

Дискретные вихри в системах связанных нелинейных осцилляторов: численные результаты для электрической модели

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 3 марта 2020 г.

После переработки 5 марта 2020 г.

Принята к публикации 5 марта 2020 г.

Теоретически исследуются вихревые когерентные структуры на массивах нелинейных осцилляторов, объединенных слабыми связями в топологически нетривиальные дискретные двумерные многообразия. В качестве возможной физической реализации таких объектов рассмотрена электрическая схема из нелинейных колебательных контуров, связанных относительно малыми емкостями. Численные эксперименты показали, что монохроматическое по времени внешнее воздействие, приложенное к нескольким осцилляторам, в широкой области параметров приводит к формированию в системе долгоживущих и нетривиально взаимодействующих вихрей на квазистационарном фоне. Динамика вихрей оказывается различной в зависимости от способа “сшивки” связями противоположных сторон прямоугольного массива, чем определяется топология получающегося многообразия (тор, бутылка Клейна, проективная плоскость, лист Мебиуса, кольцо или диск).

DOI: 10.31857/S0370274X2007005X

Введение. Как известно, нелинейные комплексные волновые поля способны образовывать квантованные вихри в двух и трех пространственных измерениях [1–7]. Типичный тому пример – вихри в захваченных Бозе-конденсатах холодных атомов (которые описываются конденсатной волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в рамках уравнения Гросса–Питаевского). Нетривиальные динамические свойства этих объектов привлекли к себе большое внимание исследователей (см., в частности, [8–19]). Вихревые структуры существуют не только в сплошных средах, но и в дискретных системах (вихри и вихревые солитоны на решетках; см. [20–29] и ссылки там). Как физически, так и математически, реализация динамических систем на решетках может быть различной. Например, в массивах связанных нелинейных осцилляторов возможность существования вихрей обусловлена наличием на каждом узле канонического комплексного параметра порядка $a_n = \sqrt{S_n} \exp(i\Theta_n) = A_n(t) \exp(-i\omega_0 t)$, где S_n и Θ_n – переменные действие-угол для отдельно взятого осциллятора, а ω_0 – частота колебаний в пределе малых амплитуд. Фаза Θ при обходе по замкнутому контуру вдоль связей может небольшими изменениями набирать приращение, кратное 2π , образуя тем самым дискретный вихрь. Но чтобы такой объект имел отчетливо выраженную локализованную сердцевину

и был долгоживущим на модуляционно устойчивом ненулевом фоне “плотности” S , влияние нелинейности должно быть дефокусирующим. Сердцевина вихря (провал плотности) может быть при этом шириной всего около одного шага решетки и даже в некотором смысле меньше, но влияние его фазы простирается на всю систему. Этим обычные вихри отличаются от локализованных вихревых солитонов, имеющих место при фокусирующей нелинейности. Взаимодействие дискретных вихрей между собой и с узлами решетки приводит к сложной динамике, которая и является темой данной работы.

Одной из относительно простых и универсальных математических моделей, допускающих вихревые решения, является слабодиссипативное дискретное нелинейное уравнение Шредингера с накачкой,

$$i(\dot{A}_n + \gamma\omega_0 A_n) = g|A_n|^2 A_n + \frac{1}{2} \sum_{n'} c_{n,n'} (A_n - A_{n'}) + f_n(t), \quad (1)$$

где γ – малый коэффициент линейного затухания, g – нелинейный коэффициент, $c_{n,n'}$ – (действительная) матрица связей, $f_n(t)$ – комплексная огибающая внешнего квазимонохроматического воздействия (вблизи резонансной частоты). В частности, различные метаматериалы описываются такого рода уравнением (см., например, [30] и ссылки там). Здесь собраны эффекты нелинейности, дисперсии, диссипации, а также резонансной накачки. Реально воз-

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

можные осцилляторы удовлетворяют такому универсальному уравнению лишь приблизительно, и только в слабонелинейном режиме. Поэтому, если говорить о перспективах создания искусственных материалов, способных демонстрировать дискретные вихри, то ограничиваться уравнением (1) нельзя, и представляет интерес исследование сильно нелинейных, физически реализуемых систем.

Надо сказать, что практически удобным вариантом воплощения связанных нелинейных осцилляторов оказались электрические схемы с обратно смещенными по напряжению варакторными диодами (переменными емкостями, зависящими от приложенного напряжения) [31–45]. В частности, с их помощью были проделаны эксперименты, моделирующие динамику солитонов на интегрируемой цепочке Тоды [31–34]. Помимо диодов, в настоящее время разработаны также нелинейные конденсаторы на основе специальных диэлектрических пленок [46, 47].

В зависимости от конструкции схемы нелинейность может быть как фокусирующей на больших масштабах, так и дефокусирующей. До настоящего времени изучались, в основном, фокусирующие варианты, где имеет место модуляционная неустойчивость длинных волн. Объектами таких исследований были дискретные солитоны, бризеры и вихревые солитоны [20, 22, 42, 43]. Эти сильно локализованные структуры образуются на модуляционно неустойчивых сетках даже небольшого размера (меньше, чем 10×10) и занимают всего несколько ячеек [43]. В отличие от них, для полноценного наблюдения вихрей на модуляционно устойчивых массивах связанных осцилляторов требуется большое число элементов, порядка 30×30 и более, поскольку пространственное распределение фаз вихрей, как правило, делокализовано. Создание столь больших конструкций требует серьезных затрат. Видимо, поэтому вихри на сетках пока не наблюдались экспериментально. Не привлек до сих пор широкого внимания и тот интересный факт, что системы электрических осцилляторов допускают возможность конструирования связей таким образом, чтобы получались топологически нетривиальные дискретные многообразия, например, лист Мебиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость и др. Поскольку вихри – объекты дальнедействующие, топология многообразия должна оказывать на них сильное влияние. Несколько известно автору, вопрос о динамике дискретных вихрей на сложных многообразиях до сих пор не исследовался (в отличие от дискретных солитонов на квазидномерном листе Мебиуса [48]). Цель данной работы – до некоторой степени заполнить этот

пробел, пока что только путем численного моделирования достаточно реалистичной электрической модели. Как мы увидим далее, уже первые результаты оказались нетривиальными и интересными. Собственно, само наблюдение в численном эксперименте долгоживущих вихрей на дискретной слабодиссипативной электрической схеме под внешним периодическим воздействием в режиме нелинейного резонанса осуществлено здесь впервые.

Описание модели. Для теоретического рассмотрения предлагается электрическая схема, составленная из нелинейных колебательных контуров с относительно слабыми емкостными связями между ними, как показано на рис. 1. Связь между этой схе-

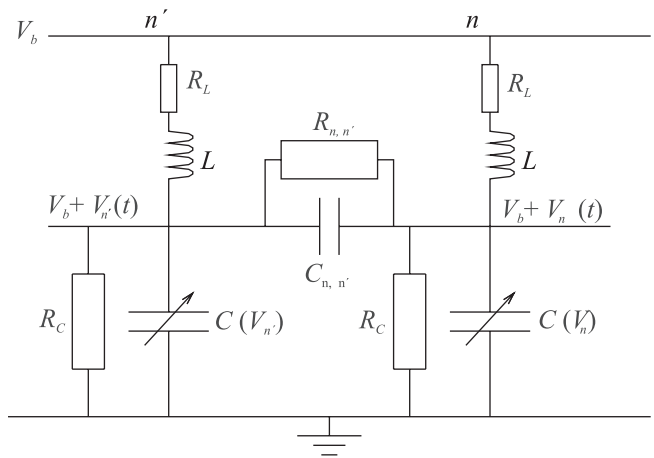


Рис. 1. Схема связанных нелинейных электрических осцилляторов. Показан только фрагмент полной сети (две ячейки и связь между ними)

мой и уравнением (1) обсуждалась в недавней работе автора [45]. Состояние системы описывается напряжениями $V_n(t)$, а также токами $I_n(t)$ через катушки индуктивности L по направлению к соответствующему конденсатору. Предполагается использование тороидальных катушек, чтобы исключить взаимную индукцию. Нелинейными элементами здесь являются емкости $C(V_n)$. Для простоты в данной работе используется функциональная зависимость емкости от напряжения в виде

$$C(V_n) = C_0(1 + V_n^2/V_*^2), \quad (2)$$

с некоторым параметром V_* (порядка нескольких вольт). Такая симметричная зависимость характерна для конденсаторов с диэлектрическими пленками [46, 47]. Подача напряжения смещения V_b делает возможным использование также варакторных диодов, которые (в параллельном соединении с обычным

конденсатором) приближенно описываются фидирующей формулой (см., например, [49])

$$C(V_n) = C_0 \left[\mu + (1 - \mu)/(1 + V_n/V_*)^\nu \right], \quad (3)$$

где $0 < \mu < 1$ учитывает параллельно подключенный простой конденсатор, а подгоночный параметр диода ν зависит от технологии изготовления и обычно лежит в диапазоне $0.3 \lesssim \nu \lesssim 6.0$ (кстати сказать, для реализации цепочки Тоды необходимо брать $\nu = 1$). В любом случае, запасенная электростатическая энергия на конденсаторе (дополнительная по сравнению с состоянием $V_n = 0$) определяется формулой

$$W(V_n) = \int_0^{V_n} C(u) u du, \quad (4)$$

тогда как дополнительный электрический заряд есть

$$q_n = q(V_n) = \int_0^{V_n} C(u) du. \quad (5)$$

Все емкости $C_{n,n'}$ на связях предполагаются линейными и малыми по сравнению с C_0 . Вообще говоря, связи не обязаны быть одинаковыми, что дает дополнительную свободу в конструировании массивов с пространственно неоднородными свойствами. Можно создавать как локально периодические решетки, так и квазикристаллические, а также (псевдо)случайные.

В той мере, в какой соединительные провода имеют пренебрежимо малые сопротивления, индуктивности и емкости, фактическое расположение элементов схемы в пространстве не существенно. Очевидно, что благодаря гибкости и небольшому поперечному сечению проводов потенциально реализуемы сети с практически любой топологией.

Чтобы электрическая модель была реалистичной, в нее следует включить диссипативные элементы – малое активное сопротивление катушки $R_L \ll \ll \sqrt{L/C_0}$, а также большие сопротивления утечки конденсаторов $R_C \gg \sqrt{L/C_0}$ и $R_{n,n'} \gg \sqrt{L/C_0}$. Для простоты, здесь не учитывается возможная нелинейная зависимость R_C от приложенного к конденсатору напряжения. Кроме того, для компенсации потерь энергии системы, к некоторым из осцилляторов (к относительно небольшому их числу) подведено переменное по времени напряжение $\mathcal{E}_n(t)$ (генератор включен последовательно с катушкой; на рис. 1 не показано).

В общем случае, из-за конечности R_C стационарное значение напряжения на конденсаторе слегка отличается от V_b , но этим отличием можно пренебречь

по чрезвычайно малому параметру R_L/R_C . Система уравнений движения тогда имеет вид

$$C(V_n) \dot{V}_n + \sum_{n'} [C_{n,n'} (\dot{V}_n - \dot{V}_{n'}) + (V_n - V_{n'})/R_{n,n'}] + V_n/R_C = I_n, \quad (6)$$

$$L \dot{I}_n + V_n + R_L I_n = \mathcal{E}_n(t). \quad (7)$$

Чтобы в численном алгоритме разрешить эту систему относительно временных производных \dot{V}_n , можно использовать итерации, соответствующие схеме Эйлера для релаксации к положению равновесия. Сходимость итераций при этом обеспечивается симметрией и положительной определенностью матрицы $\{[C(V_n) + \sum_m C_{n,m}] \delta_{n,n'} - C_{n,n'}\}$, присутствующей в уравнении (6). Результат итераций можно затем подставлять в процедуру Рунге–Кутты четвертого порядка для продвижения по времени, что фактически и делалось. При вычислениях использовались обезразмеренные переменные, соответствующие значениям $L = 1$, $C_0 = 1$, $V_* = 1$. Частота малых колебаний при этом $\omega_0 = 1$, а их период $T_0 = 2\pi$. Заметим еще, что в отсутствие связей и диссипации каждый осциллятор обладал бы законом сохранения энергии $\varepsilon_n = LI_n^2/2 + W(V_n)$.

Принципиально важным для нас является требование, чтобы нелинейный сдвиг частоты $\delta\omega_{nl} = g|A|^2$ отдельно взятого колебательного контура был отрицательным, поскольку, как показано в работе [45], доминирующие элементы матрицы $c_{n,n'}$ соответствующего уравнения (1) оказываются отрицательными несмотря на положительную определенность энергии связей в нашей модели. Особенно легко в этом убедиться на примере квадратной бесконечной решетки, вычислив закон дисперсии для линеаризованной системы и убедившись в отрицательности квадратичной поправки к частоте на малых волновых числах. При совпадении знаков нелинейного коэффициента и дисперсионной поправки действие нелинейности будет дефокусирующим в квазинепрерывном пределе, что необходимо для формирования устойчивого фона, на котором существуют вихри. С функцией (2) это условие выполняется автоматически (поскольку в этом случае $g = -3/4$), а с функцией (3) – в области параметров

$$g = \nu(1 - \mu)[-3 + \nu(1 - 4\mu)]/24 < 0. \quad (8)$$

Мы будем предполагать, что диссипация в катушке преобладает над диссипацией утечек, так что добротность отдельного осциллятора

$$Q^{-1} = \gamma = \left(R_L \sqrt{C_0/L} + R_C^{-1} \sqrt{L/C_0} \right) / 2 \quad (9)$$

определяется, в основном, первым слагаемым. Численные эксперименты показали, что для наблюдения вихрей требуется высокая добротность $Q \gtrsim 10^3$. Это требование выглядит вполне реалистичным. Например, для катушки с индуктивностью $L = 1.0 \cdot 10^{-4}$ Гн и сопротивлением $R_L = 1$ Ом (такая катушка из медной проволоки длиной 10 м и сечением 0.2 мм^2 имеет размеры в несколько сантиметров), при значениях $C_0 = 1.0 \cdot 10^{-10}$ Ф и $R_C > 10^7$ Ом, мы получаем $\omega_0 = 1.0 \cdot 10^7$ рад/с (что соответствует частоте около 1.6 МГц) и достаточно большую добротность $Q > 10^3$. При низких температурах сопротивление меди падает, и добротность повышается еще более.

Численные эксперименты. В компьютерных вычислениях элемент двумерного массива $N_1 \times N_2$ нумеровался мультииндексом $n = n_2 + N_2 n_1$, причем $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$, $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$. Отличными от нуля могли быть только связи между ближайшими соседями, либо между элементами на противоположных сторонах прямоугольника. Если обе противоположные стороны сшивались связями в прямом порядке $[(0, n_2) \leftrightarrow (N_1 - 1, n_2), (n_1, 0) \leftrightarrow (n_1, N_2 - 1)]$, то получался тор. Если одно направление сшивалось в прямом порядке, а второе – в обратном $[(n_1, 0) \leftrightarrow (n_1, N_2 - 1) \leftrightarrow (N_1 - 1 - n_1, N_2 - 1)]$, то получалась бутылка Клейна (на таком неориентируемом многообразии переход вихря через край по “перевернутому” направлению приводит к его появлению вблизи противоположной стороны прямоугольника в симметричной относительно центра точке, но уже с другим знаком). Если оба направления сшить в обратном порядке, то получается проективная плоскость. Кроме того, если по первому направлению противоположные стороны не сшивать вовсе, а по второму сшить в обратном порядке, то получается лист Мебиуса. Моделировались также вихри на диске.

В представленных ниже численных экспериментах $N_1 = N_2 = 60$, причем для удобства узлы расположены на квадратной решетке с произвольно выбранным шагом $h = 0.06$, для того, чтобы общий размер системы оказался порядка единицы. Внешний сигнал $\mathcal{E}_n(t)$ брался монохроматическим с частотой $(1 - \Delta)$, чтобы ввести систему в состояние нелинейного резонанса, когда амплитуда колебаний определяется, главным образом, частотой воздействия в соответствии с оценкой $gS \approx -\Delta$ и в меньшей степени – амплитудой воздействия. Для диска и листа Мебиуса воздействие было приложено к узлам, расположенным вдоль естественной границы. Из тора, бутылки Клейна и проективной плоскости вырезался диск, и сигнал подавался на узлы вблизи образовавшейся границы. Чтобы вихрям было энергетически

выгодно сформироваться, начальные фазы сигнала зависели от n , равномерно увеличиваясь при обходе вдоль границы до величины $2\pi M$, где M – целое число (брались значения M порядка 10). В случае диска и тора число M определяло количество вихрей в образовавшемся кластере (при достаточной амплитуде воздействия). Во всех других случаях простого соответствия между M и числом вихрей не было: они зарождались и исчезали, причем как парами вихрь-антивихрь, так и поодиночке при столкновениях с круговой границей.

Из-за большого числа параметров, задействованных в численных экспериментах, полученных результатов пока что еще недостаточно, чтобы дать исчерпывающее описание всевозможных динамических режимов. Поэтому здесь приведены только некоторые примеры. Но и они ясно свидетельствуют о нетривиальных свойствах вихрей на электрических массивах. Брались следующие значения безразмерных параметров: $R_L = 0.001$, $1/R_C = 0.0001$, $C_{n,n'} = 0.1$, $1/(R_{n,n'}C_{n,n'}) = 0.0001$. Амплитуда внешнего сигнала \mathcal{E}_n была 0.06, а отстройка его частоты $\Delta = 0.14$. Параметр $M = 7$. В начальном состоянии все осцилляторы имели $I_n(0) = 0$ и одинаковые значения $V_n(0) \sim 1$. После начального переходного периода, с продолжительностью около $1000T_0$, устанавливался более-менее однородный фон плотности, на котором двигались зародившиеся к тому времени вихри. Дальнейшая их эволюция была существенно различной в зависимости от топологии многообразия, как показано на рис. 2–6, где приведены кар-

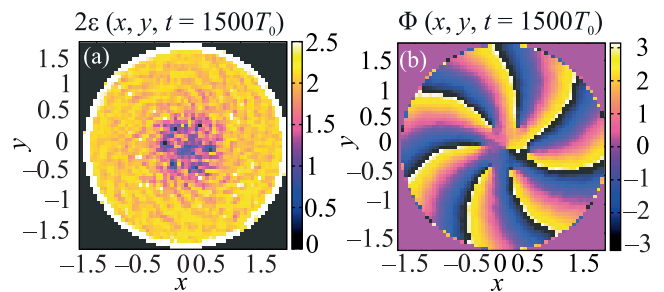


Рис. 2. (Цветной онлайн) Вращающийся кластер из семи вихрей на диске: (а) – распределение на решетке удвоенной энергии осцилляторов; (б) – распределение фазы

тинки для распределений на решетке энергий осцилляторов ε_n , а также величин $\Phi_n = \arctg_2(I_n, V_n)$, которые в качественном отношении подобны каноническим фазам Θ_n . В частности, на диске сформировался вихревой кластер, как это видно из рис. 2. Вихри в нем медленно вращались, меняя при этом

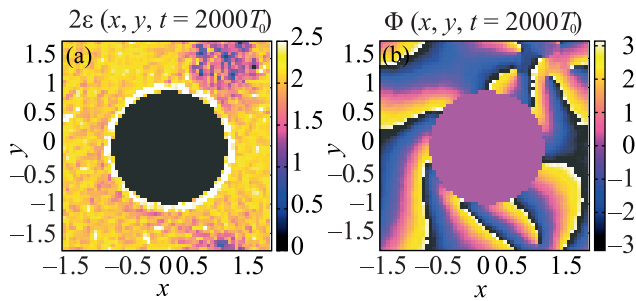


Рис. 3. (Цветной онлайн) Вращающийся кластер из семи вихрей на “торе” с дырой: (а) – удвоенная энергия; (б) – фаза

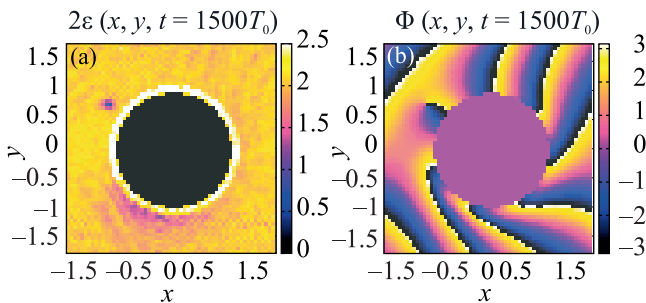


Рис. 4. (Цветной онлайн) Последний оставшийся вихрь на “бутылке Клейна” с дырой: (а) – удвоенная энергия; (б) – фаза

свое взаимное расположение. Аналогичный спокойный режим вращения кластера достигался и в случае тора, показанном на рис. 3. Иначе протекала динамика на бутылке Клейна и на проективной плоскости, где компактные кластеры не образовывались, а количество вихрей с течением времени постепенно сокращалось (см. рис. 4 и 5; там стоит обратить внимание на разницу в граничных условиях, которая обусловлена прямым либо обратным сшиванием противоположных сторон и становится очевидной из сравнения распределений “фазы” Φ). На бутылке Клейна

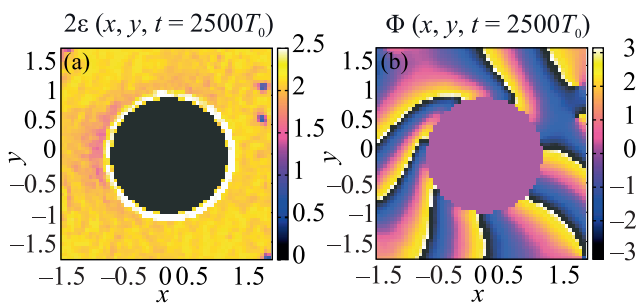


Рис. 5. (Цветной онлайн) Три вихря на “проективной плоскости” с дырой двигаются вдоль границы квадрата: (а) – удвоенная энергия; (б) – фаза. В конце концов останется только один

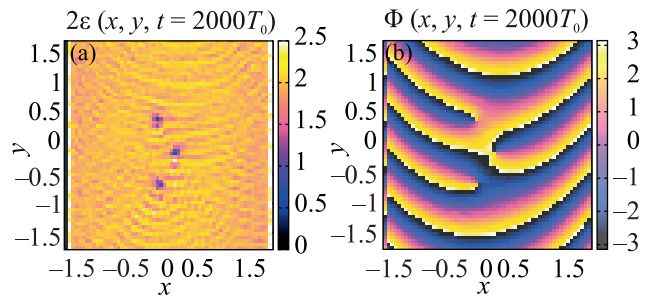


Рис. 6. (Цветной онлайн) Вихри на листе Мебиуса двигаются параллельно границе: (а) – удвоенная энергия; (б) – фаза

последний оставшийся вихрь “застрял” вблизи края дыры, а на проективной плоскости последний вихрь двигался вдоль границы квадрата по часовой стрелке. Вихри на листе Мебиуса двигались параллельно границе, изредка аннигилируя парами при столкновениях. В данном случае на временах до $5000T_0$ все еще оставались три вихря, показанные на рис. 6.

Были проведены вычисления и с другими наборами параметров, в частности – при увеличенных либо уменьшенных активных сопротивлениях, с отличающимися частотами и амплитудами накачки, а также с неоднородными профилями связей (различные значения $C_{n,n'}$ в различных частях многообразия). Вообще говоря, динамика вихрей иногда сильно отличалась от описанной выше. К тому же, в ряде случаев, помимо вихрей, наблюдались темные солитоны. Здесь, однако, нет возможности обсуждать все детали. Важен сам факт, что долгоживущие вихри не являются чем-то исключительным и требующим особых настроек системы, а имеют место в широкой области параметров.

Заключение. Таким образом, в данной работе представлен новый пример динамической системы, описывающей нелинейные модуляционно устойчивые волны в слабодиссипативной двумерной электрической схеме. Численно подтвержден сценарий, согласно которому под воздействием сосредоточенной на краю резонансной накачки в таких системах формируется приблизительно однородный фон плотности, на котором зарождаются и длительно существуют дискретные вихри. Впервые численно продемонстрированы такие вихри на топологически сложных многообразиях. Задачей на будущее остается вывод (в пространственно непрерывном пределе) уравнений движения непосредственно для координат “точечных” вихрей при наличии диссипации и накачки. Такие уравнения, по всей видимости, окажутся более сложными, чем для рассмотренного в работах [29, 45] случая свободной релаксации.

Проведенное исследование было мотивировано, в частности, интересом к разработке искусственных материалов (в том числе трехмерных), способных поддерживать квантованные вихри макроскопических размеров, причем при комнатных температурах и без привлечения постоянной Планка. Понятно, что такой материал, содержащий многие миллионы узлов, не может собираться из радиотехнических деталей. Его элементы должны быть более простыми и дешевыми. Но автор все же выражает надежду, что общая идея данной работы окажется практически полезной для дальнейших исследований в этом направлении.

1. L. M. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields*, Clarendon, Oxford (1999).
2. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
3. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, Oxford (2003).
4. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *The Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation: From Dark Solitons and Vortices to Vortex Rings*, SIAM, Philadelphia (2015).
5. B. Y. Rubinstein and L. M. Pismen, *Physica D* **78**, 1 (1994).
6. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **62**, 063617 (2000).
7. A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
8. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **64**, 036305 (2001).
9. J. Garcia-Ripoll and V. Perez-Garcia, *Phys. Rev. A* **64**, 053611 (2001).
10. J. R. Anglin, *Phys. Rev. A* **65**, 063611 (2002).
11. P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200403 (2002).
12. A. Aftalion and I. Danaïla, *Phys. Rev. A* **68**, 023603 (2003).
13. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, *Phys. Rev. A* **74**, 041603(R) (2006).
14. В. А. Миронов, Л. А. Смирнов, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 627 (2012).
15. S. Serafini, M. Barbiero, M. Debortoli, S. Donadello, F. Larcher, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 170402 (2015).
16. S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaime, R. N. Bisset, C. F. Barengi, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. X* **7**, 021031 (2017).
17. C. Ticknor, W. Wang, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **98**, 033609 (2018).
18. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **108**, 638 (2018).
19. C. Ticknor, V. P. Ruban, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **99**, 063604 (2019).
20. B. A. Malomed and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. E* **64**, 026601 (2001).
21. P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and Yu. B. Gaididei, *Phys. Rev. E* **66**, 016609 (2002).
22. P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonzalez, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 080403 (2004).
23. P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, Zh. Chen, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. E* **70**, 056612 (2004).
24. D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Physica D* **212**, 20 (2005).
25. F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Ya. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
26. J. Cuevas, G. James, P. G. Kevrekidis, and K. J. H. Law, *Physica D* **238**, 1422 (2009).
27. Ya. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 247 (2011).
28. M. Lapine, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1093 (2014).
29. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **100**, 012205 (2019).
30. Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, А. Н. Шацев, И. В. Шадривов, Ю. С. Кившарь, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 826 (2011).
31. R. Hirota and K. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **28**, 1366 (1970).
32. R. Hirota and K. Suzuki, *Proc. IEEE* **61**, 1483 (1973).
33. A. C. Hicks, A. K. Common, and M. I. Sobhy, *Physica D* **95**, 167 (1996).
34. A. C. Singer and A. V. Oppenheim, *Int. J. Bifurcation Chaos* **9**, 571 (1999).
35. D. Cai, N. Gronbech-Jensen, A. R. Bishop, A. T. Findikoglu, and D. Reagor, *Physica D* **123**, 291 (1998).
36. T. Kofane, B. Michaux, and M. Remoissenet, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **21**, 1395 (1988).
37. P. Marquie, J. M. Bilbault, and M. Remoissenet, *Phys. Rev. E* **49**, 828 (1994).
38. P. Marquie, J. M. Bilbault, and M. Remoissenet, *Phys. Rev. E* **51**, 6127 (1995).
39. V. A. Makarov, E. del Rio, W. Ebeling, and M. G. Velarde, *Phys. Rev. E* **64**, 036601 (2001).
40. D. Yemele, P. Marquie, and J. M. Bilbault, *Phys. Rev. E* **68**, 016605 (2003).
41. L. Q. English, F. Palmero, A. J. Sievers, P. G. Kevrekidis, and D. H. Barnak, *Phys. Rev. E* **81**, 046605 (2010).
42. F. Palmero, L. Q. English, J. Cuevas, R. Carretero-Gonzalez, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. E* **84**, 026605 (2011).
43. L. Q. English, F. Palmero, J. F. Stormes, J. Cuevas, R. Carretero-Gonzalez, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. E* **88**, 022912 (2013).
44. F. Palmero, L. Q. English, X.-L. Chen, W. Li, J. Cuevas-Maraver, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. E* **99**, 032206 (2019).
45. V. P. Ruban, arXiv:1910.07827.

46. C. J. G. Meyers, C. R. Freeze, S. Stemmer, and R. A. York, *Appl. Phys. Lett.* **109**, 112902 (2016).
47. Y. Shen, P. G. Kevrekidis, G. P. Veldes, D. J. Frantzeskakis, D. DiMarzio, X. Lan, and V. Radisic, *Phys. Rev. E* **95**, 032223 (2017).
48. F. J. Munoz, S. K. Turitsyn, Yu. S. Kivshar, and M. I. Molina, *Phys. Rev. A* **95**, 033833 (2017).
49. А. П. Слобожанюк, П. В. Капитанова, И. В. Шадрин, П. А. Белов, Ю. С. Кившарь, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 693 (2012).