Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 2, с. 65 – 74 © 2020 г. 25 января

Спектры двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости

Т. А. Зиняков[+1)], А. С. Петросян[+*]

[+]Институт космических исследований РАН, 117997 Москва, Россия

[*]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 25 октября 2019 г.
После переработки 9 декабря 2019 г.
Принята к публикации 9 декабря 2019 г.

Для двумерной однородной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости показано формирование спектра Ирошникова–Крейчнана в инерционном интервале. Получено выражение для волнового числа, характеризующего границу между инерционным интервалом спектра Ирошникова–Крейчнана и областью существования волн Россби. Исследовано самоподобное затухание спектра Ирошникова–Крейчнана во времени. На больших интервалах времени обнаружено нарушение самоподобного затухания спектра полной энергии и формирование Колмогоровского спектра в инерционном интервале кинетической энергии. Обратный каскад кинетической энергии, характерный для обнаруженного спектра Колмогорова, обеспечивает зарождение зональных течений.

DOI: 10.31857/S0370274X20020034

1. Введение. Исследование магнитогидродинамической турбулентности во вращающейся плазме является фундаментальным для понимания течений в плазменной астрофизике [1, 2] и в тороидальной плазме [3–5]. Динамика таких течений существенно отличается от динамики турбулентности во вращающейся нейтральной жидкости вследствие присутствия магнитных полей. В настоящей работе исследуются спектры двумерной однородной затухающей магнитогидродинамической турбулентности в плазме при наличии вращения. Модель двумерной магнитогидродинамической турбулентности при наличии силы Кориолиса является ключевой в исследованиях астрофизической плазмы, поскольку астрофизические течения становятся плоскими благодаря быстрому вращению или действию внешнего вертикального магнитного поля [6]. Отметим также, что при наличии сильной стратификации в турбулентности формируется множество плоских структур в виде двумерных невзаимодействующих слоев. Большинство (не все) течения в плазменной астрофизике имеют сферическую геометрию, поэтому проекция угловой скорости вращения на местную вертикаль меняется с широтой. Мы используем приближение β-плоскости для линейной аппроксимации зависимости параметра Кориолиса f от координаты в направлении юг-север.

В работах [7–9] исследуются зональные течения в двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости. Отметим, что зональные течения также играют определяющую роль в термоядерной плазме [10–12]. Как известно, зональные течения в нейтральной жидкости характеризуются масштабом Райнса, описывающем границу между волновой и турбулентной динамикой [13, 14]. В нашей работе [8] показано образование зональных течений в двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости и предложена оценка границы между волнами Россби и магнитогидродинамической турбулентностью, а именно, масштаб, характеризующий зональные течения. Однако в работах [7, 8] не затрагивался вопрос о спектрах двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости, поскольку для анализа спектров турбулентного течения требуется моделирование с разрешением, значительно превышающим разрешение численных экспериментов в работах [7, 8]. Изучению динамики спектров двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости посвящена наша работа. Помимо самостоятельного фундаментального интереса, решение сформулированной задачи является определяющим для понимания процессов зарождения зональных течений.

Ответ на вопрос о спектрах двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости не является тривиальным, поскольку уравнения дву-

[1)]e-mail: zinyakov@iki.rssi.ru

мерной магнитной гидродинамики на β-плоскости включают моды волн Россби и магнитогидродинамическую турбулентность. В магнитогидродинамической турбулентности спектральный перенос полной энергии определяется альвеновскими волнами. Для двумерной магнитогидродинамической турбулентности без вращения, в отличие от двумерной турбулентности нейтральной жидкости [15, 16], характерен прямой каскад энергии [17]. Поток полной энергии по спектру зависит от волнового числа, спектральной плотности полной энергии E_k и скорости альвеновских волн. Перенос энергии вдоль инерционного интервала происходит из-за взаимодействия альвеновских волн, вследствие чего реализуется спектр Ирошникова–Крейчнана [18, 19]:

$$E_k = E_k^V + E_k^M = C'(\epsilon v_A)^{1/2} k^{-3/2}, \tag{1}$$

где C' – константа, $\epsilon = -\partial E/\partial t$ – скорость диссипации энергии, v_A – среднеквадратичная альвеновская скорость. В работе [20] показано, что в двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности наблюдается самоподобное затухание спектра (1).

Так как эффекты вращения в двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости оказывают существенное влияние на динамику только в крупных масштабах, естественно было бы предположить, что спектры полной энергии такой турбулентности согласуются со спектром Ирошникова–Крейчнана (1) в инерционном интервале волновых векторов, лежащем справа от области доминирования волн Россби. Однако такое предположение противоречит процессу возникновения зональных течений [8, 14], поскольку для реализации зональных течений требуется обратный каскад кинетической энергии к малым волновым числам, характерный для двумерной турбулентности нейтральной жидкости. Именно разрешению этого парадокса посвящена наша работа. Отметим далее свойства двумерной турбулентности нейтральной жидкости, важные для понимания полученных в работе результатов.

Динамика двумерной турбулентности нейтральной жидкости характеризуется обратным каскадом энергии и прямым каскадом энстрофии [15, 16, 21, 22]. Простые соображения теории размерности [23] дают следующее выражение для изотропного спектра энергии E_k по модулю волнового числа k в двумерной турбулентности [24] для инерционного интервала обратного каскада энергии

$$E_k = C_1 \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \tag{2}$$

и для инерционного интервала прямого каскада энстрофии

$$E_k = C_2 \varepsilon^{2/3} k^{-3}, \tag{3}$$

где C_1, C_2 – константы, ε – скорость диссипации энстрофии. Изотропный спектр (2) известен как спектр Колмогорова. В двумерной турбулентности на β-плоскости обратный каскад энергии останавливается на масштабах Райнса и образуются зональные течения [13–15].

В следующем разделе приводятся исходные уравнения; описывается численный алгоритм решения задачи и используемые начальные условия. В третьем разделе обсуждаются результаты численного моделирования пространственно-временной динамики двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости. В заключении приведены основные результаты работы.

2. Исходные уравнения. Для описания вращающегося двумерного течения квазинейтральной плазмы используем уравнения двумерной магнитной гидродинамики с учетом силы Кориолиса, пренебрегая эффектами сжимаемости ($\rho_0 = \mathrm{const}$) и теплопроводности,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}}{4\pi\rho} + \nu\Delta\mathbf{u}, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) + \eta\Delta\mathbf{B}, \tag{4b}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{4c}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{4d}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость вращения, $\mathbf{B}$ – магнитное поле и ν – кинематическая вязкость. Коэффициент магнитной диффузии определяется как

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma},$$

где c – скорость света, σ – электрическая проводимость среды. При достаточно большой электрической проводимости среды σ, уравнение (4b) описывает вмороженность магнитного поля в плазму.

Далее используем уравнения (4), записанные в безразмерном виде, для получения уравнений эволюции завихренности и потенциала магнитного поля. Пространственные переменные обезразмерены на величину $L_0 = l_0/2\pi$, где l_0 – характерный масштаб самого крупного вихря. Вектор скорости $\mathbf{u}$ обезразмерен на величину

$$U_0 = \sqrt{\frac{E_0^V}{\rho_0 L_0^2}},$$

где E_0^V – начальная кинетическая энергия системы. Время обезразмерено на величину $T_0 = L_0/U_0$. Магнитное поле $\mathbf{B}$ обезразмерено на величину

$$B_0 = \sqrt{\frac{4\pi E_0^M}{L_0^2}},$$

где E_0^M – начальная магнитная энергия системы ($E_0^V = E_0^M$). Остальные безразмерные величины задаются следующим образом:

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{2L_0}{U_0}\mathbf{\Omega} \text{ – безразмерная угловая скорость,}$$

$$\hat{p} = \frac{p}{U_0^2\rho_0} \text{ – безразмерное давление,}$$

$$\hat{\nu} = \frac{\nu}{U_0 L_0} \text{ – безразмерная вязкость,}$$

$$\hat{\eta} = \frac{\eta}{U_0 L_0} \text{ – безразмерная диффузия.}$$

При переходе от обезразмеренного уравнения (4a) к уравнению эволюции завихренности и потенциала магнитного поля используется приближение β-плоскости, в котором проекция угловой скорости на нормаль к поверхности сферы ($\Omega^z = f$) аппроксимируется по широте следующим образом:

$$f = f_0 + \beta y,$$

где β – параметр Россби. В данном случае изучается двумерная область на поверхности сферы. Ось x имеет направление вдоль азимута, а ось y – противоположна широте.

После замены переменных в (4) и при сохранении за обезразмереными переменными старых обозначений, уравнения эволюции завихренности ω и потенциала магнитного поля A двумерного магнитогидродинамического течения несжимаемой вязкой жидкости (плазмы) в приближении β-плоскости записываются в виде:

$$\partial_t \omega = J(\psi, \omega) + \beta \partial_x \psi + J(A, \Delta A) + \nu \Delta \omega \qquad (5a)$$

$$\partial_t A = J(\psi, A) + \eta \Delta A, \qquad (5b)$$

где ψ – функция тока ($\omega = -\nabla^2 \psi$), β – параметр Россби. Функция $J(a,b) = \partial_x a \cdot \partial_y b - \partial_y a \cdot \partial_x b$ – якобиан функций $a(x,y)$ и $b(x,y)$.

Завихренность и функция тока связаны с двумерным полем скорости (u^x, u^y) следующими соотношениями:

$$\omega = \partial_x u^y - \partial_y u^x; \quad u^x = \partial_y \psi; \quad u^y = -\partial_x \psi.$$

Потенциал магнитного поля связан с двумерным магнитным полем (B^x, B^y) следующими соотношениями:

$$B^x = \partial_y A; \quad B^y = -\partial_x A.$$

В работе изучается локальная двумерная область $(2\pi \times 2\pi)$ на сфере с периодичными граничными условиями. В качестве начальных условий в уравнении (5) используется набор Фурье-гармоник:

$$\psi_k^0 = a k^{1/2} e^{-k^2/2k_0^2 + i\alpha_k},$$

$$A_k^0 = b k^{1/2} e^{-k^2/2k_0^2 + i\beta_k},$$

где α_k, β_k – случайные фазы, а коэффициенты a, b выбраны так, что суммарная энергия системы $E = E^V + E^M = 2$. Параметр k_0 задает значение волнового числа, при котором спектр энергии системы в начальном состоянии максимальный.

Для численного решения системы (5) используется псевдоспектральный метод, основанный на быстром преобразовании Фурье [25]. В таком методе при использовании преобразования Фурье возникают ошибки дискретизации (алиасинг), связанные с нелинейными членами в уравнениях (5). Для исключения фиктивных решений ошибки фильтруются по правилу 2/3 [26]. При использовании пространственной сетки $(N \times N)$ сетка в Фурье-пространстве (набор Фурье-гармоник) ограничивается квадратной областью $-N/3 \leqslant k_x, k_y \leqslant N/3$. Для интегрирования по времени системы уравнений (5) используется схема Рунге–Кутта третьего порядка (трехшаговая схема с весами). Интегрирование по времени происходит с переменным временным шагом таким образом, чтобы шаг по времени всегда удовлетворял критерию Куранта–Фридрихса–Леви. Численное моделирование производилось на графических процессорах Nvidia с использованием параллельных вычислений программно-аппаратной архитектуры CUDA.

3. Результаты. Мы обсуждаем результаты численного моделирования системы уравнений (5) с пространственным разрешением 4096×4096 при различных параметрах Россби β. Численные эксперименты осуществлялись для течений с равными исходным гидродинамическим числом Рейнольдса и исходным магнитным числом Рейнольдса. Поясним кратко, как оцениваются соответствующие числа Рейнольдса в наших начальных условиях для обезразмеренной системы уравнений 5. Гидродинамическое число Рейнольдса через размерные величины задается как $Re = l_0 V_0/\nu$, где V_0 – начальная среднеквадратичная скорость системы, l_0 – характерный масштаб самого крупного вихря. Используя обезразмеривание, описанное в предыдущем разделе, мы получаем

$$Re = \frac{l_0 V_0}{\nu} = \frac{2\pi L_0 u_0 U_0}{\hat{\nu} U_0 L_0} = \frac{2\pi u_0}{\hat{\nu}} \simeq 10^6,$$

где u_0 – безразмерная начальная среднеквадратичная скорость, $\hat{\nu}$ – безразмерная вязкость, обозначенная в (5a) как ν. Аналогичным образом задается магнитное число Рейнольдса

$$Rm = \frac{2\pi u_0}{\hat{\eta}} \simeq 10^6,$$

где $\hat{\eta}$ – безразмерная магнитная диффузия, обозначенная в (5b) как η. Соответственно, магнитное число Прандтля исследуемых течений $Pr_m = \nu/\eta = 1$. При таком выборе числа Прандтля обеспечивается оптимальный выбор шага по времени используемого численного алгоритма. Все численные эксперименты осуществлялись до времени $T = 15 \cdot t_0$, где $t_0 = l_0/U_0$ – время оборота вихря в турбулентном течении в начальный момент времени. Основные параметры и результаты численных экспериментов приведены в табл. 1: где C' – константа в спектре Ирошникова–Крейчнана (1) и k_β^M – характерное волновое число правой границы области доминирования волн Россби при наличии магнитного поля (9), приведенное в момент времени $t = 3$, когда происходит процесс адаптации системы к начальным условиям. В процессе адаптации системы к начальным условиям происходит переход от кинетической энергии к магнитной ($E^M/E^V \approx 2$ для $t = 3$ при параметрах Россби $\beta = 10; 25; 50$) и формируется поток энергии вдоль инерционного интервала.

Таблица 1. Начальные данные и результаты численных экспериментов

#	E_V^0	E_M^0	β	ν	η	C'	k_β^M
1	1	1	10	10^{-5}	10^{-5}	1.42	5.5
2	1	1	25	10^{-5}	10^{-5}	1.36	8.4
3	1	1	50	10^{-5}	10^{-5}	1.31	12.3

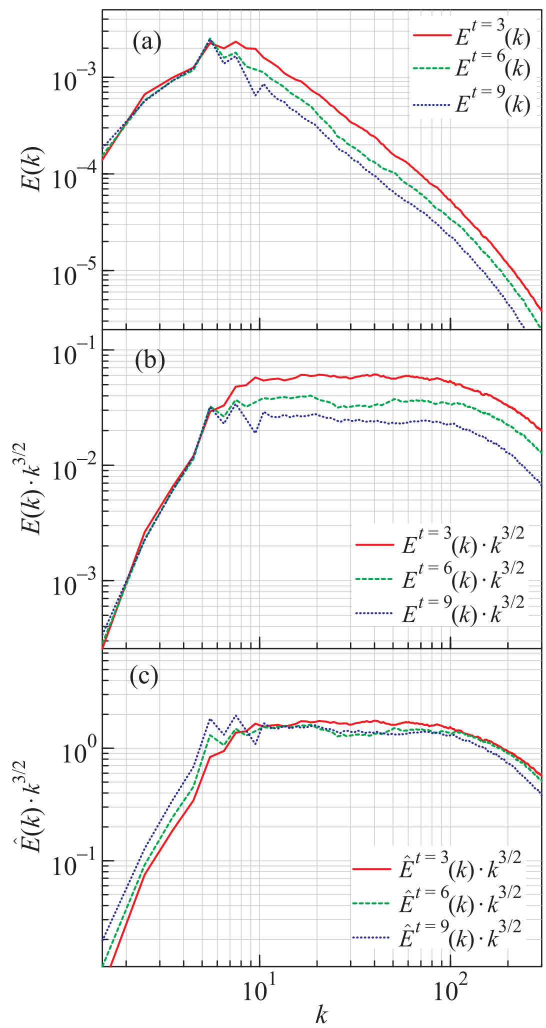

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) – Спектры полной энергии затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости ($\beta = 10$). (b) – Спектры полной энергии, нормированные на $k^{3/2}$. (c) – Спектры полной энергии, нормированные на $k^{3/2}$ и скомпенсированные на временную зависимость $\sqrt{\epsilon v_A}$. Сплошными линиями показаны зависимости спектров от волнового числа k для момента времени $t = 3$, штрихпунктирными линиями – для момента времени $t = 6$, точечными пунктирами – для момента времени $t = 9$

Сравним спектры полной энергии для случая двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности при параметре Россби $\beta = 10$ для трех моментов времени $t = 3; 6; 9$, после адаптации системы к начальным условиям. На рисунке 1a приведены спектры полной энергии для моментов времени следующих после адаптации системы к начальным условиям ($t = 3$). Спектры полной энергии исследуются в диапазоне волновых векторов $k = 1 - 300$, который содержит область крупных масштабов, инерционный интервал и начало диссипативного интервала.

Из рисунка 1a видно, что область всех волновых векторов разделяется на область крупных масштабов ($k < 6$), в которой спектр энергии растет с ростом волнового числа k и область средних и мелких масштабов ($k > 6$), в которой спектр энергии падает с ростом волнового числа k. Спектры полной энергии в области крупных масштабов ($k = 1 - 6$) не изменяются на временном промежутке $t = 3 - 9$. Максимум спектра полной энергии во всех трех моментах времени $t = 3; 6; 9$ наблюдается на волновом числе $k = 5.5$. На рисунке 1a в диапазоне волновых чисел $10 < k < 300$ спектры полной энергии для трех моментов времени $t = 3; 6; 9$ имеют схожую зависимость от волнового числа k, но каждый последующий спектр лежит ниже предыдущего. Затухание спектра энергии в области средних и мелких масштабов ($k > 6$) происходит равномерно (спектр полной энергии самоподобно затухает в данной области). В диапазоне волновых чисел $10 < k < 100$ зависимости спектров полной энергии от волнового числа k, которые построены в логарифмических координатах на рисунке 1a, имеют схожий наклон на всех трех моментах времени $t = 3; 6; 9$. Данный диапазон является инерционным интервалом, в котором происходит перенос энергии из крупных масштабов в мелкие. Инерционный интервал распространяется в крупные масштабы с течением времени до волнового числа, соответствующего максимуму спектра энергии $k = 5.5$ в момент времени $t = 9$. Такая динамика связана с затуханием энергии в промежуточной области ($k = 6 - 10$) между крупными масштабами и начальным инерционным интервалом. В диапазоне волновых чисел $k > 100$ спектры полной энергии на рисунке 1a с ростом k затухают быстрее, чем в инерционном интервале, поскольку в диссипативном интервале преобладают эффекты вязкости и магнитной диффузии.

Исходя из полученного утверждения, что спектры полной энергии двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости имеют одинаковую зависимость от волнового числа k, мы переходим к исследованию спектров, нормированных на $k^{3/2}$. На рисунке 1b показаны нормированные спектры полной энергии $E(k)\cdot k^{3/2}$ двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости при параметре Россби $\beta = 10$.

На рисунке 1b нормализованный спектр, соответствующий моменту времени $t = 3$, масштабно-инвариантен на диапазоне волновых векторов $10 < < k < 100$. Таким образом, в двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости после адаптации системы к начальным условиям устанавливается спектр со степенной зависимостью $E_k \sim k^{-3/2}$. Нормализованные компенсированные спектры, соответствующие моментам времени $t = 6; 9$, являются масштабно-инвариантными на большем диапазоне волновых векторов ($k \simeq 8 - 100$ и $k \simeq 6 - 100$, соответственно). Таким образом инерционный интервал расширяется в область крупных масштабов.

На рисунке 1b в области волновых $k \gtrsim 100$ нормированные спектры не являются масштабно-инвариантными. Значения нормализованного спектра $E \cdot k^{3/2}$ в данном диапазоне лежат ниже, чем в инерционном интервале. На этом интервале, который является переходной областью между инерционным и диссипативным интервалами, эффекты диссипации играют существенную роль, спектры полной энергии не согласуются со спектром $E_k \sim k^{-3/2}$.

Так как нормированные спектры на рис. 1b затухают самоподобно в инерционном интервале, мы предполагаем, что самоподобное затухание проходит по закону $\sqrt{\epsilon v_A}$ (временная зависимость спектра Ирошникова–Крейчнана (1)) и переходим к исследованию нормированных спектров, скомпенсированных на эту зависимость. На рисунке 1c показаны нормированные компенсированные спектры полной энергии $E(k)\cdot(\epsilon v_A)^{-1/2}\cdot k^{3/2} = \hat{E}\cdot k^{3/2}$ двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости при параметре Россби $\beta = 10$.

На рисунке 1c нормированные компенсированные спектры полной энергии для моментов времени $t = 3; 6; 9$ практически совпадают на инерционном интервале $k = 10 - 100$, что говорит о наличии самоподобного затухания спектров полной энергии с временным законом $\sqrt{\epsilon v_A}$. В диссипативном интервале $k > 100$ угол наклона нормированного компенсированного спектра для момента времени $t = 9$ меньше, чем для спектров на предыдущих моментах времени. Это связанно с увеличением масштаба Колмогорова $l_K = (\eta^2 v_A/\epsilon)^{1/3}$ и распространением диссипации в более крупные масштабы.

Таким образом, после адаптации системы к начальным условиям, в двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости образуются спектры Ирошникова–Крейчнана (1). Тщательное изучение всех полученных спектров на временном промежутке $t = 3 - 9$ показало, что полученый спектр самоподобно затухает, согласуясь с временной зависимостью в спектре Ирошникова–Крейчнана $\sqrt{\epsilon v_A}$, как и спектры двумерной затухающей МГД турбулентности при отсутствии вращения [20]. Аналогичные спектры Ирошникова–Крейчнана и эффекты самоподобного затухания наблюдаются в двумерной затухающей МГД турбулентности с параметрами Россби $\beta = 25; 50$.

Так как нормализованные компенсированные спектры двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости масштабно-инвариантны и практически совпадают на инерционном интервале $k \simeq 10 - 100$, мы переходим к исследованию нормализованных компенсированных спектров полной энергии, усредненных на статистически стационарном временном промежутке $t = 3 - 6$, двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости для различных параметров Россби $\beta = 10; 25; 50$. Сравнивая полученные спектры, оценим влияние вращения на динамику крупномасштабных взаимодействий и эффекты переноса. На рисунке 2 показаны скомпенсированные нормированные спектры полной энергии $\bar{E}(k) \cdot k^{3/2}$, усредненные на временном промежутке $t = 3 - 6$.

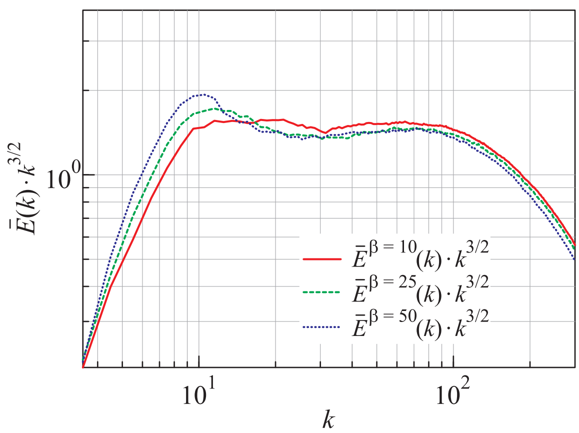

Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектры полной энергии, нормированные на $k^{3/2}$, скомпенсированные на временную зависимость $\sqrt{\epsilon v_A}$ и усредненные на временном промежутке $t = 3 - 6$ для различных параметров Россби. Сплошной линией показана зависимость модифицированного спектра для параметра Россби $\beta = 10$ от волнового числа k, штрихпунктирной линией – для параметра Россби $\beta = 25$, точечным пунктиром – для параметра Россби $\beta = 50$

Нормализованные компенсированные усредненные (модифицированные) спектры полной энергии двумерной вырождающейся магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости для параметров Россби $\beta = 10$, $\beta = 25$ и $\beta = 50$ (изображенные на рис. 2) масштабно-инварианты в волновых диапазонах $k \simeq 10 - 100$, $k \simeq 18 - 100$ и $k \simeq 26 - 100$ соответственно. Спектр полной энергии для данных случаев согласуется с спектральным законом Ирошникова- Крейчнана, но на разных инерционных интервалах. В крупных масштабах на волновых числах $k < 20$ модифицированные спектры для случаев $\beta = 10; 25; 50$ имеют различия, так как на данных масштабах эффекты вращения играют существенную роль. При наличии вращения в двумерной магнитогидродинамической турбулентности существуют решения в виде крупномасштабных волн Россби. Найдем волновое число, соответствующее границе между инерционным интервалом спектра Ирошникова–Крейчнана и областью доминирования волн Россби.

Используя выражение для спектра Ирошникова-Крейчнана (1), оценим характерное временя оборота вихря в магнитогидродинамическом течении в инерционном интервале как

$$\tau_k^{IK} = \frac{l_k}{v_l} = \frac{1/k}{\sqrt{E_k k}} = (v_A \epsilon)^{-1/4} k^{-3/4}. \qquad (7)$$

Приравнивая выражения для $(1/\tau_k^{IK})$ и дисперсионное соотношение для волн Россби

$$\omega = \frac{\beta k_x}{k^2},$$

получим волновое число, характеризующее границу между областью доминирования волн Россби и инерционным интервалом:

$$k_\beta^{IK} = \left(\frac{\beta^4}{v_A \epsilon}\right)^{1/7}. \qquad (8)$$

Заметим, что ранее в работе [8] введено характерное волновое число границы между областью доминирования волн Россби и магнитогидродинамической турбулентностью

$$k_\beta^M = \sqrt{\beta v / 2 v_A^2}, \qquad (9)$$

где v – среднеквадратичная скорость турбулентного течения. Волновые числа (9) и (8) различаются, так так первое описывает границу между областью доминирования волн Россби и магнитогидродинамической турбулентности, а второе описывает границу между областью, в которой существуют волны Россби, и инерционным интервалом, в котором возникает спектр Ирошникова–Крейчнана. Диапазон волновых векторов $k_\beta^M < k < k_\beta^{IK}$ является переходной областью, где существуют и волны Россби, и магнитогидродинамическая турбулентность (нелинейные альвеновские волны).

На рисунке 2 модифицированные спектры полной энергии двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости для параметров Россби $\beta = 10$ масштабно-инвариантны на диапазоне волновых чисел $k \simeq 11 - 100$. Инерционный интервал волновых чисел лежит правее характерного волнового числа границы области доминирования волн Россби (8), который для данного случая равен $k_\beta^{IK} = 10.1$. На волновых числах $k \gtrsim 100$ происходит диссипативный спад модифицированного спектра полной энергии. Таким образом, в двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости в волновом диапазоне $k < k_\beta^{IK}$ образуются волны Россби и изотропные магнитогидродинамические течения. В волновом диапазоне $k_\beta^{IK} < k < 100$ существует прямой каскад энергии и, как следствие, образуется спектр Ирошникова–Крейчнана. Усредняя значения модифицированного спектра в диапазоне волновых чисел $k = 10 - 100$, мы получаем значение $C' = 1.42$ (C' – константа, аналогичная константе Колмогорова, для спектра Ирошникова–Крейчнана (1)).

В случае МГД турбулентности на β-плоскости при параметре Россби $\beta = 25$ волны Россби образуются на волновых числах в диапазоне $k < k_\beta^{IK} = 16.4$, а при параметре Россби $\beta = 50$ в диапазоне $k < k_\beta^{IK} = 25.6$. Значение константы C' также различается для случаев с различными параметрами Россби. В случае МГД турбулентности на β-плоскости при параметре Россби $\beta = 25$ константа $C' = 1.36$, а при параметре Россби $\beta = 50$ константа $C' = 1.31$. Уменьшение константы C' с увеличением параметра Россби β связано с наличием профицита энергии в крупных масштабах для больших параметров Россби и дефицита на средних и мелких масштабах, где наблюдается спектр Ирошникова–Крейчнана.

Таким образом, численное моделирование демонстрирует следующую качественную картину спектров двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости. На рисунке 3 показано схематичное представление спектра полной энергии $E(k)$ двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β- плоскости. На оси волновых чисел k отмечены ключевые масштабы двумерной МГД турбулентности на β-плоскости. Волновое число k_β^M описывает границу между областью доминирования волн Россби и магнитогидродинамической турбулентностью. Также на данном волновом числе на более поздних моментах времени образуются зональные потоки. Волновое число k_β^{IK} описывает границу между областью, в которой существуют волны Россби, и инерционным интервалом. Волновое число k_d описывает границу между инерционным интервалом и интервалом диссипации. На волновых векторах $0 < k < k_\beta^{IK}$ образуются крупномасштабные волны Россби. В инерционном интервале $k_\beta^{IK} < k < k_d$ образуется спектр Ирошникова–Крейчнана, который самоподобно затухает. Таким образом граница между инерционным интервалом и волнами Россби (волновое число k_β^{IK} смещается вправо, так как мы не наблюдаем самоподобного затухания волн Россби. Интервал диссипации ($k < k_d$) растет в область крупных масштабов.

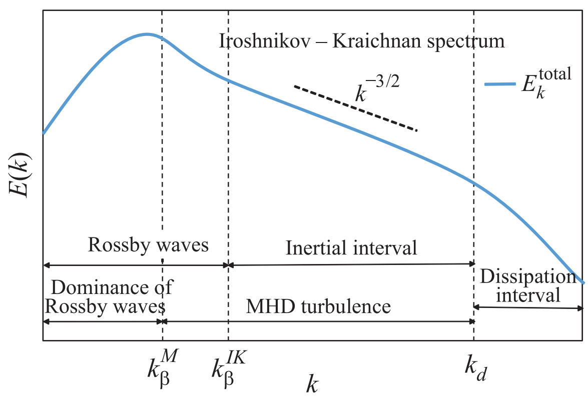

Рис. 3. (Цветной онлайн) Схематическое представление спектра полной энергии двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости.

Для двумерной МГД турбулентности характерен обратный каскад среднего квадрата магнитного потенциала и слияние магнитных островов (магнитных вихрей) в более крупные (см. главы 8.2.2 и 8.2.3 в книге [27]). Наши расчеты показывают в данной работе и в работе [8], что в двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости размеры магнитных островов в квазистационарном состоянии меньше размеров зональных потоков и зависят от значения параметра Россби β. Мы предполагаем, что в такой турбулентности обратный каскад квадрата магнитного потенциала останавливается на масштабе зональных потоков $l_\beta^M = 1/k_\beta^M$ и характерный масштаб магнитных островов l^{IM} меньше, либо равен масштабу зональных потоков $l^{IM} \le l_\beta^M$ ($k^{IM} \ge k_\beta^M$), что согласуется с результатами нашей работы. Так как обратный каскад квадрата магнитного потенциала проходит в области волновых векторов, лежащей слева от инерционного интервала прямого каскада полной энергии [27], масштабы магнитных островов l^{IM} больше масштабов, на которых образуется спектр Ирошникова—Крейчнана ($l^{IM} > 1/k_\beta^{IK}$). Таким образом, волновое число, характеризующее магнитные острова, лежит в области ($k_\beta^M \le k^{IM} < k_\beta^{IK}$).

Далее изучим спектральные свойства двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости для времен $t > 9$. Проанализируем спектры полной энергии двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости ($\beta = 10$) в моменты времени t_1, t_2 и t_3, где $t_3 > t_2 > t_1$, а $t_1 \simeq 10$ – момент времени, на котором еще наблюдается наличие спектра Ирошникова–Крейчнана. На рисунке 4 показаны нормированные спектры полной энергии $E(k) \cdot k^{3/2}$ двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости при параметре Россби $\beta = 10$.

Спектр полной энергии двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-

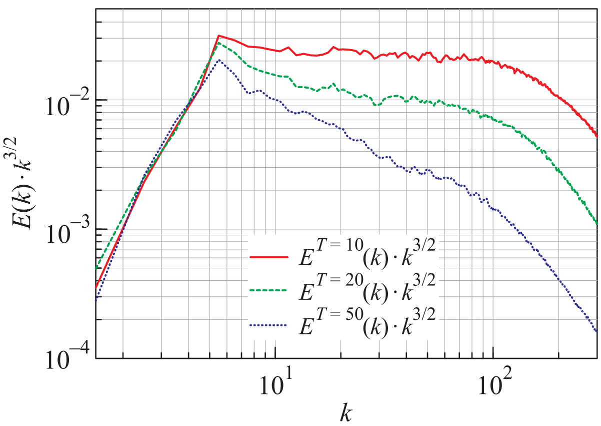

Рис. 4. (Цветной онлайн) Спектры полной энергии двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости ($\beta = 10$), нормированные на $k^{3/2}$. Сплошной линией показан нормированный спектр в момент времени $t = 10$, штрихпунктирной линией – для момента времени $t = 20$, точечным пунктиром – для момента времени $t = 50$

плоскости ($\beta = 10$) для момента времени $t = 10$ согласуется с законом Ирошникова–Крейчнана на инерционном интервале. На рисунке 4 соответствующий нормированный спектр масштабно-инвариантен на диапазоне $k \simeq 10 - 100$, соответствующем инерционному интервалу. Нормированные спектры полной энергии для моментов времени $t = 25$ и $t = 50$ не являются масштабно-инвариантными. Спектр полной энергии двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости после времени $t \simeq 10$ не согласуется со спектром Ирошникова–Крейчнана. Спектры полной энергии для моментов времени $t > 10$ затухают неравномерно на волновых числах, соответствующих инерционному интервалу, а не самоподобно, как ранее ($t < 10$). При этом остаются изменения наклона всех трех спектров на моментах времени $t = 10; 20; 50$ на волновом числе $k \simeq 100$, связанные с переходом к диссипативному интервалу. Так как область перехода остается на тех же волновых числах, мы не можем сказать, что нарушение самоподобного затухания с течением времени связанно с увеличением диссипативного интервала в область крупных масштабов.

Обнаруженное нарушение самоподобного затухания спектра Ирошникова–Крейчнана означает, что на данном временном промежутке спектральный перенос энергии определяется альтернативным механизмом, а не взаимодействием нелинейных альвеновских волн. Наше численное моделирование двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости показало, что для моментов времени $t > 20$ значение магнитной энергии в несколько раз превышает значение кинетической ($E^M/E^V = 5.5$ для $t = 20$), так же, как и в случае отсутствия вращения [20, 28]. Поэтому нелинейное слагаемое, связанное с магнитным полем, в уравнении (5a) оказывает сильное влияние на кинетическую энергию, а нелинейное слагаемое, связанное с вмороженностью, в уравнении (5b) оказывает слабое влияние на магнитную энергию. Из-за отсутствия баланса между этими двумя слагаемыми нелинейные альвеновские волны исчезают вследствие затухания. Динамика течений слабо влияет на магнитные силовые линии и они остаются квазистационарными, как это было показано в работе [8]. Из-за отсутствия баланса в энергообмене между кинетической и магнитной энергиями и, как следствие, отсутствия нелинейных альвеновских волн, механизм переноса полной энергии вдоль спектра нарушается, и спектр полной энергии в такой турбулентности не демонстрирует инерционный интервал. Тем не менее результаты численных экспериментов показывают, что именно на данном временном промежутке происходит образование зональных течений.

На рисунке 5 показаны нормированные спектры кинетической энергии $E_n^V(k)$ двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости при параметре Россби $\beta = 10$. Сплошной линией показана зависимость спектра, нормированного на $k^{3/2}$, от волнового числа k для момента времени $t = 10$, штрихпунктирной линией – зависимость спектра, нормированного на $k^{5/3}$, для момента времени $t = 50$. Спектр, соответствующий моменту времени $t = 10$ и нормированный на $k^{3/2}$, является масштабно-инвариантным в диапазоне волновых чи-

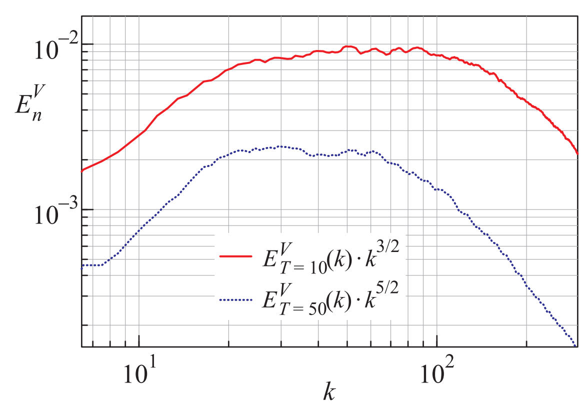

Рис. 5. (Цветной онлайн) Нормированные спектры кинетической энергии затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости ($\beta = 10$) для моментов времени $t = 10; 50$

сел $k \simeq 25 - 100$, спектр кинетической энергии согласуется с законом Ирошникова–Крейчнана $E(k) \sim \sim k^{-3/2}$ на интервале волновых чисел $k \simeq 25 - 100$, аналогично спектру полной энергии для момента времени $t = 10$ на рис. 4. Спектр кинетической энергии, соответствующий моменту времени $t = 50$ и нормированный на $k^{5/3}$, масштабно-инвариантен в диапазоне волновых чисел $k \simeq 20 - 60$, спектр кинетической энергии на данном моменте времени согласуется со спектром Коломогорова (2) со степенной зависимостью $E_k^V \sim k^{-5/3}$. Наши численные расчеты показывают, что на диапазоне волновых векторов $k > 60$ устанавливается спектр $E_k^V \sim k^{-3}$. Такая спектральная картина характерна для двумерной турбулентности нейтральной жидкости [15, 24]. В двумерной затухающей МГД турбулентности на β-плоскости, после нарушения самоподобного затухания спектра Ирошникова–Крейчнана, на диапазоне волновых векторов $k \simeq 20 - 60$ образуется инерционный интервал обратного каскада кинетической энергии со спектром кинетической энергии $E_k^V \sim k^{-5/3}$, а на диапазоне волновых векторов $k \simeq \simeq 60 - 100$ образуется инерционный интервал прямого каскада энстрофии со спектром кинетической энергии $E_k^V \sim k^{-3}$. Таким образом, для двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости характерен обратный каскад кинетической энергии на более поздних временах. Наличие переноса кинетической энергии в область крупных масштабов обеспечивает образование зональных течений [13–16], обнаруженных в такой турбулентности [8]. Детальное исследование процессов переноса кинетической и магнитной энергии в двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости на временах, для которых спектр Ирошникова–Крейчнана трансформируется в спектр Колмогорова, будет представлено в отдельной работе.

4. Заключение. Проведено численное моделирование затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости. Моделирование проведено с высоким разрешением, достаточным для анализа спектров турбулентности. Показано, что в спектрах однородной двумерной затухающей магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости существует область волновых векторов, в которой происходит прямой каскад полной энергии и образуется спектр Ирошникова–Крейчнана. В этом случае спектр турбулентности определяется взаимодействием нелинейных альвеновских волн. Область магнитогидродинамической турбулентности примыкает к области доминирования волн Россби, оценка которой получена в работе [8]. Получено выражение для характерного волнового числа, которое определяет начало инерционного интервала прямого каскада энергии в двумерной магнитогидродинамической турбулентности на β-плоскости. Показано наличие крупномасштабных волн Россби на диапазоне волновых векторов, который ограничен предложенным масштабом.

Обнаружено, что найденный спектр самоподобно затухает согласно выражению временной зависимости спектра Ирошникова–Крейчана. Выявлено, что на больших интервалах времени влияние нелинейных альвеновских волн уменьшается, так как значение магнитной энергии превышает значение кинетической в несколько раз. Обнаружено, что нарушается самоподобное затухание спектра полной энергии, и спектр больше не согласуется со спектром Ирошникова–Крейчнана. Показано, что на временах, когда нарушается самоподобное затухание спектра полной энергии, образуется спектр Колмогорова в инерционном интервале кинетической энергии. Именно обратный каскад кинетической энергии в инерционном интервале обеспечивает зарождение зональных течений.

Авторы признательны рецензенту за полезные замечания. Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “Базис”; выполнена по проекту КП19-270 “Вопросы происхождения и эволюции Вселенной с применением методов наземных наблюдений и космических исследований” программы крупных проектов по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом РАН; при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 19-02-00016.

1. A. Petrosyan, A. Balogh, M. L. Goldstein, J. Léorat, E. Marsch, K. Petrovay, B. Roberts, R. von Steiger, and J. C. Vial, Space Sci. Rev. **156**(1), 135 (2010)
2. J. F. Hawley and S. A. Balbus, Numerical Astrophysics **240**, 187 (1999).
3. В. И. Ильгисонис, *Классические задачи физики горячей плазмы: курс лекций*, Издательский дом МЭИ, М. (2015).
4. C. W. Horton and W. Horton, *Turbulent transport in magnetized plasmas*, World Scientific, Hackensack (2017).
5. В. П. Пастухов, Н. В. Чудин, Письма в ЖЭТФ **82**(6), 395 (2005).
6. P. A. Davidson, *Turbulence in Rotating, Stratified and Eelectrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge (2013).

7. S. M. Tobias, P. H. Diamond, and D. W. Hughes, Astrophys. J. **667**, 113 (2007).
8. Т. А. Зиняков, А. С. Петросян, Письма в ЖЭТФ **108**(2), 75 (2018).
9. J. B. Parker and N. C. Constantinou, Phys. Rev. Fluids **4**(8), 083701 (2019).
10. В. И. Ильгисонис, В. П. Пастухов, Физика плазмы **22**(3), 228 (1996).
11. P. H. Diamond, S. I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, 35 (2005).
12. Ö. D. Gürcan and P. H. Diamond, J. Phys. A: Math. Theor **48**, 293001 (2015).
13. P. B. Rhines, J. Fluid Mech. **69**, 417 (1975).
14. G. K. Vallis and M. E. Maltrud, J. Phys. Ocean. **23**, 1346 (1993).
15. С. Д. Данилов, Д. Гурарий, УФН **170**(9), 921 (2000).
16. G. Boffetta and R. E. Ecke, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).
17. A. Pouquet, J. Fluid Mech. **88**, 1 (1977).
18. Р. С. Ирошников, Астрономический журнал XL **4**, 742 (1963).
19. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **8**, 1385 (1965).
20. D. Biskamp and E. Schwarz, Phys. Plasmas **8**, 3282 (2001).
21. P. Tabeling, Phys. Rep. **362**, 1 (2002).
22. A. Alexakis and L. Biferale, Phys. Rep. **767**, 1 (2018).
23. А. Н. Колмогоров, Доклады Академии Наук СССР **32**, 19 (1941).
24. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
25. D. G. Fox and S. A. Orszag, J. Comput. Phys. **11**(4), 612 (1973).
26. S. A. Orszag, J. Atmos. Sci. **28**(6), 1074 (1971).
27. D. Biskamp, *Magnetohydrodynamic turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
28. R. Kinney, J. C. McWilliams, and T. Tajima, Phys. Plasmas **2**, 3623 (1995).