Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 9, с. 615 – 622

Сравнение методов томографии чистых и почти чистых квантовых состояний

Б. И. Бантыш[1]*, А. Ю. Чернявский, Ю. И. Богданов*

Физико-технологический институт им. К. А. Валиева РАН, 117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 апреля 2020 г.
После переработки 7 апреля 2020 г.
Принята к публикации 7 апреля 2020 г.

Квантовая томография (КТ) является наиболее информативным инструментом оценки качества приготовления и преобразования квантовых состояний. Развитие ее методов критически необходимо для отладки разрабатываемых квантовых процессоров. Существует большое число методов КТ, отличающихся как типами производимых измерений, так и способами обработки их результатов. При практическом применении КТ возникает задача сравнения различных методов, сталкивающаяся с трудностями отсутствия общей методологии оценки. В настоящей работе представлена универсальная методология оценки качества методов томографии квантовых состояний на основе численного эксперимента. Разработанная методология применена к трем методам КТ (корневому подходу, сжатым измерениям и адаптивной томографии), характеризуемым эффективной работой с почти чистыми состояниями, что актуально для современного уровня развития технологической базы эксперимента.

DOI: 10.31857/S1234567820090074

1. Введение. За последние несколько лет технологии создания квантовых вычислителей позволили оперировать квантовыми регистрами, содержащими более 50 кубитов [1, 2], однако точность приготовления состояний в таких квантовых системах пока еще недостаточно велика для успешного решения прикладных задач. Методы квантового распределения ключа в скором времени должны получить широкое распространение, позволяющее осуществлять обмен сообщениями больших объемов в режиме практически абсолютной секретности [3, 4]. Для отладки и контроля качества приготовления состояний следует прибегать к методам *квантовой томографии* (КТ) [5–8]. Выбор того или иного метода зависит от ряда факторов, включая экспериментальную сложность реализации, типы рассматриваемых состояний, вычислительную сложность обработки результатов измерений и т.д. Несмотря на то, что большинство методов позиционируются как универсальные, их точность может существенно зависеть от такого рода факторов.

Важно отметить, что в современных квантовых регистрах возможно создание квантовых состояний, близких к чистым. Все собственные значения, кроме одного, матрицы плотности почти чистого состояния, близки к нулю. Более того, при не слишком высоких объемах выборки такая слабая засоренность состояния оказывается пренебрежимо малой по сравнению со статистическими флуктуациями, а сами состояния проявляют себя как чистые [9]. В таких условиях методы, реконструирующие матрицу плотности общего вида, оказываются неэффективными, поскольку закладывают избыточное число параметров в модель квантового состояния. К таким методам можно отнести линейную инверсию с проецированием [10], стандартную выпуклую оптимизацию [11], метод на основе разложения Холецкого [12], проективный градиентный спуск [13, 14] и другие.

Известно, что томография квантовых состояний неполного ранга посредством такого рода неэффективных методов приводит к сходимости потерь точности по закону $\propto 1/N^{1/2}$, где N – полный объем выборки по всем измерениям (число представителей квантового статистического ансамбля) [9, 15–18]. В то же время, для наиболее эффективных методов томографии можно добиться сходимости $\propto 1/N$.

Для рассматриваемой нами задачи существует ряд методов, которые направлены на то, чтобы приблизиться к зависимости $\propto 1/N$. При практическом экспериментальном применении КТ естественным образом возникает необходимость сравнения качества различных ее методов. Не менее важны такие сравнения и при создании новых методов КТ. Однако задача сравнения сталкивается с трудностями отсутствия общей методологии оценки: в работах рассматриваются разные задачи и условия тестиро-

[1]e-mail: bbantysh60000@gmail.com

вания, используются также и различные показатели эффективности. К примеру, в работе [19] по сжатым измерениям (*compressed sensing*) при представлении результатов основной упор делается на сравнении протоколов измерений различной размерности, в то время как на зависимости от объема выборки акцентируется меньше внимания. В работе [20] по томографии с использованием корневого подхода демонстрация метода производится на примере только одного смешанного состояния. Сравнение методов в работе [9] по адаптивной томографии производится только для случайных (по мере Хаара) чистых состояний и случайных (по мере Бюреса) смешанных состояний, что не позволяет судить об эффективности метода применительно к почти чистым состояниям.

Описанная проблема осложняется еще и тем, что большинство методов КТ оказываются непростыми в реализации. Это не позволяет выполнить быстрое сравнение методов в каких-то частных случаях для определения наиболее эффективного из них.

В настоящей работе мы предлагаем универсальную методологию практической оценки качества методов томографии квантовых состояний и применяем ее к методам на основе выпуклой оптимизации, корневого подхода, сжатых измерений и адаптивной томографии. Краткие описания методов представлены в разделе 2. Для каждого метода производится множество численных экспериментов в одних и тех же условиях, после чего производится анализ, основанный на заранее заданных количественных показателях эффективности, сформулированных в разделе 3. По результатам выполненного анализа мы произвели сравнение методов (раздел 4), которое показало их относительную эффективность по отношению друг к другу, а также выявило некоторые весьма существенные тонкие различия.

2. Описание методов. Ниже мы приводим краткое описание всех рассматриваемых нами методов. Каждый метод определяется как типом проводимых измерений, так и способом обработки результатов измерений. Отметим, что все рассматриваемые методы основаны на факторизованных измерениях (каждый кубит измеряется независимо от других), поскольку такие измерения наиболее просты и актуальны с точки зрения практической реализации.

2.1. Факторизованные измерения во взаимно-несмещенных базисах, метод наименьших квадратов для матрицы плотности (FMUB-LSDM). В основе метода лежит нахождение параметров матрицы плотности общего вида путем минимизации квадратов разниц теоретических (на основе оценки матрицы плотности) и экспериментальных частот различных событий (LSDM – *least squares for density matrix*). Для обеспечения физически корректного результата данная минимизация выполняется с ограничением на неотрицательную определенность матрицы плотности. Такая задача эффективно решается методами выпуклой оптимизации [11]. В качестве протокола измерений мы рассматриваем факторизованный протокол их взаимно-несмещенных базисов (FMUB – *factorized mutually unbiased bases*): каждый кубит измеряется независимо в трех взаимно-несмещенных базисах, соответствующих операторам Паули σ_x, σ_y и σ_z [21]. При этом на измерение каждого базиса отводится одинаковое число представителей статистического ансамбля. Решение оптимизационной задачи выполняется на базе открытой программной библиотеки по выпуклой оптимизации CVX [22].

2.2. Метод максимального правдоподобия с использованием корневого подхода. Метод максимального правдоподобия является одним из наиболее распространенных методов статистической реконструкции квантовых состояний. При определенных достаточно общих условиях метод обладает оптимальными асимптотическими свойствами [23].

2.2.1. Факторизованные измерения во взаимно-несмещенных базисах, корневой подход с известным рангом (FMUB-RootTR). При корневом оценивании параметров квантового состояния вместо непосредственно самой матрицы плотности рассматривается ее квадратный корень: матрица ψ размерности $d \times r$ такая, что матрица плотности есть $\rho = \psi\psi^\dagger$. Здесь ранг состояния r может принимать значения от 1 до d (d – размерность гильбертова пространства). Сам поиск максимума правдоподобия для ψ сводится к решению квазилинейного уравнения методом простых итераций [20, 24].

Случай $r = 1$ описывает модель чистого квантового состояния, а случай $r = d$ – полностью смешанного. В рамках метода FMUB-RootTR мы используем значение r_t, отвечающее истинному рангу (TR – *true rank*) матрицы плотности состояния, который мы считаем априори известным. Заметим, что при выборе $r = d$ мы получаем оценку, которая численно совпадает с теми оценками, которые дают методы на основе разложения Холецкого [12] и проективного градиентного спуска [13, 14].

Как и в случае с FMUB-LSDM, мы рассматриваем факторизованный протокол MUB измерений. Реконструкция квантового состояния с использованием корневого подхода производится на основе его открытой программной реализации [25].

2.2.2 Факторизованные измерения во взаимно-несмещенных базисах, корневой подход с адекватным рангом (FMUB-RootAR). Часто в эксперименте нет априорной информации об истинном ранге изучаемого квантового состояния. Выбор адекватного ранга (AR – *adequate rank*) тогда осуществляется на основе критерия хи-квадрат [20]. Для этого в настоящей работе поочередно перебирались значения r от 1 до d, выполнялась реконструкция состояния и оценивалось *p-value* модели P_r согласно критерию хи-квадрат. Если для некоторого значения ранга было выполнено условие $P_r \geq \alpha$, где $\alpha = 5\,\%$ есть уровень значимости, то процедура останавливалась, и ранг $r_t = r$ выбирался в качестве истинного. Процедура также останавливалась в том случае, если $P_{r+1} < P_r$ (тогда $r_t = r$). Описанный алгоритм означает, что в качестве нулевой статистической гипотезы выбирается состояние с минимальным рангом (в частности, чистое), при этом $\alpha = 5\,\%$ задает так называемую вероятность ошибки первого рода (отклонить нулевую гипотезу при условии, что она верна). Кроме того, такая процедура способна обеспечить определенную экономию вычислительных затрат за счет меньшего обращения к моделям более высокого ранга.

2.3. Измерение операторов Паули, подход сжатых измерений (Pauli-CS). Подход сжатых измерений (CS – *compressed sensing*) является расширением метода наименьших квадратов, в котором вместе с суммой квадратов минимизируется также след матрицы плотности [19, 26]:

$$\rho = \arg\min_{X\geq 0}\left[\frac{1}{2}\|O_T(X) - O_M\|_2^2 + \frac{4M}{\sqrt{N}}\mathrm{Tr}\,X\right]. \quad (1)$$

Здесь $O_T(X)$ и O_M есть вектора соответственно теоретических (на основе матрицы плотности X) и экспериментальных средних значений наблюдаемых, отвечающих различным измерениям. Протокол измерений задается тензорным произведением набора операторов Паули совместно с единичным оператором σ_0: $P_n = \{\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}^{\otimes n}$. На измерение каждой наблюдаемой отводится одинаковое число представителей статистического ансамбля. В оригинальных работах [19, 26] также рассматриваются образованные подмножествами операторов из P_n протоколы, которые не являются информационно полными для матриц плотности общего вида. Здесь, однако, мы будем рассматривать только полный набор из 4^n измерений.

Для решения оптимизационной задачи (1) использовалась открытая программная библиотека по выпуклой оптимизации CVX [22].

2.4. Адаптивная томография. Во введении мы упоминали, что методы, восстанавливающие матрицу плотности общего вида, неэффективны в задаче томографии чистых и почти чистых состояний. Этот недостаток может быть устранен посредством выбора подходящего протокола измерений: такого, который увеличивает информацию о компонентах матрицы плотности с малыми весами. Это достигается надлежащим поворотом многокубитового протокола измерений таким образом, чтобы один из проекторов оказался ортогональным как можно большему числу главных компонент матрицы плотности изучаемого состояния. Поскольку истинное состояние неизвестно, это достигается адаптивным путем: с появлением новых результатов измерений выполняется оценка матрицы плотности и подбираются необходимые измерения для следующей итерации [9, 18, 27–29].

2.4.1. Факторизованные ортогональные измерения, метод максимального правдоподобия для матрицы плотности (FO-MLDM). Адаптивный протокол факторизованных ортогональных (FO – *factorized orthogonal*) измерений, предложенный в работе [9], подразумевает реализацию итерационной процедуры, на каждом шаге которой на основе всех произведенных ранее измерений находится оценка $\hat{\rho}$ матрицы плотности. После этого вычисляется факторизованный n-кубитный вектор $|\varphi\rangle_1 \otimes \ldots \otimes |\varphi\rangle_n$ ортогональный не более, чем к $K_{\max} = n$ главным компонентам $\hat{\rho}$. Затем векторы $|\varphi\rangle_1, \ldots, |\varphi\rangle_n$ дополняются до полных ортонормированных однокубитных базисов, в которых и выполняются следующие измерения. Оценка $\hat{\rho}$ матрицы плотности на каждом итерационном шаге осуществлялась методом максимального правдоподобия (MLDM – *maximum-likelihood for density matrix*). В оригинальной статье это выполнялось посредством ускоренного проективного градиентного спуска. При моделировании мы использовали корневой подход полного ранга (см. раздел 2.2.1). Как и в работе [9], на измерение нового базиса приходилось $N_k = \max(100, \lfloor N_0/30 \rfloor)$ представителей статистического ансамбля. Здесь N_0 – суммарное число представителей, измеренных на предыдущих итерациях.

2.4.2. Факторизованные ортогональные измерения во взаимно-несмещенных базисах, метод максимального правдоподобия для матрицы плотности (FOMUB-MLDM). Метод FO-MLDM не может быть применен к томографии одиночного кубита, поскольку ортогональные измерения в этом случае определяются всегда однозначно, и в результате итера-

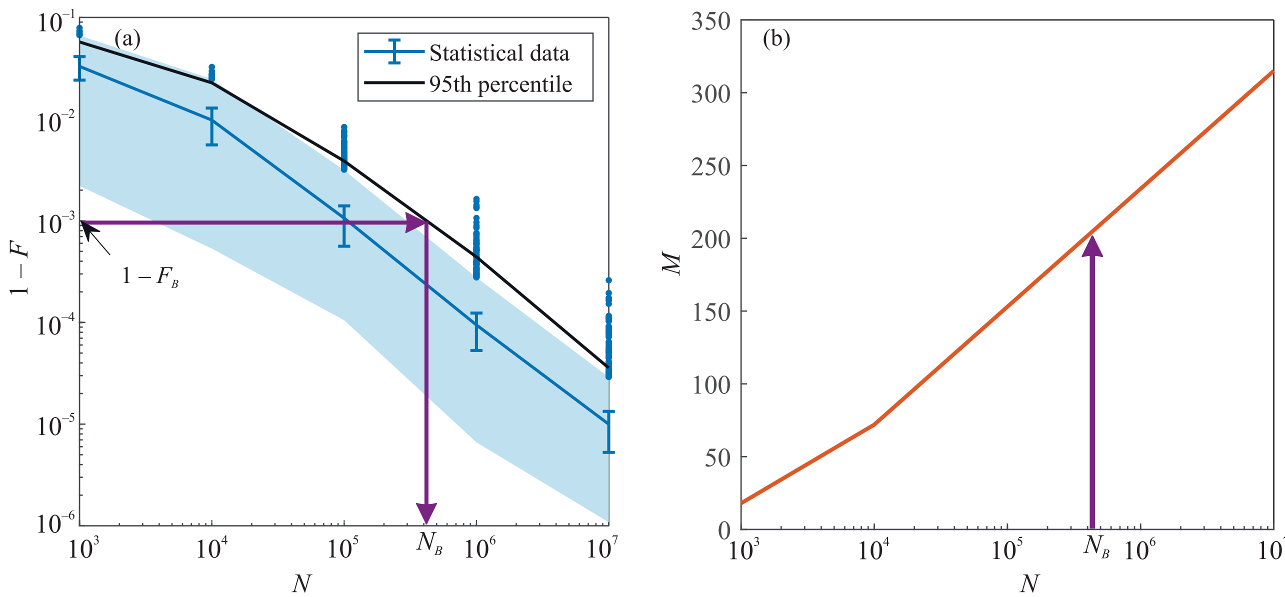

Рис. 1. (Цветной онлайн) Метод определения ресурсов на основе полученных статистических данных. (a) – Вычисляется 95-й процентиль (95th percentile) потерь точности для каждого значения полного объема выборки N. Для выбранного значения гарантированной точности F_B вычисляется требуемое значение N_B с использованием линейной интерполяции (в логарифмическом масштабе). (b) – Вычисляется количество измерений по значению в точке N_B

ций не возникает информационной полноты[2)]. Кроме того, вычислительная сложность метода, обусловленная необходимостью поиска оптимального базиса на каждом адаптивном шаге, затрудняет его многократное моделирование для накопления достаточной статистики, в особенности, когда требуется проводить анализ для больших значений N. Эти особенности побудили нас к созданию на основе FO-MLDM нового адаптивного протокола, в котором на каждом итерационном шаге происходит унитарный “поворот” однокубитового набора MUB так, чтобы один из его векторов совпал с $|\varphi\rangle_j$ $(j = 1, ..., n)$. Таким образом, на каждом шаге формируются информационно полные измерения каждого кубита, причем одно из них совпадает с тем, которое производится на каждой итерации в рамках метода FO-MLDM[3)]. Такой подход может быть применен к анализу однокубитных состояний и позволяет реже производить поиск ортогональных факторизованных измерений.

Число представителей ансамбля, приходящихся на каждый измерительный базис, мы также брали равным N_k.

3. Методология анализа. Одна из основных характеристик КТ – это *точность* реконструкции неизвестного квантового состояния, которую можно получить, имея в распоряжении определенное число представителей статистического ансамбля N (объем выборки). В качестве меры точности мы рассматриваем распространенную меру *fidelity*, задающую вероятность совпадения между истинной σ и реконструированной ρ матрицами плотности: $F = \left(\mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}\right)^2$ [30]. В реальных экспериментах, однако, часто ставится обратный вопрос: сколько ресурсов необходимо задействовать, чтобы обеспечить требуемый уровень точности (*fidelity benchmark*) F_B? В качестве базовых ресурсов мы рассматриваем:

– объем выборки N_B – данное число определяет требуемое количество одинаково приготовленных представителей неизвестного квантового состояния;

– число *различных* измерительных базисов M_B – эта характеристика описывает, сколько раз необходимо перестроить конфигурацию измерительной установки за время одного томографического эксперимента.

Рассматриваемые характеристики вычисляются для двух различных групп состояний: случайные чистые состояния (СЧС) и деполяризованные случайные чистые состояния (ДСЧС). Рассматривают-

[2)] Информационная полнота по отношению к текущей оценке состояния может быть достигнута добавлением новых измерений, близких к уже найденному [32].

[3)] Это справедливо только для рассматриваемых здесь двухуровневых подсистем. Для подсистем размерности 3 и выше дополнение $|\varphi\rangle_j$ до базиса не однозначно и поэтому, как правило, не совпадает ни с одним из базисов преобразованного MUB.

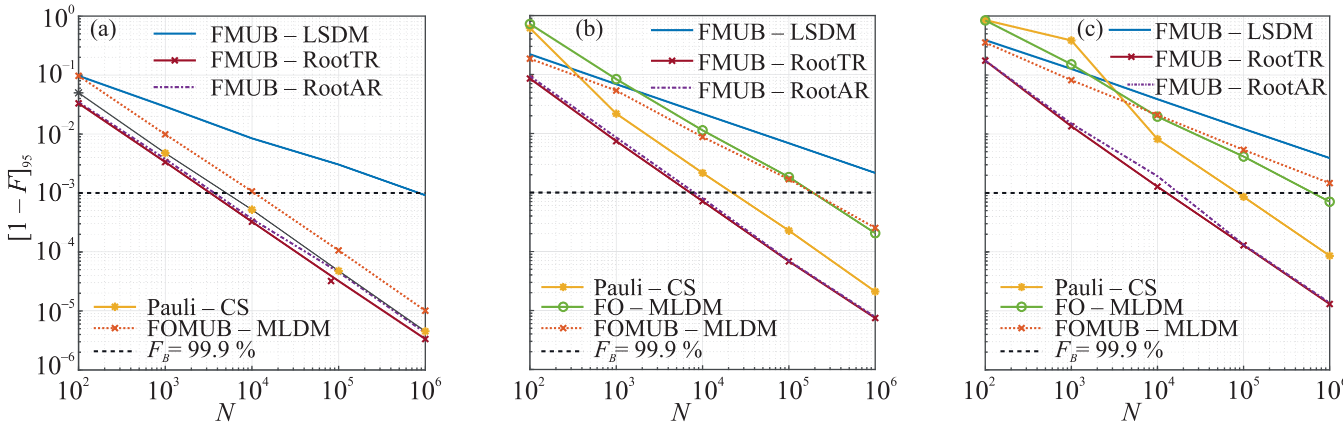

Рис. 2. (Цветной онлайн) Значение 95-го процентиля потерь точности для различных методов томографии в зависимости от объема выборки. Отражены случаи томографии случайных чистых состояний для одного (a), двух (b) и трех (c) кубитов. Горизонтальная линия откладывает эталонное значение потерь точности $1-F_B$

ся системы из n кубитов. Соответствующие квантовые состояния заданы в гильбертовом пространстве размерности $d = 2^n$. Поскольку точность сама является случайной величиной, для определения исследуемых характеристик необходимо произвести большой набор численных томографических экспериментов. Заметим, что во многих важных случаях возможна априорная оценка качества томографических протоколов с использованием универсального распределения точности [20]. Кроме того, точность зависит от самих исследуемых состояний, которые мы выбираем случайно в каждом эксперименте. Для СЧС состояние $|\psi\rangle$ генерируется по мере Хаара [31]. Для ДСЧС матрица плотности выбирается на основе случайного чистого состояния по формуле $\rho = (1-p)|\psi\rangle\langle\psi| + p \cdot I_d/d$, где I_d – единичная матрица размерности $d \times d$, p – равномерно распределенная случайная величина от 0 до 0.1.

Для вычисления ресурсов, требуемых методу КТ, мы используем следующий алгоритм (рис. 1):

1. Выполняется серия из 1000 независимых численных экспериментов по КТ для различных значений объема выборки N. В каждом эксперименте генерируется случайное состояние и выполняется симуляция его измерений методом Монте-Карло. Протокол измерений определяется методом КТ. По результатам измерений выполняется реконструкция состояния и определяется точность F.

2. Для каждого N вычисляется 95-й процентиль (перцентиль) потерь точности $[1-F]_{95}$.

3. Выбирается эталонное значение точности F_B.

4. Выполняется линейная интерполяция зависимости $\log[1-F]_{95}$ от $\log N$ и определяется объем выборки N_B, для которого $[1-F]_{95} = 1-F_B$.

5. Выполняется линейная интерполяция зависимости M от $\log N$ и определяется значение M_B в точке $\log N_B$.

Использование 95-го процентиля потерь точности позволяет говорить нам о том, что, имея в распоряжении N_B представителей квантового состояния, метод позволяет получить точность не хуже F_B с вероятностью 95 %. Выбор линейной интерполяции зависимости $\log[1-F]_{95}$ от $\log N$ обусловлен тем, что, как отмечалось выше, для КТ имеет место зависимость $1-F \propto 1/N^q$, где $0 < q \le 1$.

4. Сравнение методов. Ниже мы приводим полученные результаты сравнения различных методов томографии. В качестве эталонного значения точности была взята величина $F_B = 99.9\,\%$. Были рассмотрены системы из одного, двух и трех кубитов. Отметим, что для всех методов использовались одни и те же состояния. Методы, основанные на идентичных протоколах измерений (например, протоколе FMUB), оперировали одними и теми же статистическими данными.

4.1. Случайные чистые состояния (СЧС). Рисунок 2 отражает результаты моделирования для теста случайных (по мере Хаара) чистых состояний. Соответствующие количественные оценки представлены в табл. 1.

4.2. Деполяризованные случайные чистые состояния (ДСЧС). На рисунке 3 и в табл. 2 показаны результаты моделирования для деполяризованных случайных чистых состояний. Анализ метода FO-MLDM в данных условиях не проводился в силу довольно высокой вычислительной сложности. Заметим, что оценка квантового состояния с использованием корневого подхода с известным рангом (FMUB-

Таблица 1. Результат количественного оценивания ресурсов, затрачиваемых различными методами КТ для достижения точности $F_B = 99.9\,\%$ в случае СЧС-теста

	1 кубит		2 кубита		3 кубита	
	N_B	M_B	N_B	M_B	N_B	M_B
FMUB-LSDM	847 475	3	$> 10^6$	9	$> 10^6$	64
FMUB-RootTR	3 302	3	7 163	9	12 796	27
FMUB-RootAR	3 690	3	8 022	9	17 596	27
Pauli-CS	5 080	4	21 859	16	85 581	64
FO-MLDM	–	–	188 490	157	638 732	194
FOMUB-MLDM	10 667	71	187 391	175	$> 10^6$	> 297

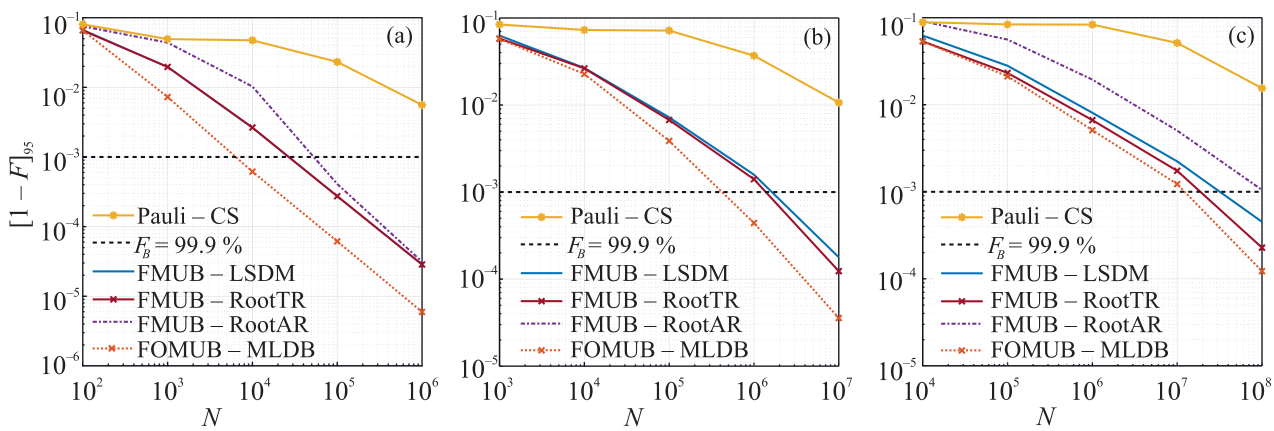

Рис. 3. (Цветной онлайн) Значение 95-го процентиля потерь точности для различных методов томографии в зависимости от объема выборки. Отражены случаи томографии деполяризованных случайных чистых состояний для одного (a), двух (b) и трех (c) кубитов. Горизонтальная линия откладывает эталонное значение потерь точности $1 - F_B$

RootTR) в данном случае, когда ранг истинного квантового состояния является полным ($r_t = d$), численно эквивалентна любой оценке матрицы плотности общего вида методом максимального правдоподобия (MLDM).

5. Обсуждение результатов. В настоящее время существует большое число методов КТ. Анализ эффективности различных методов на основе лишь изучения соответствующих публикаций представляет собой весьма непростую задачу, так как условия, в которых эти методы тестируются, могут существенно разниться. В данной работе мы предложили общую методологию количественного сравнения различных методов КТ. В ее основе лежит моделирование реальных экспериментальных условий, идентичных для каждого из рассматриваемых методов томографии. Выбирая в качестве основы некоторое эталонное значение точности, которое необходимо достичь в эксперименте по КТ, мы вычисляем ресурсы, необходимые каждому методу для достижения такого значения.

Полученные результаты выявили тонкие и весьма существенные различия между несколькими методами томографии чистых и почти чистых квантовых состояний для систем размерности от одного до трех кубитов. Для чистых состояний корневой подход (FMUB-RootTR, FMUB-RootAR), сжатые измерения (Pauli-CS) и факторизованные ортогональные измерения (FO-MLDM) позволили приблизиться к сходимости потерь точности вида $\propto 1/N$. Константы пропорциональности, однако, отличаются: корневой подход показал наилучшие характеристики по объему требуемых ресурсов. Разница в константе для метода Pauli-CS, возможно, может быть частично компенсирована переходом от анализа средних значений наблюдаемых к частотам различных исходов. Для FO-MLDM, как отмечали авторы оригинальной статьи [9], показатели могут быть улучшены, если на каждом адаптивном шаге вместо реконструкции матрицы плотности общего вида рассматривать матрицу плотности с ограниченным рангом. При восстановлении матрицы плотности общего вида методом наименьших квадратов (FMUB-LSDM), как и ожидалось, потери точности убывают приблизительно как $1/N^{1/2}$. Адаптивный метод на основе протокола измерений в факторизованных взаимно-несмещенных

Таблица 2. Результат количественного оценивания ресурсов, затрачиваемых различными методами КТ для достижения точности $F_B = 99.9\,\%$ в случае ДСЧС-теста

	1 кубит		2 кубита		3 кубита	
	N_B	M_B	N_B	M_B	N_B	M_B
FMUB-LSDM	26 732	3	1 624 133	9	31 844 790	27
FMUB-RootTR	26 862	3	1 379 537	9	18 751 495	27
FMUB-RootAR	52 829	3	4 388 900	9	$> 10^8$	27
Pauli-CS	$> 10^6$	4	$> 10^7$	16	$> 10^8$	64
FOMUB-MLDM	6 361	58	420 015	203	12 261 609	388

базисах (FOMUB-MLDM), являющийся своего рода объединением FMUB-LSDM и FO-MLDM, был разработан нами в ходе моделирования и сравнения различных методов. Для него, в случае чистых состояний, с увеличением размерности системы сходимость потерь точности постепенно ухудшалась от закона $1/N$ к закону $1/N^{1/2}$.

Оценка матрицы плотности общего вида методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов дает оптимальную сходимость вида $1/N$ для смешанных состояний, но только в том случае, если все собственные значения матрицы плотности достаточно велики. В противном случае такая сходимость наблюдается лишь при весьма большом объеме выборки. Наш количественный анализ для случая почти чистых состояний показал, что можно добиться перехода к закону $1/N$ и при меньших значениях N, используя метод FOMUB-MLDM, в котором однокубитовые наборы MUB на каждом адаптивном шаге "поворачиваются" ортогонально текущей оценке состояния.

Методы FMUB-RootAR и Pauli-CS дают существенно меньшую точность в задаче томографии почти чистых состояний, но универсальность FMUB-RootAR, обусловленная возможностью адаптации ранга модели состояния под имеющиеся статистические данные, позволяет переходить к закону $1/N$ существенно раньше, чем при использовании Pauli-CS. Заметим, что метод адаптивных сжатых измерений, описанный в работе [29], способен обеспечивать высокую точность для состояний произвольного уровня засоренности. Однако, как и любые другие существующие адаптивные методы, это требует значительных затрат на вычисление протокола и на многократную подстройку измерительной аппаратуры для изменения базиса измерений.

Развитие предложенной в данной работе методологии и приобщение к ней других методов томографии позволит со временем систематизировать знания по данной области и получить общую картину эффективности методов в приложении к различным практически важным задачам.

6. Выводы. В работе представлен основанный на численном эксперименте подход к оценке качества методов КТ при восстановлении чистых и почти чистых состояний. Главной сравнительной мерой является необходимое число измерений для достижения заданной точности, что актуально для современных экспериментальных задач. Проведены анализ и сравнение шести современных методов КТ. Полученные результаты и сама методология могут быть использованы как для выбора метода и числа измерений в эксперименте, так и при разработке и оптимизации новых методов КТ. Для квантовых состояний, близких к чистым, актуальной задачей является дальнейшее развитие адаптивных стратегий квантовых измерений. Такие стратегии должны обеспечивать, при заданных ограничениях на имеющиеся экспериментальные ресурсы, максимум информации о компонентах матрицы плотности с малыми весами.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К. А. Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме # 0066-2019-0005.

Авторы также выражают благодарность Глебу Стручалину за ценные обсуждения и помощь в проведении вычислений.

1. F. Arute, K. Arya, R. Babbush et al. (Collaboration), Nature **574**, 505 (2019).
2. H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletic, and M. D. Lukin, Nature **551**, 579 (2017).
3. К. А. Балыгин, В. И. Зайцев, А. Н. Климов, А. И. Климов, С. П. Кулик, С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **105**, 570 (2017).
4. К. А. Балыгин, В. И. Зайцев, А. Н. Климов, С. П. Кулик, С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **106**, 451 (2017).
5. K. Banaszek, M. Cramer, and D. Gross, New J. Phys. **12**, 125020 (2013).

6. G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, and M. F. Sacchi, *[Quantum State Estimation] Lecture Notes in Physics*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2004), v. 649, 519 p.
7. G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, and M. F. Sacchi, Adv. Imaging Electron Phys. **128**, 206 (2003).
8. A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, Rev. Mod. Phys. **81**, 299 (2009).
9. G. I. Struchalin, E. V. Kovlakov, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A. **98**, 032330 (2018).
10. J. A. Smolin, J. M. Gambetta, and G. Smith, Phys. Rev. Lett. **108**, 070502 (2012).
11. M. D. de Burgh, N. K. Langford, A. C. Doherty, and A. Gilchrist, Phys. Rev. A. **78**, 052122 (2008).
12. K. Banaszek, G. M. D'ariano, M. G. A. Paris, and M. F. Sacchi, Phys. Rev. A **78**, 052122 (2008).
13. E. Bolduc, G. C. Knee, E. M. Gauger, and J. Leach, Quantum Inf. **3**, 44 (2017).
14. J. Shang, Z. Zhang, and H. K. Ng, Phys. Rev. A **95**, 062336 (2017).
15. Ю. И. Богданов, А. К. Гавриченко, К. С. Кравцов, С. П. Кулик, Е. В. Морева, А. А. Соловьев, ЖЭТФ **140**, 224 (2011).
16. F. Huszár and N. M. T. Houlsby, Phys. Rev. A **85**, 052120 (2012).
17. E. Bagan, M. A. Ballester, R. D. Gill, R. Munoz-Tapia, and O. Romero-Isart, Phys. Rev. Lett. **97**, 130501 (2006).
18. S. S. Straupe, JETP Lett. **104**, 510 (2016).
19. S. T. Flammia, D. Gross, Y.-K. Liu, and J. Eisert, New J. Phys. **14**, 095022 (2012).
20. Ю. И. Богданов, ЖЭТФ **135**, 1068 (2009).
21. I. Bengtsson, AIP Conference Proceedings **889**, 40 (2007).
22. M. Grant and S. Boyd, *CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta [Electronic resource]*; URL: http://cvxr.com/cvx, September 2013.
23. M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics, Inference and Relationship*, Charles Griffin & Company Ltd., London (1961), v. 2.
24. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky, S. P. Kulik, A. N. Penin, A. A. Zhukov, L. C. Kwek, C. H. Oh, and M. K. Tey, Phys. Rev. A **70**, 042303 (2004).
25. Quantum tomography by MLE and root approach [Electronic resource]; URL: https://github.com/PQCLab/RootTomography, 2019.
26. A. Steffens, C. A. Riofrio, W. McCutcheon, I. Roth, B. A. Bell, A. McMillan, M. S. Tame, J. G. Rarity, and J. Eisert, Quantum Sci. Technol. **2**, 025005 (2017).
27. C. Ferrie, Phys. Rev. Lett. **113**, 190404 (2014).
28. C. Granade, J. Combes, and D. G. Cory, New J. Phys. **18**, 033024 (2016).
29. D. Ahn, Y. S. Teo, H. Jeong, F. Bouchard, F. Hufnagel, E. Karimi, D. Koutny, J. Řeháček, Z. Hradil, G. Leuchs, and L. L. Sanchez-Soto, Phys. Rev. Lett. **122**, 100404 (2019).
30. A. Uhlmann, Phys. Rev. A **62**, 032307 (2000).
31. K. Zyczkowski and H.-J. Sommers, J. Phys. A Math. Gen. **34**, 7111 (2001).
32. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, B. I. Bantysh, and Yu. A. Kuznetsov, Proc. SPIE **11022**, 110222O (2019).