Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 2, с. 112 – 114 © 2020 г. 25 января

Точные решения стационарного аксиально симметричного уравнения Шредингера

А. Г. Кудрявцев[1)]

Институт прикладной механики РАН, 125040 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 2019 г.
После переработки 9 декабря 2019 г.
Принята к публикации 9 декабря 2019 г.

Рассматривается стационарное уравнение Шредингера в случае аксиальной симметрии. На основе формул обобщенного преобразования Мутара получены примеры двумерных потенциалов и точных решений уравнения Шредингера.

DOI: 10.31857/S0370274X20020113

Стационарное уравнение Шредингера в безразмерном виде $(\Delta - u\,(x,y,z))\,Y\,(x,y,z) = 0$ является математической моделью различных физических явлений. В случае $u = -E + V\,(x,y,z)$ это уравнение описывает нерелятивистскую квантовую систему с энергией E [1]. В случае $u = -\omega^2/c\,(x,y,z)^2$ уравнение описывает распространение акустических волн, имеющих частоту ω в неоднородной среде со скоростью звука c, и под именем уравнения Гельмгольца широко используется в теории волн [2]. Случай фиксированной частоты ω интересен при моделировании в акустической томографии [3]. Случай фиксированной энергии E для двумерного уравнения интересен в многомерной теории обратного рассеяния в связи с двумерными интегрируемыми нелинейными системами [4, 5].

В случае аксиальной симметрии стационарное уравнение Шредингера в цилиндрических координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - u\,(r,z)\right) Y\,(r,z) = 0. \tag{1}$$

Эффективным инструментом для нахождения точных решений одномерного уравнения Шредингера является преобразование Дарбу [6]. Обобщением одномерного преобразования Дарбу на случай двумерного уравнения Шредингера в декартовых координатах является преобразование Мутара [7]. В работах [8, 9] рассмотрено нелокальное преобразование Дарбу двумерного стационарного уравнения Шредингера в декартовых координатах, показано, что специальный случай нелокального преобразования Дарбу совпадает с преобразованием Мутара. В работе [10] на основе подхода статей [8, 9] рассмотрено стационарное аксиально симметричное уравнение Шредингера и получены формулы обобщенного преобразования Мутара для указанного уравнения.

Формулы обобщенного преобразования Мутара для уравнения (1) имеют вид [10]:

$$\tilde{u}\,(r,z) = u\,(r,z) - 2\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\ln\left(Y_0\,(r,z)\right) + \frac{1}{r^2} - 2\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln\left(Y_0\,(r,z)\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(Y_0\,(r,z)\,\tilde{Y}\,(r,z)\right) - \left(Y_0\,(r,z)\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Y\,(r,z)}{Y_0\,(r,z)}\right) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(Y_0\,(r,z)\,\tilde{Y}\,(r,z)\right) + \frac{1}{r}\,Y_0\,(r,z)\,\tilde{Y}\,(r,z) + \left(Y_0\,(r,z)\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Y\,(r,z)}{Y_0\,(r,z)}\right) = 0. \tag{4}$$

Здесь u – исходный потенциал уравнения (1), Y_0, Y – решения уравнения (1) с исходным потенциалом, $\tilde{u}$ – новый потенциал. Функция $\tilde{Y}$ определяется как решение совместной системы уравнений (3), (4). Функция $\tilde{Y}$ является решением уравнения (1) с новым потенциалом $\tilde{u}$.

Формулы обобщенного преобразования Мутара могут быть проверены прямыми вычислениями.

Отметим, что $Y = Y_0$, $\tilde{Y} = (r\,Y_0)^{-1}$ дает простой пример решения уравнений (3), (4).

Используем обобщенное преобразование Мутара для получения потенциалов и точных решений уравнения (1). В качестве первого примера рассмотрим $u = 0, Y_0 = r^2 - 2\,z^2, Y = z$. Из уравнений (2), (3), (4) получаем потенциал

[1)]e-mail: kudryavtsev_a_g@mail.ru

$$\tilde{u}_1 = \frac{4\,z^4 + 13\,r^4 + 20\,r^2 z^2}{\left(r^2 - 2\,z^2\right)^2 r^2}, \tag{5}$$

и решение уравнения (1) с этим потенциалом

$$\tilde{Y}_1 = \frac{4\,r^2 z^2 + r^4 + C_1}{r\,(r^2 - 2\,z^2)},$$

где C_1 – произвольная константа. Полученный потенциал (5) имеет сингулярности в точках обращения в нуль его знаменателя.

Для двумерного стационарного уравнения Шредингера в декартовых координатах эффективным методом получения несингулярных потенциалов является двукратное применение преобразования Мутара [9, 11]. Продолжим наш пример и применим обобщенное преобразование Мутара второй раз. Для этого возьмем $u = \tilde{u}_1$, $Y_0 = \tilde{Y}_1$. Из уравнения (2) получаем потенциал

$$\tilde{\tilde{u}}_1 = \frac{-8\,\left(r^2\left(\left(r^2 - 5\,z^2\right)^2 - 33\,z^4\right) + C_1\left(5\,r^2 + 2\,z^2\right)\right)}{\left(4\,r^2 z^2 + r^4 + C_1\right)^2}. \tag{6}$$

У этого потенциала знаменатель не обращается в нуль, если $C_1 > 0$.

В качестве иллюстрации получения точных решений стационарного аксиально симметричного уравнения Шредингера с помощью обобщенного преобразования Мутара получим точное решение уравнения (1) с потенциалом (6) из решения $Y_s = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$ с потенциалом $u = 0$. Рассмотрим $Y_0 = r^2 - 2\,z^2$, $Y = Y_s$. Из уравнений (3), (4) получаем следующее решение уравнения (1) с потенциалом (5)

$$\tilde{Y}_s = \frac{rz}{\left(r^2 - 2\,z^2\right)\sqrt{r^2 + z^2}}. \tag{7}$$

Далее выбираем $Y_0 = \tilde{Y}_1, Y = \tilde{Y}_s$ и получаем из уравнений (3), (4) искомое решение уравнений (1) с потенциалом (6)

$$\tilde{\tilde{Y}}_s = \frac{3\,r^4 - C_1}{\sqrt{r^2 + z^2}\left(4\,r^2 z^2 + r^4 + C_1\right)}. \tag{8}$$

Возникающая константа интегрирования положена равной нулю.

В случае $u < 0$ уравнение (1) совпадает с уравнением Гельмгольца для неоднородной среды с аксиальной симметрией. В качестве второго примера применения обобщенного преобразования Мутара рассмотрим $u = -k^2$, $Y_0 = \sin(kz)$, $Y = \cos(kz)$. Из уравнений (2)–(4) получаем потенциал

$$\tilde{u}_2 = -k^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{2\,k^2}{\left(\sin(kz)\right)^2} \tag{9}$$

и решение уравнения (1) с этим потенциалом

$$\tilde{Y}_2 = \frac{r^2 + C_2}{r\sin(kz)},$$

где C_2 – произвольная константа. Проведем второе обобщенное преобразование Мутара полагая $u = \tilde{u}_2, Y_0 = \tilde{Y}_2$. Из уравнения (2) получаем потенциал

$$\tilde{\tilde{u}}_2 = -k^2 + \frac{4}{\left(r^2 + C_2\right)} - \frac{8\,C_2}{\left(r^2 + C_2\right)^2}. \tag{10}$$

Этот потенциал заведомо удовлетворяет условию $\tilde{\tilde{u}}_2 < 0$ если $C_2 > 4\,k^{-2}$. Простой пример решения $(r\,Y_0)^{-1}$ для потенциала (10) имеет вид

$$\tilde{\tilde{Y}}_2 = \frac{\sin(kz)}{r^2 + C_2}.$$

Дифференциальный оператор в уравнении (1) допускает сдвиг по z. Поэтому во всех ранее полученных формулах для потенциалов и точных решений вместо z можно подставить $z + z_0$. В качестве следующего примера рассмотрим $u = -k^2$ и

$$Y_0 = \frac{\sin\left(k\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right)}{\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}},$$

$$Y = \frac{\cos\left(k\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right)}{\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}}.$$

Из уравнений (2)–(4) получаем потенциал

$$\tilde{u}_3 = -k^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{2\,k^2}{\left(\sin\left(k\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right)\right)^2} - \frac{2\,k\cot\left(k\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right)}{\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}} \tag{11}$$

и решение уравнения (1) с этим потенциалом

$$\tilde{Y}_3 = \frac{z + z_0 + C_3\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}}{\sin\left(k\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right) r},$$

где C_3 – произвольная константа. Проводим второе преобразование, полагая $u = \tilde{u}_3, Y_0 = \tilde{Y}_3$, и получаем потенциал

$$\tilde{\tilde{u}}_3 = -k^2 + 2\left(z + z_0 + C_3\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right)^{-2} + \frac{2\,C_3\,(z+z_0)}{\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\left(z + z_0 + C_3\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right)^2}. \tag{12}$$

Этот потенциал для $z \geq 0$ удовлетворяет условию $\tilde{\tilde{u}}_3 < 0$, если $\frac{2}{{z_0}^2(1+C_3)} < k^2$. Простой пример решения $(r\, Y_0)^{-1}$ для потенциала (12) имеет вид

$$\tilde{\tilde{Y}}_3 = \frac{\sin\left(k\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}\right)}{z + z_0 + C_3\sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}}.$$

Рассмотренные примеры иллюстрируют, что повторное применение обобщенного преобразования Мутара может приводить к потенциалам, которые более интересны с точки зрения физической интерпретации, чем полученные при однократном преобразовании потенциалы. Для удобства построения многократных обобщенных преобразований Мутара удобно использовать формулу суперпозиции двух преобразований. Пусть Y_1 и Y_2 являются решениями уравнения (1) с потенциалом u. Применяя последовательно формулы обобщенного преобразования Мутара, получаем следующую формулу суперпозиции двух преобразований:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{u}} &= u - 2\,\frac{\partial^2 \ln(F)}{\partial r^2} - 2\,\frac{\partial^2 \ln(F)}{\partial z^2} = \\ &= u + 2\left(\frac{\partial Y_2}{\partial z}\right)\left(2\,r\frac{\partial Y_1}{\partial r} + Y_1\right)F^{-1} - \\ &- 2\left(\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right)\left(2\,r\frac{\partial Y_2}{\partial r} + Y_2\right)F^{-1} + \\ &+ 2\,r^2\left(\frac{\partial Y_2}{\partial r}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial r}\right)^2 F^{-2} + \\ &+ 2\,r^2\left(\frac{\partial Y_2}{\partial z}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right)^2 F^{-2},\end{aligned} \tag{13}$$

где F удовлетворяет совместной системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z}F = r\left(\frac{\partial Y_2}{\partial r}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial r}\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}F = -r\left(\frac{\partial Y_2}{\partial z}Y_1 - Y_2\frac{\partial Y_1}{\partial z}\right). \tag{15}$$

Формулы (13)–(15) инвариантны относительно замены $Y_1 \to Y_2, Y_2 \to Y_1, F \to -F$, что отражает свойство коммутативности обобщенных преобразований Мутара, результат не зависит от порядка выбора функций Y_1, Y_2 для преобразования. Примеры решений для уравнения (1) с потенциалом (13) можно получить по формулам $\tilde{\tilde{Y}}_1 = Y_1 F^{-1}$, $\tilde{\tilde{Y}}_2 = Y_2 F^{-1}$.

Из формулы (13) видно, что в случае отсутствия особенностей у исходного потенциала u и у числителей дробей, содержащих Y_1, Y_2 и их производные (заведомо реализуется, если решения имеют вид полиномов), особенности потенциала $\tilde{\tilde{u}}$ возникают за счет нулей функции F. Так как функция F задается уравнениями (14), (15) с точностью до прибавления произвольной константы, иногда возможно сделать функцию F знакопостоянной и получить потенциал $\tilde{\tilde{u}}$ без особенностей. Как раз в рассмотренном нами первом примере $u = 0$, $Y_1 = r^2 - 2\,z^2$, $Y_2 = z$, что дает знакопостоянную при $C_1 > 0$ функцию $F = -\left(4\,r^2 z^2 + r^4 + C_1\right)/4$ и результирующий потенциал (6) не имеет особенностей. Примеры решений для этого случая:

$$\frac{r^2 - 2\,z^2}{4\,r^2 z^2 + r^4 + C_1},\ \frac{z}{4\,r^2 z^2 + r^4 + C_1}.$$

В заключение отметим, что обобщенное преобразование Мутара может быть инициировано любым точным решением стационарного аксиально симметричного уравнения Шредингера и проведено произвольное число раз. С помощью обобщенного преобразования Мутара может быть получено множество новых примеров потенцтиалов и точных решений, в том числе варианты, интересные для описания физических процессов.

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory,* Pergamon Press, Oxford (1977), p. 75.
2. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, and A. P. Sukhorukov, *The Wave Theory,* Nauka Publishers, M. (1990), p. 168.
3. A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2001), p. 205.
4. A. P. Veselov and S. P. Novikov, Soviet Math. Dokl. **30**, 705 (1984).
5. P. G. Grinevich, A. E. Mironov, and S. P. Novikov, Russ. Math. Surv. **65**, 580 (2010).
6. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1991), p. 7.
7. T. Moutard, J. Ecole Polyt. **45**, 1 (1878).
8. A. G. Kudryavtsev, Phys. Lett. A **377**, 2477 (2013).
9. A. G. Kudryavtsev, Theor. Math. Phys. **187**, 455 (2016).
10. A. G. Kudryavtsev, arXiv:1911.05023 (2019).
11. I. A. Taimanov and S. P. Tsarev, Theor. Math. Phys. **157**, 1525 (2008).