} = j(j+1) + l(l+1),$$
$$\frac{1}{2}\Big[\chi_j(z_\beta) \overleftrightarrow{\partial}_{z_\beta} \chi_l(-z_\beta)\Big] = 1 + \frac{\Delta_{jl}}{2z_\beta} + \frac{\Delta_{jl}^2}{2(2z_\beta)^2} + \qquad (40)$$
$$+ \frac{\Delta_{jl}}{3(2z_\beta)^3}\left[\frac{\Delta_{jl}^2}{2} - \Upsilon_{jl}\right] + \frac{\Delta_{jl}^2}{3(2z_\beta)^4}\left[\frac{\Delta_{jl}^2}{8} - \Upsilon_{jl} + \frac{3}{2}\right].$$

Вычисление коэффициентов $A_n(l,j)$ демонстрирует их чрезвычайно резкое изменение при сдвигах на 1 любого из целочисленных параметров $n, l, j > 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -12 & 60 & -120 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 36 & 0 & -240 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 96 & 0 & -1.44\times10^3 & 0 \\ 1 & 0 & -24 & 0 & 720 & 0 & -1.44\times10^4 \end{pmatrix}.$$

Рис. 1. Значения $A_n(l,j)$ из (39) при $l = 3$ для $0 \leqslant j \leqslant 3$ по вертикали и $0 \leqslant n \leqslant l+j$ по горизонтали. $A_0(l,j) = 1$

Заключение. В данной работе, на основе операторного разложения (1) свободной функции Грина, для широкого класса быстроубывающих взаимодействий построено точное асимптотическое разложение (21), (22) волновых функций задачи многоканального рассеяния частиц с произвольным спином, чьи коэффициенты разложения задаются только физической амплитудой рассеяния (18). Полученное разложение позволило подтвердить применимость условия унитарности (29), (33) и оптической теоремы не только в волновой, но и в ближней зоне, где на конечных расстояниях R роль дифференциального сечения рассеяния (19), (36) берет на себя явно зависящий от R рассеянный дифференциальный поток (34), (38), который при достаточно больших $k_\beta R > 1$ можно представить первыми членами разложения вида (35) или (38), (40).

Это обстоятельство позволяет надеяться на то, что использование этих соотношений для обработки результатов экспериментов по рассеянию с достаточно короткой и изменяемой базой R сможет не только дать дополнительную информацию о соответствующих взаимодействиях [6], но позволит оценить и более тонкие квантовые эффекты [10].

Авторы благодарны В. А. Наумову, Д. В. Наумову, М. В. Полякову, Н. В. Ильину и А. Э. Растегину за полезные обсуждения.

1. Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, М. (1969).
2. J. R. Taylor, *Scattering Theory*, J. Wiley & Sons Inc. N.Y. (1972).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, М. (1974), т. 3.
4. G. Mention, M. Fechner, Th. Lasserre, Th. A. Mueller, D. Lhuillier, M. Cribier, and A. Letourneau, Phys. Rev. D **83**, 073006 (2011); arXiv: 1101.2755 [hep-ex].
5. D. V. Naumov, V. A. Naumov, and D. S. Shkirmanov, ЭЧАЯ **47**(6), 1884 (2016); arXiv: 1507.04573 [hep-ph].
6. S. E. Korenblit and D. V. Taychenachev, Mod. Phys. Lett. A **30**(14), 1550074 (2015); arXiv: 1401.4031v4 [math-ph].

7. V. G. Baryshevskii, I. D. Feranchuk, and P. B. Kats, Phys. Rev. A **70**, 052701 (2004).
8. I. D. Feranchuk and O. D. Skoromnik, Phys. Rev. A **82**, 052703 (2010).
9. S. E. Korenblit and A. V. Sinitskaya, Mod. Phys. Let. A **32**, 1750066 (2017).
10. M. Faizal, S. E. Korenblit, A. V. Sinitskaya, and S. Upadhyay, Phys. Lett. B **794**, 1 (2019).
11. I. S. Gradshteyn and I. M. Rizhik, *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*, 7-th edition, Acad. Press, San Diego (2007).
12. В. П. Жигунов, Б. Н. Захарьев, *Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния*, Атомиздат, М. (1974).