Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 7, стр. 375 – 377 *10 апреля 1989 г.*

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ДВУМЕРНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ КИРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

С.Н.Вергелес

Предлагается новый метод квантования для теорий поля широкого класса. Этот метод демонстрируется на примере неабелевой киральной модели Швингера.

1. В недавней работе автора [1] была высказана идея нового метода динамического квантования, которая реализуется здесь в математически строгой форме на примере одной из простейших так называемых аномальных калибровочных теорий – неабелевой киральной модели Швингера. В результате эта модель оказывается калибровочно- и лоренц-инвариантной со спектром элементарных возбуждений $\omega(k) = k,\ k > 0$.

Вкратце изложим суть метода динамического квантования.

При динамическом квантовании регуляризация осуществляется путем наложения связей второго рода на степени свободы в глубоко ультрафиолетовой области. Наложение связей второго рода учитывается автоматически при использовании соответствующих коммутационных соотношений (КС) Дирака [2] вместо исходных КС полей. Основанием для такой регуляризации в случае асимптотически свободных теорий является то, что вследствие слабого взаимодействия в глубоко ультрафиолетовой области имеется возможность корректного выделения чисел заполнения a^+a определенных мод, которые являются адиабатическими инвариантами движения. Более того, соответствующие операторы рождения a^+ и уничтожения a коммутируют со связями первого рода – генераторами калибровочных преобразований. Поэтому наложение связей второго рода $a^+ \approx 0,\ a \approx 0$ является динамически самосогласованным и не нарушает традиционного толкования калибровочных теорий.

Заметим, что имеющаяся программа квантования аномальных теорий Фаддеева и Шаташвили [3] выводит за рамки традиционного толкования калибровочных теорий.

2. Рассмотрим одномерную динамическую систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2} e^2 (E^a)^2 - i\varphi^+ \nabla_1 \varphi - A_0^a \chi^a \right\}. \tag{1}$$

Здесь $\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu,\ \mu = 0,1,\ A_\mu = A_\mu^a t^a$, t^a – генераторы алгебры Ли калибровочной группы, φ – комплексное грассманово поле, поля A_0^a играют роль лагранжевых множителей при связях

$$\chi^a = (\nabla_1 E)^a + \varphi^+ t^a \varphi \approx 0. \tag{2}$$

Далее буквами x, y обозначаем пространственную координату x^1, а буквой t – время. Гамильтониан (1) и исходные КС

$$[\varphi(t, x), \varphi^+(t, y)] = 1\delta(x - y)$$
$$[A_1^a(t, x), E^b(t, y)] = i\delta^{ab}\delta(x - y) \tag{3}$$

приводят к уравнениям движения Гейзенберга, из которых содержательным является лишь ур. Вейля

$$i(\nabla_0 + \nabla_1)\varphi = 0 . \tag{4}$$

Обозначим через $\{\varphi_{km}(t,x)\}$, $-\infty < k < +\infty$, $m = 1, \dots, N$ – полный ортонормированный набор решений ур. (4) с начальными условиями при $t = t_0$

$$\varphi_{km}(t_0, x) = (P\exp i\int_{-\infty}^{x} A_1(t_0, y)dy)u_m \exp(ikx), \tag{5}$$

где P есть оператор упорядочения вдоль контура интегрирования и $\{u_m\}$ – ортонормальный базис в пространстве, в котором действуют матрицы t^a. Разложим поля φ и φ^+ по наборам функций $\{\varphi_{kn}\}$ и $\{\varphi^+_{kn}\}$ с коэффициентами $\{a_{kn}\}$ и $\{a^+_{kn}\}$, соответственно:

$$\varphi(t, x) = \sum_n \int \frac{dk}{2\pi} \varphi_{kn}(t, x) a_{kn} ,$$

$$\varphi^+(t, x) = \sum_n \int \frac{dk}{2\pi} a^+_{kn} \varphi^+_{kn}(t, x).$$

Из определения функций φ_{kn}, ур. (4) и КС (3) следует, что уравнения движения и нулевые КС в терминах переменных $\{a_{kn}, a^+_{kn}\}$ имеют вид

$$\dot{a}_{kn} = 0, \quad \dot{a}^+_{kn} = 0 \tag{6}$$

$$[a_{km}, a^+_{pn}] = 2\pi\delta_{mn}\delta(k - p) . \tag{7}$$

Кроме того, получаем КС

$$[a_{km}, \chi^a] = 0, \quad [a^+_{km}, \chi^a] = 0 \tag{8}$$

и убеждаемся, что переменные $\{a_{km}, a^+_{km}\}$ коммутируют с полем A_1, а также имеет место КС $[\varphi_{km}(y), \chi^a(x)] = t^a\delta(x - y)\varphi_{km}(y)$.

Таким образом, уравнения движения (6) и КС (8) показывают, что для регуляризации теории естественно наложить связи второго рода

$$a^+_{km} \approx 0, \quad a_{km} \approx 0 \text{ для } |k| > \Lambda \to \infty . \tag{9}$$

3. Теперь мы должны выписать КС Дирака, соответствующие связям (9). Мы следуем схеме, предложенной Дираком [2] в случае классической механики. При переходе к квантовой механике возникающая проблема упорядочения операторов должна быть решена таким образом, чтобы имело место соотношение

$$[A, BC]^* = [A, B]^*C + B[A, C]^*(-1)^{\alpha(A)\alpha(B)}, \tag{10}$$

где $[\dots,\dots]^*$ обозначает КС Дирака и α – функция четности, определенная на однородных операторах со значениями в $\mathbb{Z}_2$. Если КС Дирака определены на фундаментальных полях $(A_1, E, \varphi^+, \varphi)$, то их можно распространить на любые функционалы фундаментальных полей по индукции при помощи соотношения (10). Если КС Дирака на фундаментальных полях билинейны, удовлетворяют супертождеству Якоби и соотношению

$$[A, B]^* = -[B, A]^*(-1)^{\alpha(A)\alpha(B)},$$

то всеми этими свойствами будут обладать также КС Дирака для операторов общего вида.

Ниже выписаны ненулевые КС Дирака для фундаментальных полей, при вычислении которых используются КС (3), (7), (8):

$$[\varphi(x), \varphi^+(y)]^* = \sum_m \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \varphi_{km}(x)\varphi^+_{km}(y), \tag{11}$$

$$[A^a_1(x), E^b(y)]^* = i\delta^{ab}\delta(x-y),$$

$$[\nabla_1 E^a(x), \varphi(y)]^* = -\sum_m \int_{|p|>\Lambda} \frac{dp}{2\pi}\varphi_{pm}(y)(\varphi^+_{pm}(x)t^a\varphi(x)),$$

$$[\nabla_1 E^a(x), \nabla_1 E^b(y)]^* = if_{abc}(\nabla_1 E^c(x))\delta(x-y) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_m \int_{|p|>\Lambda} \frac{dp}{2\pi}\{[(\varphi^+_{pm}(y)t^b\varphi(y))(\varphi^+(x)t^a\varphi_{pm}(x)) +$$

$$+(\varphi^+(y)t^b\varphi_{pm}(y))(\varphi^+_{pm}(x)t^a\varphi(x)) - [(xa)\leftrightarrow(yb)]\}.$$

Путем прямой проверки нетрудно убедиться, что КС (11) удовлетворяют супертождеству Якоби. Из (8) вытекает также, что

$$[\chi^a(x), \chi^b(y)]^* = if_{abc}\delta(x-y)\chi^c(x). \tag{12}$$

При использовании КС Дирака можно считать, что связи (9) выполняются в сильном смысле и новые уравнения движения получаются из формальных ур. (4) лишь вычеркиванием переменных (9). Поэтому фермионный ток $J^{\mu a} = (\varphi^+ t^a \varphi, \varphi^+ t^a \varphi)$ регуляризован и при изучении его динамики можно пользоваться ур. (4) непосредственно. Таким образом находим

$$\nabla_\mu J^\mu = 0\,. \tag{13}$$

Ур. (12) и (13) означают калибровочную инвариантность теории.

4. Основное состояние определяется согласно $|\,0\rangle = \prod_{-\Lambda<k<0} a^+_{k1}\ldots a^+_{kN}$. Операторы уничтожения мезона и бариона с импульсом $k>0$ имеют вид

$$c_k = \int dx \exp(-ikx)\varphi^+(x)\varphi(x), \quad k>0,$$
$$b_k = \int dx \exp(-ikx)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_N(x), \quad k>0, \tag{14}$$

соответственно, причем $c_k|\,0\rangle = b_k|\,0\rangle = 0$. Вследствие того, что $[c^+_k, H]^* = -kc^+_k$ и $[b^+_k, H]^* = -kb^+_k$ состояния $c^+_k|\,0\rangle$ и $b^+_k|\,0\rangle$ имеют энергию $\omega(k) = k$. Таким образом, лоренц-инвариантность имеет место на всех импульсах если перейти к пределу $\Lambda\to\infty$. Укажем также формулу $[c_k, c^+_p]^* = kN\delta(k-p)$, из которой следует, что состояние $c^+_k|\,0\rangle$ нормируемо и мезоны являются бозе-частицами. Заметим, что калибровочно-инвариантные, но нелокальные операторы рождения "частиц" не диагонализуют гамильтониан (1) на фоне основного состояния $|\,0\rangle$.

Очевидно, теория унитарна. Отметим, что близкий взгляд на калибровочную аномалию содержится в работе Грибова [4].

Литература

1. *Вергелес С.Н.* ЖЭТФ, 1989, 95, 397.
2. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979, с. 437.
3. *Фаддеев Л.Д., Шаташвили С.Л.* ТМФ, 1984, 60, 206; *Faddeev L.D., Shatashvili S.L.* Phys. Lett. B, 1986, 167, 225.
4. *Gribov V.N.* Budapest preprint KFKI-66. 1981.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 марта 1989 г.