Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 1, с. 34 – 39

Фазовый переход в трехмерных неколлинеарных магнитных системах с дополнительным двукратным вырождением

А. О. Сорокин[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Петербургский институт ядерной физики, 188300 Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 11 ноября 2019 г.
После переработки 22 ноября 2019 г.
Принята к публикации 25 ноября 2019 г.

Методом Монте-Карло исследуется критическое поведение в трехмерном фрустрированном спиральном магнетике с дополнительным двукратным вырождением, реализованном в слоисто-J_1-J_2-J_3 модели на кубической решетке. Для случая гейзенберговских спинов ($N = 3$) найден переход первого рода. С помощью ренормгруппового подхода аналогичный результат найден также для произвольного значения числа компонент классического спина N. Из решеточной модели получен соответствующий функционал Гинзбурга–Ландау, который проанализирован в низших порядках $4 - \varepsilon$ разложения. Приводятся аргументы, что при учете старших порядков разложения качественный результат не изменится.

DOI: 10.31857/S0370274X20010075

Фрустрированные магнитные системы представляют значительный интерес в связи с реализацией в них явлений, приводящих к возникновению новых фаз и фазовых переходов. Так, в частности, фрустрация является одним из механизмов образования несоизмеримых длиннопериодических модулированных структур типа спирали [1–3]. Другое интересное явление, которое может наблюдаться во фрустрированных магнетиках, – "порядок из беспорядка", когда дополнительное бесконечное вырождение основного состояния снимается за счет квантовых или температурных флуктуаций [4–6]. Это явление вместе с возникновением неколлинеарного спинового упорядочения обеспечивают разнообразие возможных симметрийных классов, реализующихся во фрустрированных системах.

Простейший (аксиальный) спиральный магнетик, в котором конкурирующее обменное взаимодействие присутствует только в одном направлении решетки, соответствует, например, редкоземельным металлам [7] и многослойным структурам [8]. Критическое поведение в этом случае исследовано в работе [9]. В данной работе рассматривается обратная ситуация, когда спиральная структура образуется внутри слоев. Этот случай оказывается более богат феноменологически, что особенно ярко проявляется в двумерном и квазидвумерном случаях [10–12].

Очевидное обобщение аксиального спирального магнетика — введение конкурирующего обменного взаимодействия в двух направлениях простой кубической решетки. Но на самом деле эта модель является лишь частным случаем слоистой J_1-J_2-J_3 модели, в которой рассматриваются обмены первых трех порядков дальности в слое, с $J_2 = 0$. Фазовая диаграмма этой модели содержит две фазы с коллинеарным спиновым упорядочением, нефрустрированную и фрустрированную с эффектом "порядок из беспорядка", а также две различные геликоидальные фазы [13–15] (рис. 1).

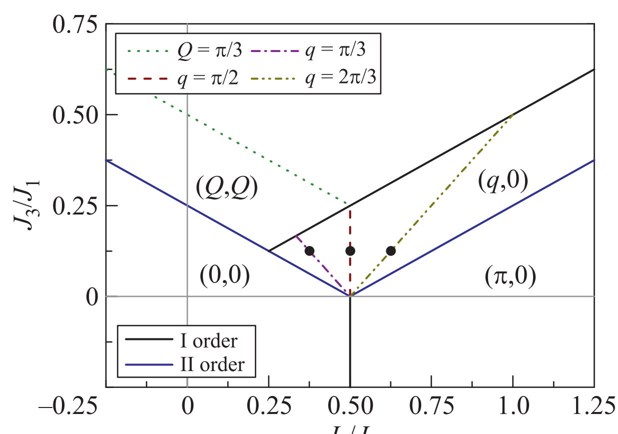

Рис. 1. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма J_1-J_2-J_3 модели. Точками отмечены случаи, численно рассматриваемые в данной работе

Обе фазы со спиральным порядком имеют одинаковые симметрийные свойства, описывающиеся пространством параметра порядка $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes$

[1)]e-mail: aosorokin@gmail.com

$O(N)/O(N-2)$, где N — размерность классического спина. В частности, это означает, что переходы по температуре в разупорядоченную фазу должны принадлежать одному классу универсальности, причем отличающемуся от класса универсальности простого спирального магнетика $G/H = O(N)/O(N-2)$ или, тем более, от класса коллинеарных магнетиков $G/H = O(N)/O(N-1)$. Класс $O(N)/O(N-2)$ подробно исследовался на протяжении нескольких десятков лет, поскольку ему же принадлежит критическое поведение антиферромагнетика на слоисто-треугольной решетке и сверхтекучего ^{3}He (для обзора см. [16]). Наиболее надежные результаты указывают, что при $N < 6$, включая физически интересные случаи $N = 2$, 3, будет наблюдаться переход первого рода, при $N \geq 6$ – второго. Класс $\mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-2)$ не исследовался ранее за исключением частного случая $J_2 = 0$ в J_1-J_2-J_3 модели, исследованного в работах [9, 17, 18]. В данной работе будут приведены аргументы, основанные на ренормгрупповом анализе, в пользу того, что в данном симметрийном классе будет наблюдаться переход первого рода для любого N. Мы также численно рассмотрим несколько случаев J_1-J_2-J_3 модели, относящихся ко второй, ранее не исследовавшейся геликоидальной фазе.

Слоисто-J_1-J_2-J_3 модель описывается гамильтонианом

$$H = -J\sum_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}} \cdot S_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} - J_1 \sum_{\mathbf{x},\mu} S_{\mathbf{x}} \cdot S_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_\mu} + \quad (1)$$

$$+ J_2 \sum_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}} \cdot (S_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + S_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2}) + J_3 \sum_{\mathbf{x},\mu} S_{\mathbf{x}} \cdot S_{\mathbf{x}+2\mathbf{e}_\mu},$$

где $\mu = 1, 2$, S – N-компонентный классический вектор, $\mathbf{x}$ нумерует узлы простой кубической решетки, константы J выбраны положительными. Отметим, что для классической модели знаки J_1 и J несущественны, однако данная модель интенсивно исследуется в окрестности квантовых критических точек, где выбирается $J_1 < 0$ и $J < 0$ (см., например, [19]). При нашем выборе знака J_1 при малых значениях фрустрирующих обменов основным состоянием является ферромагнитный порядок с $\mathbf{q}_0 = (0, 0, 0)$. Данная фаза существует при $J_3 < (J_1 - 2J_2)/4$ и $J_2 < J_1/2$. При $J_2 > J_1/2$ энергетически более выгодными становятся конфигурации с $\mathbf{q}_0 = (\pi, 0, 0)$ и $(0, \pi, 0)$, при условии $J_3 < (-J_1 + 2J_2)/4$. В этой фазе возникает коллинеарный антиферромагнитный порядок, соответствующий одному из волновых векторов $\mathbf{q}_0$. И поскольку одна конфигурация не может быть приведена к другой с помощью глобальных поворотов спинов, то фазе соответствует нарушение $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-1)$ симметрии. Критическое поведение в этом случае исследовано в работах [20–24].

При $J_3 > (J_1 - 2J_2)/4$ и $J_3 > (-J_1 + 2J_2)/4$ низкотемпературная фаза содержит спиральную структуру. При $J_3 > J_2/2$ более выгодным оказывается геликоидальное состояние, описываемое одной из четырех конфигураций $\mathbf{q}_0 = (\pm Q, \pm Q, 0)$, где $\cos Q = J_1/(2J_2 + 4J_3)$. (В дальнейшем для краткости мы будем называть данную фазу (Q, Q) фазой.) Оставшаяся полуполоса фазовой диаграммы, ограниченная условиями $J_3 > (J_1 - 2J_2)/4$, $J_3 > (-J_1 + 2J_2)/4$ и $J_3 < (-J_1 + 2J_2)/4$, также соответствует спиральной структуре с четырьмя минимумами, описываемыми векторами обратной решетки $\mathbf{q}_0 = (\pm q, 0, 0)$ и $\mathbf{q}_0 = (0, \pm q, 0)$, где $\cos q = (J_1 - 2J_2)/(4J_3)$. (Эту фазу будем называть $(q, 0)$ фазой.)

Фаза $(q, 0)$, которой мы интересуемся в данной работе, обладает рядом свойств, не встречающихся у других геликоидальных фаз. Так, например, в этой фазе могут реализоваться основные состояния и с $q > \pi/2$ и с $q < \pi/2$ при фиксированных знаках констант обменных интегралов J_i, в то время как в простом спиральном магнетике и в (Q, Q) фазе в зависимости от знака J_1 реализуется только один тип основного состояния. В частности, в $(q, 0)$ фазе основным состоянием может быть конфигурация с $\mathbf{q}_0 = (\pi/2, 0)$, в то время как в (Q, Q) фазе такая конфигурация достигается лишь в пределе $J_3 \to \infty$. Наконец, хотя из-за осциллирующего характера РККИ взаимодействия вполне может возникать ситуация с $J_2 < J_3$, условие $J_1 > J_2 > J_3$ выглядит более реалистично. Поэтому фаза $(q, 0)$ представляет особый интерес.

Для обеих геликоидальных фаз справедливо, что два минимума с $\mathbf{q}_0$ и $-\mathbf{q}_0$, лежат на одной орбите, связанной с группой вращений, поэтому наблюдается лишь двукратное дополнительное вырождение основного состояния. Учитывая, что неколлинеарный спиновый порядок описывается параметром порядка из факторпространства $G/H = O(N)/O(N-2)$, получаем полное пространство параметра порядка $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-2)$.

В терминах модели (1) параметр порядка может быть сконструирован следующим образом. Для случая $N = 3$, исследуемом в данной работе, параметр порядка представляет собой пару взаимно ортогональных 3-векторов, плюс независимый дискретный параметр изинговского типа. В случае соизмеримых спиралей одним из 3-векторов удобно взять намагниченность подрешеток. Мы рассмотрели спирали с $q = \pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, для которых необходимое число подрешеток равно, соответственно, 36, 16 и 9. В качестве второго 3-вектора берется один из векторов киральности

$$k_a^{\pm} = \frac{1}{L^3 \sin q} \sum_{\mathbf{x},b,c} \epsilon_{abc} S_{\mathbf{x},b} S_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2,c}, \qquad (2)$$

где a, b, c – индексы, нумерующие компоненты спина, а L^3 – объем системы. Тогда дискретный параметр порядка есть просто

$$\sigma = k^+ \cdot k^-. \qquad (3)$$

Модель (1) исследована методом Монте-Карло, основанном на сверх-релаксационном алгоритме [25, 26]. Для изучения типа перехода использовался метод анализа гистограмм. Термализация к равновесному состоянию осуществлялась за $3 \cdot 10^5$ шагов алгоритма на спин, а набор статистики производился за $3 \cdot 10^6$ шагов. Каждый шаг алгоритма содержит один переворот спина в термостате и шесть релаксационных поворотов. Моделирование повторялось для десяти случайных стартовых конфигураций, а получаемый разброс в значениях вычисляемых средних использовался для оценки точности вычислений. Рассмотрение только соизмеримых (при нулевой температуре) спиралей позволяет использовать периодические граничные условия. Это приводит, помимо квантования шага спирали, к дополнительной напряженности в системе при конечной температуре, что оказывается существенным в окрестности точки Лифшица. Для спиралей, рассмотренных здесь (с $q = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$), выбор граничных условий приводит лишь к несущественному сдвигу эффективной температуры перехода $T_c(L)$. Во всех трех случаях выбирается $J_3/J_1 = 0.125$ (см. рис. 1). Для спирали $q = \pi/3$ выбирается $J_2/J_1 = 0.625$, и рассматриваются решетки размера $L = 12, 18, 24, 30, 36$. Для $q = \pi/2$ выбирается $J_2/J_1 = 0.5$ и $L = 12, 16, 20, 24, 32, 40$. Для $q = 2\pi/3$ выбирается $J_2/J_1 = 0.625$ и $L = 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 42$.

Основной результат моделирования заключается в том, что в $(q, 0)$ фазе J_1-J_2-J_3 модели наблюдается переход первого рода единовременно по всем (и непрерывному, и дискретному) параметрам порядка. Так, например, внутренняя теплота перехода, характерная для переходов первого рода, наблюдается вблизи критической температуры для решеток небольшого размера $L \geq 42$. На рисунках 2, 3 показана двухпиковая структура распределения по энергии, отражающая наличие внутренней теплоты перехода. Этот результат согласуется с результатами для (Q, Q) фазы, принадлежащей тому же симметрийному классу [17].

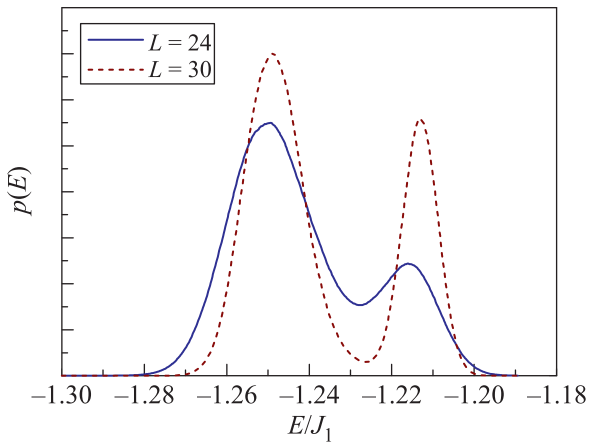

Рис. 2. (Цветной онлайн) Гистограмма распределения по энергии при $J_2/J_1 = 0.5$, $J_3/J_1 = 0.125$, $q = \pi/2$ и $T/J_1 = 0.605$

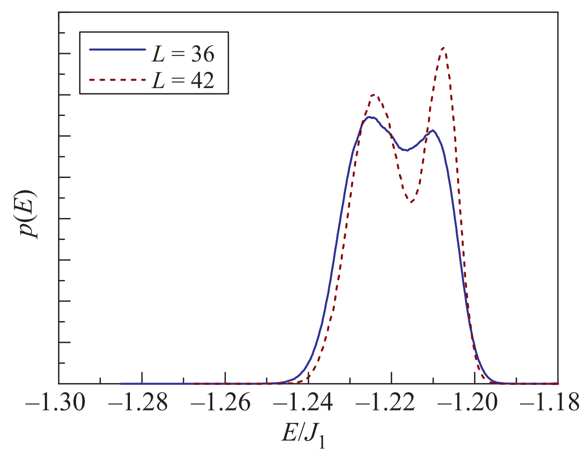

Рис. 3. (Цветной онлайн) Гистограмма распределения по энергии при $J_2/J_1 = 0.625$, $J_3/J_1 = 0.125$, $q = 2\pi/3$. Для $L = 36$ выбрана температура $T/J_1 = 0.64$, для $L = 42$ — $T/J_1 = 0.6397$. В сравнении со случаем $q = \pi/2$ (рис. 2) расстояние между пиками гистограммы, отвечающее за величину внутренней теплоты перехода, значительно меньше

Строго говоря, полученный результат вполне ожидаем. Дело в том, что для случая изотропных спинов $N = 3$ пространство параметра порядка $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes SO(3) \equiv O(3)$ совпадает с симметрийным классом магнетиков с *непланарным* упорядочением $G/H = O(N)/O(N-3)$, реализующихся, например, на решетках кагоме или структурах пирохлора (см., например, [27]). Известно, что в этом классе для $N = 3$ наблюдается переход ярко выраженного первого рода [28–30]. Ренормгрупповой (РГ) анализ также показывает, что первый род перехода будет наблюдаться при $N \leq 9$ [31–33]. Разумеется, данный результат не применим к классу $\mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-2)$ при произвольных значениях N, тем не менее, он оказывается полезен. В связи с этим напомним, что переход из класса $O(N)/O(N-P)$ описывается функционалом Гинзбурга–Ландау [34, 35]

$$F = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{P} \left((\partial_\mu \phi_n)^2 + r\phi_n^2 \right) + \frac{u}{4!} \left(\sum_{n=1}^{P} \phi_n^2 \right)^2 + \frac{v}{4!} \sum_{n,m=1}^{P} \left((\phi_n \cdot \phi_m)^2 - \phi_n^2 \phi_m^2 \right) \right], \tag{4}$$

где ϕ_n – по-прежнему классический N-вектор.

Чтобы получить функционал Гинзбурга–Ландау, описывающий переход непосредственно в J_1-J_2-J_3 модели, необходимо гамильтониан (1) с дополнительным потенциалом $U(S) = m|S|^2 + \lambda|S|^4$, заменяющим условие $|S| = 1$, рассмотреть в окрестности четырех минимумов $(\pm q, 0, 0)$ и $(0, \pm q, 0)$. (Вывод для (Q, Q) фазы аналогичен.) Введем четыре вещественных N-поля

$$\phi_1 = (S|_{\mathbf{q}\simeq(q,0,0)} + S|_{\mathbf{q}\simeq(-q,0,0)})/2,$$
$$\psi_1 = (S|_{\mathbf{q}\simeq(q,0,0)} - S|_{\mathbf{q}\simeq(-q,0,0)})/(2i),$$
$$\phi_2 = (S|_{\mathbf{q}\simeq(0,q,0)} + S|_{\mathbf{q}\simeq(0,-q,0,0)})/2,$$
$$\psi_2 = (S|_{\mathbf{q}\simeq(0,q,0)} - S|_{\mathbf{q}\simeq(0,-q,0)})/(2i),$$

в терминах которых искомый функционал записывается в виде

$$F = \int d^3x \left[\sum_{i=1}^{2} \left((\partial_\mu \phi_i)^2 + (\partial_\mu \psi_i)^2 + r(\phi_n^2 + \phi_n^2) \right) + \right.$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \left(u\left(\phi_i^4 + \psi_i^4\right) + 2v\phi_i^2\psi_i^2 + 2w(\phi_i \cdot \psi_i)^2 \right) +$$
$$+ 2y_1 \left(\phi_1^2\phi_2^2 + \psi_1^2\psi_2^2\right) + 2z_1 \left((\phi_1 \cdot \phi_2)^2 + (\psi_1 \cdot \psi_2)^2 \right) +$$
$$\left. + 2y_2 \left(\phi_1^2\psi_2^2 + \psi_1^2\phi_2^2\right) + 2z_2 \left((\phi_1 \cdot \psi_2)^2 + (\psi_1 \cdot \phi_2)^2 \right) \right]. \tag{5}$$

Разумеется, искомая конфигурация основного состояния остается стабильной лишь в некотором секторе полученного многомерного пространства параметров. На самом деле таких секторов два. Планарное спиновое упорядочение в теории Ландау должно описываться парой взаимно ортогональных векторов $\Phi = (\phi, \psi)$. Мы имеем две таких пары Φ_1 и Φ_2, взаимная ориентация которых не произвольна: каждый вектор одной пары должен быть коллинеарен одному вектору и перпендикулярен другому вектору второй пары. Выбор одного из условий $\phi_1 || \phi_2$ или $\phi_1 || \psi_2$ отвечает выбору одной из четвертей пространства $z_1 < 0 < z_2$ или $z_2 < 0 < z_1$. Для дальнейшего анализа мы выберем первую альтернативу. При таком выборе в упорядоченной фазе $r < 0$ из условия минимума функционала следует

$$w > 0, \quad 2u + w + z_2 > 0, \quad 2u + v + y_1 + y_2 + z_1 > 0, \tag{6}$$

$$\phi_i^2 = \psi_i^2 = \frac{-r}{2(2u + v + y_1 + y_2 + z_1)} = \kappa^2. \tag{7}$$

Более полную информацию о границах стабильности выбранного нами основного состояния можно получить из условий положительности спектра возбуждений. В целом параметр порядка $\Psi = (\Phi_1, \Phi_2)$ является матрицей $4 \times N$. К счастью, матрица коррелятора разбивается на N блоков размера 4×4, диагонализация которых дает результаты:

$$m_{1,1}^2 = 8\kappa^2(2u + v + y_1 + y_2 + z_1),$$
$$m_{1,2}^2 = 8\kappa^2(2u + v - y_1 - y_2 - z_1),$$
$$m_{1,3}^2 = 8\kappa^2(-v - y_1 + y_2 - z_1),$$
$$m_{1,4}^2 = 8\kappa^2(-v + y_1 - y_2 + z_1),$$
$$m_{2,1}^2 = 8\kappa^2(w + z_2), \quad m_{2,2}^2 = 8\kappa^2(w - z_1),$$
$$m_{2,3}^2 = 8\kappa^2(z_2 - z_1), \quad m_{2,4}^2 = 0,$$
$$m_{i,1}^2 = m_{i,2}^2 = -8\kappa^2 z_1, \quad m_{i,3}^2 = m_{i,4}^2 = 0,$$

где $i = 3, \ldots, N$. Видим, что в спектре присутствуют $2N - 3$ голдстоуновских (безмассовых) мод, отвечающих $SO(N)/SO(N-2)$ нарушению симметрии.

Ренормгрупповой анализ модели (5) чрезвычайно громоздкий. К счастью, в нашем случае тип фазового перехода строго определяется даже в 1-петлевом приближении $4 - \varepsilon$ разложения. Соответствующие РГ-уравнения можно получить из известных результатов для обобщенной N-векторной модели [36, 37]:

$$\beta_u = -\varepsilon u + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (N+8)u^2 + N(v^2 + y_1^2 + y_1^2) + 2vw \\ +2y_1 z_1 + 2y_2 z_2 + w^2 + z_1^2 + z_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_v = -\varepsilon v + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2N+4)uv + 2Ny_1 y_2 + 4v^2 \\ +2uw + w^2 + 2y_2 z_1 + 2y_1 z_2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{y_1} = -\varepsilon y_1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2N+4)uy_1 + 2Nvy_2 + 4y_1^2 \\ +2uz_1 + z_1^2 + 2vz_2 + 2wy_1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{y_2} = -\varepsilon y_2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2N+4)uy_2 + 2Nvy_1 + 4y_2^2 \\ +2uz_2 + 2vz_1 + 2wy_2 + z_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_w = -\varepsilon w + \frac{1}{2}\left((N+2)w^2 + 4uw + 8vw + 2z_1z_2\right),$$
$$\beta_{z_1} = -\varepsilon z_1 + \frac{1}{2}\left((N+2)z_1^2 + 4uz_1 + 8y_1z_1 + 2wz_2\right),$$
$$\beta_{z_2} = -\varepsilon z_2 + \frac{1}{2}\left((N+2)z_2^2 + 4uz_2 + 8y_2z_2 + 2wz_1\right).$$

Подробный анализ этих уравнений, включая случай мультикритического поведения, будет приведен в последующих работах. Здесь мы отметим лишь два основных результата. Во-первых, единственная притягивающая неподвижная точка, которая может описывать переход второго рода, существует (в 1-петлевом приближении) только при $N_{c_2} \gtrsim 42.8$. Данная точка лежит в плоскости $y_1 = y_2 = v = u - w$, $z_1 = z_2 = w$ и соответствует $O(N)/O(N-4)$ модели (4) при $P = 4$. Учет следующих поправок, разумеется, изменит оценочное значение N_{c_2} [31–33], но не поменяет ситуацию качественно. В любом случае, это не влияет на другой результат: неподвижные точки любого типа отсутствуют в областях стабильности нашего основного состояния $z_1 < 0 < z_2$ и $z_2 < 0 < z_1$ при всех значениях N. Таким образом, в симметрийном классе $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-2)$ должен наблюдаться переход первого рода не только при $N = 3$, что наблюдалось в данной работе методом Монте-Карло, но и при всех значениях $N \geq 2$.

Напомним, что аналогичный результат был получен для класса $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-1)$ [20, 22], где неподвижные точки также отсутствуют в области стабильности исследуемого основного состояния для любых N. При этом единственная притягивающая неподвижная точка появляется при больших значениях N ($N \gtrsim 6$, но также для вырожденного случая $N = 1$). Можно предположить, что аналогичный результат будет наблюдаться для многообразий Штифеля общего вида $V_{N,P} = O(N)/O(N-P)$. Т.е. в классе $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-P)$ будет наблюдаться переход первого рода, а в соответствующей модели Гинзбурга–Ландау может присутствовать притягивающая неподвижная точка из $O(N)/O(N-2P)$ класса.

В заключение отметим, что при моделировании случаев $q = \pi/3, 2\pi/3$ мы наблюдали псевдоскейлинговое поведение, характерное для перехода слабого первого рода, с показателями $\nu = 0.39(2)$, $\beta = 0.12(1)$, $\gamma = 0.91(5)$, $\beta_k = 0.22(3)$, $\gamma_k = 0.69(7)$, что согласуется с результатами для (Q, Q) фазы [9, 17]. Это явление трудно объяснить в рамках модели (5) в силу отсутствия точек с координатами $\mathrm{Re} z_1 < 0$ и $\mathrm{Re} z_2 > 0$, которые могли бы приводить к замедлению РГ-потока и имитации скейлинга. Более того, по аналогии с классом $G/H = \mathbb{Z}_2 \otimes O(N)/O(N-1)$ можно предположить, что с ростом N скейлинг будет становиться все более явным. Этот вопрос также станет предметом будущих исследований.

Автор выражает благодарность О. И. Утесову и А. В. Сыромятникову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований гранта # 18-02-00706 и гранта Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

1. J. Villain, J. Phys. Chem. Solids **11**, 303 (1959).
2. A. Yoshimori, J. Phys. Soc. Jpn. **14**, 508 (1959).
3. T. A. Kaplan, Phys. Rev. **116**, 888 (1959).
4. J. Villain, R. Bidaux, J.-P. Carton, and R. Conte, J. Physique **41**, 1263 (1980).
5. Е. Ф. Шендер, ЖЭТФ **83**, 326 (1982).
6. C. L. Henley, Phys. Rev. Lett. **62**, 2056 (1989).
7. R. J. Elliott, Phys. Rev. **124**, 346 (1961).
8. D. N. Aristov, Phys. Rev. B **55**, 8064 (1997).
9. А. О. Сорокин, ЖЭТФ **145**, 481 (2014).
10. А. О. Сорокин, А. В. Сыромятников, Письма ЖЭТФ **96**, 449 (2012).
11. A. O. Sorokin, Phys. Rev. B **95**, 094408 (2017).
12. A. O. Sorokin, JMMM **479**, 32 (2019).
13. M. P. Gelfand, R. R. P. Singh, and D. A. Huse, Phys. Rev. B **40**, 10801 (1989).
14. A. Moreo, E. Dagotto, T. Jolicoeur, and J. Riera, Phys. Rev. B **42**, 6283 (1990).
15. A. Chubukov, Phys. Rev. B **44**, 392 (1991).
16. B. Delamotte, D. Mouhanna, and M. Tissier, Phys. Rev. B **69**, 134413 (2004).
17. А. О. Сорокин, А. В. Сыромятников, ЖЭТФ **139**, 1148 (2011).
18. А. О. Сорокин, А. В. Сыромятников, ЖЭТФ **140**, 771 (2011).
19. D. Schmalfuss, R. Darradi, J. Richter, J. Schulenburg, and D. Ihle, Phys. Rev. Lett. **97**, 157201 (2006).
20. A. O. Sorokin, Phys. Lett. A **382**, 3455 (2018).
21. А. О. Сорокин, Письма ЖЭТФ **109**, 423 (2019).
22. А. О. Сорокин, ТМФ **200**, 310 (2019).
23. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Письма ЖЭТФ **106**, 72 (2017).
24. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Письма ЖЭТФ **109**, 610 (2019).
25. F. R. Brown and T. J. Woch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2394 (1987).
26. M. Creutz, Phys. Rev. D **36**, 515 (1987).
27. J. N. Reimers, J. E. Greedan, and M. Björgvinsson, Phys. Rev. B **45**, 7295 (1992).
28. H. Kunz and G. Zumbach, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 3121 (1993).
29. H. T. Diep and D. Loison, J. Appl. Phys. **76**, 6350 (1994).

30. D. Loison, Eur. Phys. J. B **15**, 517 (2000).
31. A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Nucl. Phys. B **607**, 605 (2001).
32. P. Calabrese and P. Parruccini, Nucl. Phys. B **679**, 568 (2004).
33. M. V. Kompaniets, A. Kudlis, and A. I. Sokolov, arXiv: 1911.01091 [cond-mat.stat-mech].
34. H. Kawamura, J. Phys. Soc. Jpn. **59**, 2305 (1990).
35. L. Saul, Phys. Rev. B **46**, 13847 (1992).
36. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. B **10**, 892 (1974).
37. Yu. M. Pis'mak, A. Weber, and F. J. Wegner, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 095003 (2009).