Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 6, стр. 343 – 346 *25 марта 1989 г.*

БЕСЩЕЛЕВЫЕ ФЕРМИОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ВИХРЯХ В СВЕРХТЕКУЧИХ ЖИДКОСТЯХ И СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Г.Е.Воловик

Квантованный вихрь в сверхтекучих и сверхпроводящих ферми-системах обладает бесщелевыми фермионными возбуждениями, локализованными в коре вихря. Число ветвей бесщелевых возбуждений – фермионных нулевых мод – варьируется от нуля до $\epsilon_F/\Delta \gg 1$ в зависимости от структуры кора вихря.

В сверхтекучей ферми-жидкости и в сверхпроводнике имеются низколежащие фермионные возбуждения, локализованные в корах квантованных вихрей [1]. В традиционных сверхпроводниках с s-спариванием возбуждения, локализованные вблизи оси вихря, где фаза параметра порядка имеет особенность, а его модуль обращается в нуль, имеют энергетическую щель $\sim \Delta^2/\epsilon_F$, малую по сравнению со щелью Δ у нелокализованных фермионов. Поэтому эти возбуждения играют определяющую роль в термодинамике и кинетике системы при низких температурах (см. обзор [2]).

В современных теориях поля также обсуждаются вихри (стринги) с локализованными в их корах фермионами (см., например, [3]). Существенно, что в большинстве моделей одно или несколько возбуждений являются так называемыми нулевыми модами, то есть не обладают щелью, причем число фермионных нулевых мод в этих моделях связано посредством теоремы об индексе с топологическим зарядом вихря, то есть с набегом фазы при обходе вокруг оси вихря.

Поскольку при достаточно низких температурах $T \ll \Delta^2/\epsilon_F$ наличие или отсутствие щели у локализованных фермионов приводит к различному поведению системы, нужно выяснить условия появления бесщелевых фермионов. Здесь мы покажем, что в системах с куперовским спариванием необходимым условием появления нулевых мод является расплывание сингулярности фазы на оси вихря. Подобное расплывание имеет место в вихрях в сверхтекучем ^{3}He-B, где вихрь с сингулярностью на оси (о-вихрь) неустойчив по отношению к образованию v-вихря с нарушенной четностью, в котором сингулярность на оси отсутствует и параметр порядка нигде не обращается в нуль (см. обзор [4]), а также в двухквантовых вихрях Абрикосова в обычных сверхпроводниках [5]. Несингулярные вихри отличаются от сингулярных поведением квазиклассического спектра фермионов $E(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \sqrt{\epsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta(\mathbf{k},\mathbf{r})|^2}$. В сингулярном вихре энергия $E(\mathbf{k},\mathbf{r})$ обращается в нуль на оси вихря ($r=0$) на всей ферми-поверхности ($|\mathbf{k}| = k_F$), в то время как в несингулярном вихре для каждой точки $\mathbf{r}$ внутри определенного радиуса r_0 энергия обращается в нуль в четырех точках $\mathbf{k} = \mathbf{k}^a(\mathbf{r})$, $a = (1-4)$ на ферми-поверхности. Это исключительные, так называемые дьявольские точки спектра [6], которые неустранимы в силу сохранения топологического инварианта; они известны также под названием "буджумы на ферми-поверхности" [7].

Оказывается, что число нулевых мод на вихрях в системах с куперовским спариванием зависит не от топологического заряда вихря, а от пространственного распределения $\mathbf{k}^a(\mathbf{r})$, нулей в квазиклассическом спектре фермионов, и при одном и том же набеге фазы может варьироваться от нуля до ϵ_F/Δ.

Число ветвей бесщелевых боголюбовских возбуждений определяется индексом $N(k_z)$ оператора Боголюбова, как функцией сохраняющегося квантового числа – импульса k_z вдоль оси вихря. Целочисленный индекс $N(k_z)$ определяет полуразность числа отрицательных и положительных уровней энергии фермионов при данном k_z, поэтому изменение N на единицу при некотором k_z означает, что при этом k_z уровень энергии прошел через нуль.

Индекс N можно выразить через функцию Грина $\hat{G} = (i\omega - \hat{H})^{-1}$:

$$N(k_z) = \mathrm{Tr}\int \frac{d\omega}{2\pi}\hat{G} = -\,\mathrm{Tr}\int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{\hat{H}}{\omega^2 + \hat{H}^2} = -\frac{1}{2}\sum_n \mathrm{sign}\,E_n(k_z), \tag{1}$$

где Tr означает суммирование по всем состояниям гамильтониана Боголюбова $\hat{H}$, имеющим заданное k_z. Поскольку размер кора вихря имеет порядок длины когерентности $\xi \sim \frac{v_F}{\Delta} \gg k_F^{-1}$, можно воспользоваться градиентным разложением для функции Грина (см. [7])

$$N(k_z) = \frac{1}{2}\int \frac{d^2k_\perp d^2r}{(2\pi)^2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\Phi\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}n - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}n\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\Phi\right) = \frac{1}{2}\int \frac{d^2k_\perp d^2r}{(2\pi)^2}n\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\Phi, \tag{2}$$

где $n(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\epsilon(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k},\mathbf{r})}$ и $\Phi(\mathbf{k},\mathbf{r})$ соответственно плотность частиц и фаза детерминанта спиновой матрицы параметра порядка в квазиклассическом приближении; второе равенство в (2) получено интегрированием по частям. Таким образом $N(k_z)$ может быть отличным от нуля, если есть неустранимые особенности в $\Phi(\mathbf{k},\mathbf{r})$, то есть дьявольские точки $\mathbf{k}^a(\mathbf{r})$ в квазиклассическом спектре. Согласно [7] разность смешанных производных следующим образом выражается через распределение буджумов:

$$n\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\Phi = 2\pi\sum_a N^a\mathbf{k}^a\,\mathrm{rot}\,\mathbf{k}^a\int_0^1 du\,u\,\delta(\mathbf{k} - u\mathbf{k}^a(\mathbf{r})), \tag{3}$$

в результате для спектральной асимметрии имеем следующее выражение:

$$N(k_z) = -\frac{1}{4\pi}k_z\sum_a N^a\int d^2r\,k_z^a\,|k_z^a|^{-3}(\mathbf{k}^a\,\mathrm{rot}\,\mathbf{k}^a)\,\theta\left(\frac{k_z^a(r)}{k_z} - 1\right), \tag{4}$$

где N^a – целочисленный топологический заряд a-ой дьявольской точки.

В случае ^{3}He-A, где две сдвоенные дьявольские точки имеются даже в однородном состоянии и выражаются через единичный орбитальный вектор $\mathbf{l}$ ($\mathbf{k}^1 = k_F\mathbf{l}$, $\mathbf{k}^2 = -k_F\mathbf{l}$, $N^1 = -N^2 = 2$), спектральная асимметрия имеет вид

$$N(k_z) = -\frac{k_z}{\pi}\int d^2r\,l_z\,|l_z|^{-3}\,\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}\,\theta(k_F^2 l_z^2 - k_z^2). \tag{5}$$

В результате индекс $N(k_z)$ отличен от нуля только у таких несингулярных вихрей в ^{3}He-A, которые обладают текстурой кручения, то есть $\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l} \neq 0$. Это так называемые ω-вихри с нарушенной четностью, $\mathbf{l}$-текстура которых имеет вид $\mathbf{l}(r) = \hat{z}\cos\eta(r) + \hat{\varphi}\sin\eta(r)$, где z, r, φ – цилиндрические координаты и $\eta(0) = 0$, $\eta(\infty) = \pi$. Именно такие вихри обладают наименьшей энергией [4]. Качественная зависимость $N(k_z)$ для ω-вихря показана на рисунке. При $|k_z| > k_F$ индекс $N(k_z) = 0$, то есть число положительных и отрицательных уровней одинаково. При $|k_z| < k_F$ возникает асимметрия уровней, то есть часть ветвей $E_n(k_z)$ пересекает нуль. Число нулевых мод в вихре соответствует максимальному $N_{max} \sim k_F R$, где R – радиус кора вихря – характерный масштаб изменения текстуры $\mathbf{l}$. Итак имеется $\sim k_F R$ одномерных фермионов, движущихся вдоль оси вихря и имеющих нуль-мерные ферми-поверхности – точки пересечения спектра $E_n(k_z)$ с нулем. Нескомпенсированный импульс k_z этих фермионов под нуль-мерными ферми-поверхностями (пунктирная часть спектра $E_n(k_z)$ на рис. *б*) приводит к спонтанному массовому току вдоль оси ω-вихря

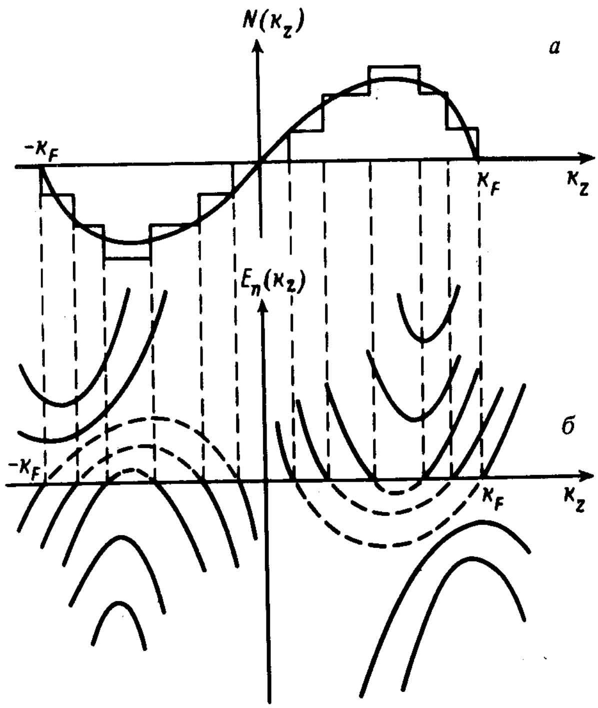
$$j_z = \frac{1}{2}\int \frac{dk_z}{2\pi}k_z N(k_z) = -\frac{k_F^3}{6\pi^2}\int d^2r(\mathbf{l}\hat{z})(\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}), \tag{6}$$

что соответствует аномальному текстурному току [8].

Дьявольские точки возникают и в коре вихря в ^{3}He-B. Вихри в ^{3}He-B принадлежат v-типу [4], для которого характерно отсутствие массового тока вдоль оси, но имеется спонтанный поток спина. Индекс $N(k_z)$, определенный в (1), обращается в нуль в силу той же симметрии, что зануляет и массовый ток. Однако в этом случае это не означает отсутствия нулевых мод. Дело в том, что индекс $N(k_z)$ не чувствителен к спину частиц и не меняется если одновременно, но в разных направлениях, пересекают нуль ветви $E_{n\uparrow}$ и $E_{n\downarrow}$ частиц с противоположным спином. Для того, чтобы уловить нулевые моды и в этом случае, нужно ввести индексы $N_\uparrow(k_z)$ и $N_\downarrow(k_z)$ как это сделано в [9]. Хотя проекция спина возбуждений в ^{3}He-B и не сохраняется, тем не менее вычисление величины $N_\uparrow(k_z) = \mathrm{Tr}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{1+\sigma_z}{2}\,\hat{G}$ приводит к правильной оценке числа нулевых мод $k_F R \sim \epsilon_F/\Delta$, где учтено, что радиус кора вихря в ^{3}He-B имеет порядок ξ. Нескомпенсированные импульсы и спины нулевых мод приводят к спонтанному спиновому току вдоль оси вихря v-типа

$$j_z^z = \frac{\hbar}{2}\,\frac{1}{2}\int \frac{dk_z}{2\pi}\,k_z(N_\uparrow(k_z) - N_\downarrow(k_z)) - \tag{7}$$

при отсутствии массового тока.



Качественное поведение функции асимметрии спектра $N(k_z) = -\frac{1}{2}\sum_n \mathrm{sign}\,E_n(k_z)$ и ветвей $E_n(k_z)$ одномерного спектра фермионов локализованных в коре квантованного вихря с размытой сингулярностью. Тонкая ступенчатая линия на рис. *а* отражает тот факт, что $N(k_z)$ принимает целочисленные значения, а жирная линия соответствует огибающей, полученной приближенным методом градиентного разложения. При тех импульсах k_z, где $N(k_z)$ испытывает скачок, одна из ветвей $E_n(k_z)$ на рис. *б* пересекает нуль энергии. Пунктирными линиями на рис. *б* обозначены те участки спектра, которые обладают нескомпенсированным импульсом k_z, приводя к спонтанному потоку массы (или спина) вдоль оси вихря

Итак в отличие от обычных сингулярных вихрей вихри с размытой сингулярностью могут обладать бесщелевыми фермионными возбуждениями. В отличие от теоретико-полевых моделей фермионов на стрингах число фермионных нулевых мод (число "поколений") на вихрях в конденсированных средах не определяется топологическим зарядом вихря, а имеет порядок $k_F R$, где R – размер области внутри кора, в которой возникают дьявольские точки в квазиклассическом спектре $E(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, образующиеся в результате размытия сингулярности на оси вихря. Число поколений фермионов – дополнительная характеристика вихрей, обладающих одинаковым набегом фазы и одинаковой симметрией. Переходы между вихрями с различным числом нулевых мод представляет собой аналог переходов Лифшица при $T = 0$, при которых у одномерных фермионов, локализованных на вихрях, образуется или исчезает нуль-мерная ферми-поверхность.

Отметим, что размытие сингулярности у вихрей происходит не только в системах с многокомпонентным параметром порядка, таких как ^{3}He и возможно тяжелофермионные сверхпроводники. Сингулярности размываются также в двухквантовом вихре Абрикосова в обычном сверхпроводнике [5] и в меньшей степени в одноквантовом [10]. Поэтому не исключено появление нулевых мод и в обычном сверхпроводнике. Число этих мод может варьироваться от нуля до ϵ_F/Δ.

Литература

1. *Caroli C., de Gennes P.G., Matricon J.* Phys. Lett., 1964, 9, 307.
2. *Горьков Л.П., Копнин Н.Б.* УФН, 1975, 116, 413.
3. *Witten E.* Nucl. Phys. B, 1985, 249, 557.
4. *Salomaa M.M., Volovik G.E.* Rev. Mod. Phys., 1987, 59, 533.
5. *Volovik G.E.* J. Phys. C, 1988, 21, L221.
6. *Grinevich P.G., Volovik G.E.* J. Low Temp. Phys., 1988, 72, 371.
7. *Воловик Г.Е., Минеев В.П* ЖЭТФ, 1982, 83, 1025.
8. *Балацкий А.В., Воловик Г.Е., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1986, 90, 2038.
9. *Балацкий А.В.* Письма в ЖЭТФ, 1988, 47, 647.
10. *Salomaa M.M., Volovik G.E.* J. Phys.: Cond. Matt., 1989, 1, 277.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3 февраля 1989 г.