

Вклады высших порядков в амплитуды КХД в реджевской кинематике (Миниобзор)

В. С. Фадин¹⁾

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 2019 г.

После переработки 13 ноября 2019 г.

Принята к публикации 14 ноября 2019 г.

Знаменитое уравнение Балицкого–Фадына–Кураева–Липатова (БФКЛ) было получено с использованием гипотезы о том, что амплитуды неабелевых калибровочных теорий с присоединенным представлением калибровочной группы в кросс-каналах даются вкладом реджезованного калибровочного бозона. Гипотеза верна в главном логарифмическом приближении, в котором уравнение было первоначально выведено, и в следующем за ним. Но в следующем за следующим приближении это не так, поскольку в этом приближении начинают вносить свой вклад реджевские разрезы. Обсуждаются вычисления их вклада в амплитуды упругого рассеяния в квантовой хромодинамике и их роль в выводе уравнения БФКЛ.

DOI: 10.31857/S0370274X20010014

1. Введение. Одно из фундаментальных уравнений квантовой хромодинамики (КХД), уравнение Балицкого–Фадына–Кураева–Липатова (БФКЛ) [1–4], основано на замечательном свойстве КХД – реджезации глюона. КХД оказалась уникальной теорией поля, в которой реджезуются все элементарные частицы – и кварк, и глюон [5–9].

Реджезация элементарных частиц очень важна для теоретического описания высокоэнергетических процессов. Реджезация глюона особенно важна, поскольку она определяет поведение при высоких энергиях неубывающих с энергией сечений в возмущенной КХД.

В главном логарифмическом приближении (ГЛП), когда в каждом порядке теории возмущений сохраняются только члены с высшими степенями логарифма энергии в системе центра инерции (с.ц.и.) \sqrt{s} , и в следующем за главным (СГЛП), где удерживаются члены с меньшими на единицу, чем главные, степенями $\ln s$, реджезация глюона означает, что амплитуды с присоединенным представлением цветовой группы в кросс-каналах и отрицательной сигнатурой (симметрией относительно замены $s \leftrightarrow u \simeq -s$) определяются вкладами глюонного полюса Редже и имеют простую факторизованную форму (полюсную реджевскую форму).

Это относится не только к упругим амплитудам, но и к амплитудам в мульти-реджевской кинематике (МРК), в которой все частицы имеют фиксированные (не растущие с s) поперечные импульсы и объединяются в струи с ограниченной инвариантной массой каждой струи и большими (растущими с s) инвариантными массами любой пары струй. Реджезация глюона позволяет выразить бесконечное число таких амплитуд через несколько реджевских вершин и траекторию реджезованного глюона. Поскольку они дают доминирующий вклад в скачки амплитуд с фиксированной передачей импульса в соотношениях унитарности, это обеспечивает простой вывод уравнения БФКЛ не только в ГЛП, но также и в СГЛП.

Полюсная реджевская форма доказана во всех порядках теории возмущений как в ГЛП [10], так и в СГЛП (см. [11, 12] и ссылки в них).

Однако эта форма нарушается в ССГЛП. Впервые нарушение полюсной формы было обнаружено в [13] при рассмотрении высоко-энергетического предела двухпетлевых амплитудах gg , gq и qq рассеяния. Позднее инфракрасно сингулярные члены, нарушающие полюсную форму, были найдены в трех петлях с использованием метода инфракрасной факторизации [14–16].

Нарушение полюсной реджевской формы следовало ожидать, потому что хорошо известно, что по-

¹⁾e-mail: fadin@inp.nsk.su

люса Редже в плоскости комплексных угловых моментов порождают реджевские разрезы. Более того, в амплитудах с положительной сигнатурой реджевские разрезы появляются уже в ГЛП. В частности, БФКЛ померон является двух-режеонным разрезом. Но в амплитудах с отрицательной сигнатурой реджевские разрезы должны быть, по крайней мере, трех-режеонными и могут появляться только в ССГЛП. Поэтому было естественно ожидать, что наблюдаемое нарушение связано с вкладом разрезов.

Первое объяснение наблюдаемого нарушения было дано в [17], где было показано, что члены, нарушающие полюсную реджевскую форму, могут идти от вкладов трех-режеонного разреза. Но почти в то же самое время было дано другое объяснение [18], где вклад разреза отличается от [17] (см. также [19, 20]), и помимо разреза используется смешивание разреза и полюса.

Здесь мы представляем результаты расчета членов, нарушающих полюсную форму, и их объяснение в обоих подходах.

2. Полюсная реджевская форма амплитуд КХД и ее нарушение. Для процессов упругого рассеяния $A + B \rightarrow A' + B'$ в реджевской кинематике ($s \simeq -u \rightarrow \infty$, t фиксировано (не растет с s)) реджезация означает, что амплитуды рассеяния с квантовыми числами глюонов в t -канале и отрицательной сигнатурой записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AB}^{A'B'} &= \mathcal{A}_{AB}^R(s, t) = \\ &= \Gamma_{A'A}^c \left[\left(\frac{-s}{-t} \right)^{j(t)} - \left(\frac{s}{-t} \right)^{j(t)} \right] \Gamma_{B'B}^c, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Gamma_{P'P}^c$ – вершины частица-частица-реджеон (ЧЧР), или вершины рассеяния, “ c ” – цветовые индексы реджеона; $j(t) = 1 + \omega(t)$ – траектория реджеона.

Важным свойством полюсов Редже является факторизация их вкладов

$$\mathcal{A}_{gg}^{g'g'} \mathcal{A}_{qq}^{q'q'} = \left(\mathcal{A}_{qq}^{g'q'} \right)^2, \quad (2)$$

являющейся следствием того, что три амплитуды выражаются через две вершины ЧЧР.

Впервые нарушение полюсной реджевской формы было обнаружено в [13] при сравнении двухпетлевых амплитуд рассеяния gg, gq и qq в пределе высоких энергий. Низшие члены ССГЛП – это нелогаarifмические двухпетлевые члены. В [13] было обнаружено, что ограничения, накладываемые на них условием факторизации (2), не выполняются.

Рассмотрение нарушения полюсной реджевской формы в трех петлях было выполнено только для

инфракрасно сингулярных членов с использованием методов инфракрасной факторизации в работах [14–16]. В этих работах было подтверждено нарушение двухпетлевыми нелогаarifмическими членами и были найдены инфракрасно сингулярные одно-логarifмические члены, нарушающие полюсную форму, в трех петлях.

Для сравнения реджевской и инфракрасной факторизаций была введена функция нефакторизирующегося остатка, и амплитуды рассеяния с присоединенным представлением цветовой группы в t -канале и отрицательной сигнатурой были записаны в виде

$$\mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = \mathcal{A}_{AB}^R(s, t) + \Gamma_{A'A}^{(0)c} \frac{s}{t} \Gamma_{B'B}^{(0)c} \mathcal{R}_{AB}, \quad (3)$$

где $\mathcal{A}_{AB}^R(s, t)$ определена в (1), верхний индекс (0) обозначает низший порядок, а \mathcal{R}_{AB} представляет нефакторизирующийся остаток. С трехпетлевой точностью этот остаток можно представить в ССГЛП как

$$\mathcal{R}_{AB} = \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \left[R_{AB}^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) R_{AB}^{(1)} \ln s \right]. \quad (4)$$

Для двухпетлевого вклада с использованием [13] имеем:

$$R_{qq}^{(0)} = \frac{\pi^2}{4\epsilon^2} \left(1 - \frac{3}{N_c^2} \right) \left(1 - \epsilon^2 \zeta(2) \right), \quad (5)$$

$$R_{gg}^{(0)} = -\frac{3\pi^2}{2\epsilon^2} \left(1 - \epsilon^2 \zeta(2) \right), \quad (6)$$

$$R_{qq}^{(0)} = -\frac{\pi^2}{4\epsilon^2} \left(1 - \epsilon^2 \zeta(2) \right), \quad (7)$$

где $\epsilon = (D - 4)/2$, D – размерность пространства-времени. В $R_{AB}^{(0)}$ опущены только члены, исчезающие при $\epsilon \rightarrow 0$. Значения $R_{AB}^{(1)}$ были получены с использованием инфракрасной факторизации, так что члены нулевого порядка по ϵ также опущены:

$$R_{qq}^{(1)} = -\left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 \frac{\pi^2}{\epsilon^3} \frac{2N_c^2 - 5}{12N_c} \left(1 - \frac{3}{2}\epsilon^2 \zeta(2) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0), \quad (8)$$

$$R_{gg}^{(1)} = \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 \frac{\pi^2}{\epsilon^3} \frac{2}{3} N_c \left(1 - \frac{3}{2}\epsilon^2 \zeta(2) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0), \quad (9)$$

$$R_{qq}^{(1)} = \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 \frac{\pi^2}{\epsilon^3} \frac{N_c}{24} \left(1 - \frac{3}{2}\epsilon^2 \zeta(2) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0). \quad (10)$$

Надо сказать, что трехпетлевые результаты (8)–(10) были получены с использованием так называемой дипольной формы [21–25] матрицы инфракрасных аномальных размерностей. Оказывается, эта форма верна только до двух петель. Недавно была вычислена квадрупольная поправка, появляющаяся в трех

петлях [24]. Однако в ССГЛП эта поправка оказывается существенна только для амплитуд с положительной сигнатурой [18], так что она не меняет результаты (8)–(10).

3. Вклады реджевских разрезов. Ненулевая функция остатка \mathcal{R}_{AB} была объяснена с помощью трех-реджеонных разрезов в двух работах [17, 18]. Это можно было бы считать хорошей новостью, если бы объяснения были одинаковыми. К сожалению, это не так. Различия в объяснениях начинаются с используемых подходов. Подход, используемый в [17] (см. также [19, 20]), можно назвать диаграммным, поскольку он исходит из диаграмм Фейнмана. Напротив, подход, использованный в [18], не имеет отношения к диаграммам Фейнмана и основан на представлении амплитуд рассеяния при высоких энергиях вильсоновскими линиями. Оба подхода объясняют нарушение полюсной формы в трех петлях, но по-разному.

3.1. Диаграммный подход.

3.1.1. Появление разреза. Из-за сохранения сигнатуры разрез с отрицательной сигнатурой должен быть трех-реджеонным. Поскольку наш реджеон является реджезованным глюоном, трех-реджеонный разрез начинается со вклада амплитуд, отвечающих диаграммам Фейнмана с тремя глюонами в t -канале, отличающимися перестановками σ глюонных вершин (σ принимает значения a, b, c, d, e, f). Амплитуды $\mathcal{A}_{AB}^{A'B'}$ можно записать в виде суммы по перестановкам σ произведений цветовых множителей и не зависящих от цвета матричных элементов:

$$\mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = (\chi_{A'}^*)_{\alpha'} (\chi_{B'}^*)_{\beta'} \times \sum_{\sigma} \left(C_{AB}^{(0)\sigma} \right)_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} (\chi_A)_{\alpha} (\chi_B)_{\beta} M_{AB}^{(0)\sigma}(s, t), \quad (11)$$

где χ обозначает цветовую часть волновых функций, α и β (α' и β') – цветовые индексы начальных (конечных) частиц A и B соответственно.

Здесь одинаковые буквы используются для цветовых индексов кварка и глюона; однако следует помнить, что для глюонов нет разницы между верхним и нижним индексами (принимающими значения от 1 до $N_c^2 - 1$), тогда как для кварков нижний и верхний индексы (принимающие значения от 1 до N_c) относятся к взаимно сопряженным представлениям.

Цветовые множители

$$\left(C_{AB}^{(0)\sigma} \right)_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = (\mathcal{T}_A^{c_1} \mathcal{T}_A^{c_2} \mathcal{T}_A^{c_3})_{\alpha}^{\alpha'} \left(\mathcal{T}_B^{c_1} \mathcal{T}_B^{c_2} \mathcal{T}_B^{c_3} \right)_{\beta}^{\beta'}, \quad (12)$$

где \mathcal{T}^a являются генераторами цветовой группы в соответствующих представлениях, $[\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b] = if_{abc} \mathcal{T}^c$

для всех представлений, $(\mathcal{T}^a)^b_c = -if_{abc}$ для глюонов, $(\mathcal{T}^a)_{\alpha}^{\alpha'} = (t^a)_{\alpha}^{\alpha'}$ для кварков; $\text{Tr}(\mathcal{T}_P^a \mathcal{T}_P^b) = T_P \delta_{ab}$, $T_q = 1/2$, $T_g = N_c$. Цветовые множители можно разложить по неприводимым представлениям \mathbf{R} цветовой группы в t -канале:

$$\left(C_{AB}^{(0)\sigma} \right)_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \sum_{\mathbf{R}} [\mathcal{P}_{AB}^{\mathbf{R}}]_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} \mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}, \quad (13)$$

где

$$[\mathcal{P}_{AB}^{\mathbf{R}}]_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \sum_n [\mathcal{P}_A^{\mathbf{R},n}]_{\alpha}^{\alpha'} [\mathcal{P}_B^{\mathbf{R},n*}]_{\beta}^{\beta'}, \quad (14)$$

$\hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{R},n}$ является волновой функцией состояния n в представлении \mathbf{R} в пространстве цветовых индексов с нормировкой

$$[\mathcal{P}_P^{\mathbf{R},n}]_{\alpha}^{\alpha'} [\mathcal{P}_P^{\mathbf{R},n'*}]_{\beta}^{\beta'} = T_P \delta_{\mathbf{R},\mathbf{R}'} \delta_{n,n'}, \quad (15)$$

так что

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma} = \frac{1}{N_{\mathbf{R}} T_A T_B} (\mathcal{T}_A^{c_1} \mathcal{T}_A^{c_2} \mathcal{T}_A^{c_3})_{\alpha}^{\alpha'} \times \left(\mathcal{T}_B^{c_1} \mathcal{T}_B^{c_2} \mathcal{T}_B^{c_3} \right)_{\beta}^{\beta'} [\mathcal{P}_{AB}^{\mathbf{R}*}]_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}, \quad (16)$$

$N_{\mathbf{R}}$ – размерность представления \mathbf{R} .

В отличие от реджеона, который вносит вклад только в амплитуды с присоединенным представлением цветовой группы (цветовой октет в КХД) в t -канале, разрез может вносить вклад в амплитуды с различными представлениями.

Возможными представлениями для кварк-кваркового и кварк-глюонного рассеяния являются только синглет (**1**) и октет (**8**), тогда как для глюон-глюонного рассеяния существуют синглет (**1**), симметричный **8_s** и антисимметричный **8_a** октеты, **10**, **10*** и **27**. Учет бозе-статистики глюонов и симметрии представлений **1**, **8_s** и **27** дает, что возможными представлениями в амплитудах с отрицательной сигнатурой являются **8_a**, **10** и **10*** для глюон-глюонного рассеяния, **1** и **8** для кварк-кваркового рассеяния и только **8** для кварк-глюонного рассеяния. Имеет смысл сказать, что при $N_c > 3$ ситуация существенно не меняется, поскольку появляется только дополнительное симметричное представление для двухглюонной системы.

Важным является само существование в амплитудах с отрицательной сигнатурой представлений цветовой группы, отличных от присоединенного, что означает существование особенностей, отличных от полюса Редже, в плоскости комплексных моментов импульса.

Операторы проектирования для октетного представления (далее опускаем индекс a в **8_a**):

$$[\mathcal{P}_{gg}^{\mathbf{8}}]_{a'b'}^{ab} = -f_{aac} f_{bb'c} \quad (17)$$

для глюон-глюонного рассеяния,

$$[\mathcal{P}_{gg}^{\mathbf{8}}]_{a\beta}^{\alpha'\beta'} = -if_{aa'}^c(t^c)_{\beta}^{\beta'} \quad (18)$$

для глюон-кваркового рассеяния, и

$$[\mathcal{P}_{qq}^{\mathbf{8}}]_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = (t^c)_{\alpha}^{\alpha'}(t^c)_{\beta}^{\beta'} \quad (19)$$

для кварк-кваркового рассеяния.

Каналы $\mathbf{10}$ и $\mathbf{10}^*$ существуют только для глюон-глюонного рассеяния. Операторы проектирования

$$[\mathcal{P}_{gg}^{\mathbf{10}}]_{a'b''}^{ab} = \frac{N_c}{4} \left(\delta_{ab}\delta_{a'b''} - \delta_{ab'}\delta_{a'b} - \right. \\ \left. - 2\frac{f_{aa'c}f_{bb'c}}{N_c} + if_{ba'c}d_{b'ac} + id_{ba'c}f_{b'ac} \right), \quad (20)$$

$$[\mathcal{P}_{gg}^{\mathbf{10}^*}]_{a'b''}^{ab} = \left([\mathcal{P}_{gg}^{\mathbf{10}}]_{a'b''}^{ab} \right)^*. \quad (21)$$

И, наконец, канал $\mathbf{1}$ в отрицательной сигнатуре существует только для кварк-кваркового рассеяния; оператор проектирования

$$[\mathcal{P}_{qq}^{\mathbf{1}}]_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \frac{1}{2N_c} \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'}. \quad (22)$$

Для представлений \mathbf{R} , отличных от присоединенного, цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}$ не зависят от σ ; они равны

$$\mathcal{G}(\mathbf{10} + \mathbf{10}^*)_{gg}^{(0)\sigma} = -\frac{3}{4}N_c, \quad \mathcal{G}(\mathbf{1})_{qq}^{(0)\sigma} = \frac{(N_c^2 - 4)(N_c^2 - 1)}{8N_c^2}, \quad (23)$$

для любых σ . Поэтому зависящие от импульсов множители для таких представлений суммируются в эйкональную амплитуду

$$\sum_{\sigma} M_{AB}^{(0)\sigma}(s, t) = A^{eik} = g^6 \frac{s}{t} \left(\frac{-4\pi^2}{3} \right) \mathbf{q}^2 A_2(q_{\perp}), \quad (24)$$

где

$$A_2(q_{\perp}) = \int \frac{d^{2+2\epsilon}l_1 d^{2+2\epsilon}l_2}{(2\pi)^{2(3+2\epsilon)} \mathbf{1}_1^2 \mathbf{1}_2^2 (\mathbf{q} - \mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_2)^2}. \quad (25)$$

Этот результат очень важен, потому что вклад разреза должен быть калибровочно-инвариантным, тогда как $M_{AB}^{(0)\sigma}$, взятые отдельно, зависят от калибровки.

В канале реджезованного глюона цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}$ зависят от σ . Однако эта зависимость имеет специфическую форму. Пусть $\sigma = a$ ($\sigma = f$) относится к диаграмме без u - (s -) канальных разрезов. Обратим внимание, что, поскольку $M_{AB}^{(0)a}$ и $M_{AB}^{(0)f}$ связаны заменой $s \leftrightarrow u$, только сумма

$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)a} + \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)f}$ входит в амплитуды с отрицательной сигнатурой. Оказывается, что

$$\frac{1}{2} \left[\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)a} + \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)f} \right] = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)} + \frac{N_c^2}{8}, \quad (26)$$

тогда как для всех других диаграмм ($\sigma = b, c, d, e$) $\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)\sigma} = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)}$. Реджевская полюсная факторизация требует равенства

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{gg}^{(0)} + \mathcal{G}(\mathbf{8})_{qq}^{(0)} = 2\mathcal{G}(\mathbf{8})_{gg}^{(0)}. \quad (27)$$

Поскольку

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{gg}^{(0)} = \frac{3}{2}, \quad \mathcal{G}(\mathbf{8})_{gq}^{(0)} = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{G}(\mathbf{8})_{qq}^{(0)} = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{3}{N_c^2} \right), \quad (28)$$

очевидно, что полюсная факторизация нарушена.

Но видно также, что члены, нарушающие полюсную факторизацию, имеют σ -независимые цветовые коэффициенты, так что зависящие от импульсов коэффициенты для них суммируются в эйкональные амплитуды.

Однако цветовые множители (28) могут быть не полностью отнесены к вкладам разреза. В самом деле, разделение вкладов полюса и разреза невозможно в двухпетлевом приближении из-за неоднозначности выделения части амплитуд, нарушающих факторизацию: всегда можно записать

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)} = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)\text{cut}} + \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)\text{pole}},$$

с $\mathcal{G}(\mathbf{8}_a)_{AB}^{(0)\text{pole}}$, удовлетворяющими условию факторизации, но в остальном произвольными.

3.1.2. Три петли. Разделение становится возможным в более высоких петлях, из-за различной энергетической зависимости вкладов полюса и разреза. Энергетическая зависимость вклада полюса определяется (помимо множителя s) фактором Редже $\exp(\omega(t) \ln s)$, где $1 + \omega(t)$ – траектория глюона,

$$\omega(t) = -g^2 N_c \mathbf{q}^2 \int \frac{d^{2+2\epsilon}l}{2(2\pi)^{(3+2\epsilon)} \mathbf{l}^2 (\mathbf{q} - \mathbf{l})^2}, \quad (29)$$

в то время как для разреза с тремя реджеонами это $\exp(\hat{\mathcal{K}} \ln s)$, где

$$\hat{\mathcal{K}} = \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\mathcal{K}}_r(1, 2) + \hat{\mathcal{K}}_r(1, 3) + \hat{\mathcal{K}}_r(2, 3), \quad (30)$$

$\hat{\omega}_i$ обозначает траекторию i -го реджеона, а $\hat{\mathcal{K}}_r(m, n)$ – реальная часть ядра БФКЛ, описывающая взаимодействие между реджеонами m и n . Явная форма реальной части ядра, описывающая взаимодействие между двумя реджеонами с поперечными импульсами \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 и цветовыми индексами c_1 и c_2

$$[\mathcal{K}_r(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{k})]_{c_1 c_2}^{c'_1 c'_2} = -T_{c_1 c'_1}^a T_{c_2 c'_2}^a \frac{g^2}{(2\pi)^{D-1}} \left[\frac{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2 + \mathbf{q}_2^2 \mathbf{q}_1^2}{\mathbf{k}^2} - \mathbf{q}^2 \right], \quad (31)$$

где $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}'_2 = \mathbf{q}$, $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}'_1 = \mathbf{q}'_2 - \mathbf{q}_2 = \mathbf{k}$.

Трехпетлевой цветовой коэффициент $\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(1)\sigma}$ просто пропорционален $\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}$. Что касается вклада траектории, то это очевидно. Это также верно для вкладов реальной части, потому что оператор $\sum_{i>j=1}^3 \hat{T}^c(i) \hat{T}^c(j)$ действует на состояние $\Psi(\mathbf{R})$, для которого, благодаря сохранению цвета,

$$\left(\sum_{i=1}^3 \hat{T}^c(i) + \hat{T}^c(\mathbf{R}) \right) \Psi(\mathbf{R}) = 0, \quad (32)$$

где $\hat{T}^c(\mathbf{R})$ – генератор цветовой группы в представлении \mathbf{R} . Это дает

$$\sum_{i>j=1}^2 \hat{T}^c(i) \hat{T}^c(j) \Psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} (C_2(\mathbf{R}) - 3C_2(\mathbf{8})) \Psi(\mathbf{R}), \quad (33)$$

где $C_2(\mathbf{R})$ – значение оператора Казимира в представлении \mathbf{R} ; $C_2(\mathbf{8}) = N_c$. Следовательно, в ССГЛП трехпетлевая поправка равна

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(\text{cut})} g^8 \frac{s}{t} \left(\frac{-4\pi^2}{3} \right) \mathbf{q}^2 \left(\left(\frac{3}{2} N_c - C_2(\mathbf{8}) \right) \times \right. \\ \left. \times A_3^b(q_\perp) - \frac{1}{2} (3N_c - C_2(\mathbf{8})) A_3^c(q_\perp) \right) \ln s, \quad (34)$$

где

$$A_3^b(q_\perp) = - \int \frac{d^{2+2\epsilon} l_1 d^{2+2\epsilon} l_2 d^{2+2\epsilon} l_3}{(2\pi)^{3(3+2\epsilon)} \mathbf{l}_1^2 \mathbf{l}_2^2 \mathbf{l}_3^2 (\mathbf{q} - \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_3)^2}, \quad (35)$$

$$A_3^c(q_\perp) = \int \frac{d^{2+2\epsilon} l_1 d^{2+2\epsilon} l_2 d^{2+2\epsilon} l_3 (\mathbf{q} - \mathbf{l}_1)^2}{(2\pi)^{3(3+2\epsilon)} \mathbf{l}_1^2 \mathbf{l}_2^2 \mathbf{l}_3^2 (\mathbf{q} - \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2)^2 (\mathbf{q} - \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_3)^2}. \quad (36)$$

Расчет трехпетлевых поправок [20] показывает, что нарушение полюсной реджевской формы, обнаруженное в этом приближении с помощью инфракрасной факторизации, можно объяснить вкладом полюса и разреза. Ограничения, накладываемые инфракрасной факторизацией на амплитуды партонного рассеяния с присоединенным представлением цветовой группы в t -канале и отрицательной сигнатурой, могут выполняться в ССГЛП в двух и трех петлях, если, кроме вклада полюса Редже, есть вклад реджевского разреза

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(\text{cut})} g^6 \frac{s}{t} \left(\frac{-4\pi^2}{3} \right) \mathbf{q}^2 \times \\ \times \left(A_2(q_\perp) + g^2 N_c \ln s \left(\frac{1}{2} A_3^b(q_\perp) - A_3^c(q_\perp) \right) \right), \quad (37)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{gg}^{(\text{cut})} = -\frac{3}{2}, \quad \mathcal{G}(\mathbf{8})_{gq}^{(\text{cut})} = -\frac{3}{2}, \\ \mathcal{G}(\mathbf{8})_{qq}^{(\text{cut})} = \frac{3(1 - N_c^2)}{4N_c^2}. \quad (38)$$

3.2. Подход вильсоновских линий. Объяснение нарушения полюсной реджевской формы, приведенное в [18], отличается от описанного выше. Связь трехреджеонных разрезов с диаграммами Фейнмана в этой статье не была прослежена. Цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)C}$ для вкладов разреза в ней берутся как

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)C} = \frac{1}{6! N_{\mathbf{R}} T_A T_B} (\mathcal{T}_A^{c_1} \mathcal{T}_A^{c_2} \mathcal{T}_A^{c_3})_{\alpha}^{\alpha'} \times \\ \times \left(\sum_{\sigma} \mathcal{T}_B^{c_1^{\sigma}} \mathcal{T}_B^{c_2^{\sigma}} \mathcal{T}_B^{c_3^{\sigma}} \right)_{\beta}^{\beta'} [\mathcal{P}_{AB}^{\mathbf{R}*}]_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta}. \quad (39)$$

Что касается зависящей от импульсов части, она принимается равной A^{eik} (24). Для представлений \mathbf{R} , отличных от присоединенного, это согласуется с диаграммным подходом, поскольку цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}$ не зависят от σ для таких представлений (см. (23)). Поэтому в обоих подходах вклады разрезов одинаковы для этих представлений.

Но это не так для присоединенного представления, где цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)C}$ работы [18] равны

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)C} = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)} + \frac{N_c^2}{24}, \quad (40)$$

$\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)}$ даются (28). Что касается зависящей от импульсов части, она также принимается равной A^{eik} (24). Это выглядит странно с точки зрения диаграммного подхода, поскольку для появления A^{eik} требуется равенство всех слагаемых в сумме по σ в (39). В двух петлях разница Δ_{AB} между двумя подходами такова, что

$$\Delta_{gg} + \Delta_{qq} = 2\Delta_{gq} \quad (41)$$

и, следовательно, она может быть отнесена к вкладу полюса. Для этого достаточно изменить двухпетлевые вклады в вершины глюон-глюон-реджеон и кварк-кварк-реджеон в (1).

Но в трех петлях вклады разреза оказываются равными

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)C} g^6 \frac{s}{t} \left(\frac{-4\pi^2}{3} \right) \mathbf{q}^2 \times \\ \times \left(A_2(q_\perp) + g^2 N_c \ln s \left(\frac{1}{2} A_3^b(q_\perp) - A_3^c(q_\perp) \right) \right) \ln s, \quad (42)$$

и объяснить нарушение полюсной формы, только разрезом невозможно. Это можно сделать только если ввести смешивание полюса и разреза [18] с цветовыми коэффициентами

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(1)\text{mix}} = \frac{1}{6(N_c^2 - 1) T_A T_B} \sum_{\sigma} Tr \left(\mathcal{T}_g^c \mathcal{T}_g^{c_1^{\sigma}} \mathcal{T}_g^{c_2^{\sigma}} \mathcal{T}_g^{c_3^{\sigma}} \right) \times \\ \times [T_A Tr (\mathcal{T}_B^c \mathcal{T}_B^{c_1} \mathcal{T}_B^{c_2} \mathcal{T}_B^{c_3}) + T_B Tr (\mathcal{T}_A^c \mathcal{T}_A^{c_1} \mathcal{T}_A^{c_2} \mathcal{T}_A^{c_3})]. \quad (43)$$

Смешивание дает вклад только начиная с трех петель.

Следует отметить, что в подходе, используемом в [18], вклад разреза не подавлен при больших N_c , т.е. он существует в планарной $N = 4$ SYM, что противоречит общему представлению, что в пределе высоких энергий четырехточечные амплитуды в этой теории даются вкладом реджеванного глюона.

3.3. Четыре петли в диаграммном подходе. Представленные выше трехпетлевые результаты не позволяют отвергнуть какой-либо из подходов. Это можно было бы сделать, сравнивая их результаты в высших петлях с результатами вычислений методом инфракрасной факторизации. К сожалению, они еще не известны. Некоторые результаты известны только в диаграммном подходе.

В четырех петлях есть три типа вкладов. Первый (самый простой) идет от реджевских траекторий каждого из трех реджеонов. Второй тип содержит поправки от произведений траекторий и реальных частей ядра БФКЛ, а третий – от реджеон-реджеонных взаимодействий. Зависимая от импульса часть всех этих поправок выражается через интегралы

$$I_i = \int \frac{d^{2+2\epsilon} l_1 d^{2+2\epsilon} l_2 d^{2+2\epsilon} l_3}{(2\pi)^{3(3+2\epsilon)} \mathbf{l}_1^2 \mathbf{l}_2^2 \mathbf{l}_3^2} F_i \delta^{3+2\epsilon}(\mathbf{q} - \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_3), \quad (44)$$

где

$$F_a = f_1(\mathbf{l}_1) f_1(\mathbf{l}_2), \quad F_b = f_1(\mathbf{l}_1) f_1(\mathbf{l}_1), \quad F_c = f_2(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2), \\ F_d = f_1(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) f_1(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2), \quad F_e = f_1(\mathbf{q} - \mathbf{l}_1) f_1(\mathbf{q} - \mathbf{l}_3), \quad (45)$$

$$f_1(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 \int \frac{d^{2+2\epsilon} l}{(2\pi)^{(3+2\epsilon)} \mathbf{l}^2 (\mathbf{l} - \mathbf{k})^2}, \quad (46)$$

$$f_2(\mathbf{k}) = \int \frac{d^{2+2\epsilon} l f_1(\mathbf{l})}{(2\pi)^{(3+2\epsilon)} \mathbf{l}^2 (\mathbf{l} - \mathbf{k})^2}.$$

Вычисление цветовых факторов $\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(2)\sigma}$ не легко.

Конечно, это тривиально для квадратов виртуальных частей. Соответствующий цветовой множитель

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB, VV}^{(2)\sigma} = \frac{N_c^2}{4} \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)\sigma}. \quad (47)$$

Это не сложно и для произведений виртуальных и реальных частей из-за свойства (32). Оно дает

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB, VR}^{(2)\sigma} = \frac{N_c}{2} (C_2(\mathbf{R}) - 3N_c) \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)\sigma}. \quad (48)$$

Однако, это довольно сложно для квадрата реальной части. Он содержит матричные элементы

$$\langle \Psi_B^{\sigma} | \sum_{i \neq j=1}^3 \hat{T}^c(i) \hat{T}^c(j) \hat{T}^d(i) \hat{T}^d(j) | \Psi_A \rangle \quad (49)$$

и

$$\langle \Psi_B^{\sigma} | \sum_{i \neq j \neq k=1}^3 \hat{T}^c(i) \hat{T}^c(j) \hat{T}^d(i) \hat{T}^d(k) | \Psi_A \rangle. \quad (50)$$

Из-за (32) их разница равна

$$\frac{1}{4} (C_2(\mathbf{R}) - 3N_c)^2 \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(0)\sigma}, \quad (51)$$

поэтому достаточно получить первый.

Довольно утомительные расчеты дают его вклад $\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)\sigma}$ в $\mathcal{G}(R)_{AB}^{(2)\sigma}$:

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)b} = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)c} = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)d} = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)e} = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)}, \quad (52) \\ \frac{1}{2} (\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)a} + \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)f}) = \mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)} + \left(\frac{N_c^4}{16} + \frac{3N_c^2}{8} \right). \quad (53)$$

Важно заметить, что члены, нарушающие полюсную факторизацию, имеют σ -независимые цветовые коэффициенты, что обеспечивает их калибровочную инвариантность так же, как в двух и трех петлях.

4. Обсуждение. Полусная реджевская форма амплитуд КХД, являющаяся основой уравнения БФКЛ и справедливая в ГЛП и в СГЛП, нарушается в ССГЛП. Естественно думать, что причиной нарушения являются трех-реджеонные разрезы. Эта мысль подтверждается тем фактом, что наблюдаемое нарушение может быть объяснено реджевскими разрезами [17, 18]. Но объяснения, приведенные в [17] (см. также [19, 20]) и [18], различаются. В [17] нарушение объясняется только вкладом разреза, в то время как в [18] вводится также смешивание полюса и разреза. Подходы [17, 18] согласуются в трех петлях, но должны расходиться в более высоких петлях. Возможный выбор между ними может быть сделан в четырех петлях.

Но полное доказательство того, что амплитуды КХД с квантовыми числами глюонов в кросс-каналах и отрицательной сигнатурой даются в ССГЛП вкладами реджевского полюса и трех-реджеонного разреза, со смешиванием или без него,

требует или проверки в каждом порядке возмущения теория (что, очевидно, невозможно) или изобретения какого-либо метода, такого как бутстрап для доказательства реджезации глюона.

Появление реджевских разрезов в амплитудах с отрицательной сигнатурой значительно осложняет вывод уравнения БФКЛ, использующий соотношения унитарности.

Работа поддержана частично Министерством науки и высшего образования РФ, частично Российским фондом фундаментальных исследований, грант # 19-02-00690.

1. V. S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B **60**, 50 (1975).
2. E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, ZhETF **71**, 840 (1976) [Sov. Phys. JETP **44**, 443 (1976)].
3. E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, ZhETF **72**, 377 (1977) [Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977)].
4. I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Yad. Fiz. **28**, 1597 (1978) [Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978)].
5. M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer, and H. S. Tsao, Phys. Rev. Lett. **30**, 811 (1973).
6. M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer, and H. S. Tsao, Phys. Rev. D **8**, 4498 (1973).
7. L. N. Lipatov, Yad. Fiz. **23**, 642 (1976) [Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 338 (1976)].
8. V. S. Fadin and V. E. Sherman, Pisma ZhETF **23**, 599 (1976).
9. V. S. Fadin and V. E. Sherman, ZhETF **72**, 1640 (1977).
10. Ya. Ya. Balitskii, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, in *Materials of IV Winter School of LNPI*, Leningrad (1979), p. 109.
11. B. L. Ioffe, V. S. Fadin, and L. N. Lipatov, *Quantum chromodynamics: Perturbative and nonperturbative aspects*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
12. V. S. Fadin, M. G. Kozlov, and A. V. Reznichenko, Phys. Rev. D **92**, 085044 (2015).
13. V. Del Duca and E. W. N. Glover, JHEP **0110**, 035 (2001); hep-ph/0109028.
14. V. Del Duca, G. Falcioni, L. Magnea, and L. Vernazza, Phys. Lett. B **732**, 233 (2014).
15. V. Del Duca, G. Falcioni, L. Magnea, and L. Vernazza, PoS RADCOR **2013**, 046 (2013).
16. V. Del Duca, G. Falcioni, L. Magnea, and L. Vernazza, JHEP **1502**, 029 (2015).
17. V. S. Fadin, AIP Conf. Proc. **1819**(1), 060003 (2017).
18. S. Caron-Huot, E. Gardi, and L. Vernazza, JHEP **1706**, 016 (2017).
19. V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Eur. Phys. J. C **78**(6), 439 (2018).
20. V. S. Fadin, PoS DIS **2017**, 042 (2018).
21. T. Becher and M. Neubert, Phys. Rev. Lett. **102**, 162001 (2009); Erratum: [Phys. Rev. Lett. **111**(19), 199905 (2013)].
22. T. Becher and M. Neubert, JHEP **0906**, 081 (2009); Erratum: [JHEP **1311**, 024 (2013)].
23. E. Gardi and L. Magnea, Nuovo Cim. C **32**(5–6), 137 (2009) [Frascati Phys. Ser. **50**, 137 (2010)].
24. Ø. Almelid, C. Duhr, and E. Gardi, Phys. Rev. Lett. **117**(17), 172002 (2016).