Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 10, с. 646 – 652

Гиперпуассоновская статистика фотонов

Ю. И. Богданов[+1)], Н. А. Богданова[+], К. Г. Катамадзе[+*], Г. В. Авосопянц[*], В. Ф. Лукичев[+]

[+]Физико-технологический институт им. К. А. Валиева РАН, 117218 Москва, Россия

[*]Центр квантовых технологий, физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 апреля 2020 г.
После переработки 16 апреля 2020 г.
Принята к публикации 16 апреля 2020 г.

Получено и исследовано статистическое распределение для числа бозонов в заданной подсистеме конечномерной многоуровневой системы в условиях, когда полное число частиц является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Полученное гиперпуассоновское распределение определяется вырожденной (конфлюэнтной) гипергеометрической функцией и содержит в качестве своих частных предельных случаев распределение Пуассона, а также одномодовое и многомодовое тепловые распределения. Разработанная модель может быть эффективно использована для описания термодинамических свойств ограниченных квантовых систем, а также в задачах статистического восстановления оптических квантовых состояний, процессов и детекторов.

DOI: 10.31857/S123456782010002X

1. Введение. Исследование статистики фотонов и фотоотсчетов является одной из базовых технологий квантовой оптики. Часто в экспериментах статистика фотонов описывается одним из следующих распределений: распределение Пуассона (например, для когерентных состояний), распределение Бозе–Эйнштейна (для тепловых состояний) и биномиальное распределение (для описания преобразования фоковских состояний на светоделителе). В то же время, в реальных экспериментах статистика фотонов и фотоотсчетов детекторов часто отличается от указанных распределений в силу разного рода экспериментальных условий и особенностей оборудования. В этой связи представляется актуальным поиск таких распределений для статистики фотонов и фотоотсчетов, которые описывали бы более широкий круг экспериментальных условий и включали бы указанные выше простейшие распределения в качестве своих частных или предельных случаев.

Так, с 1970-х гг. прошлого века для генерации квазитепловых квантовых состояний используют лазерное излучение, претерпевающее рассеяние на стохастических диффузорах, таких как вращающийся матовый диск [1–5], акустооптический модулятор [6] и т. п. Во всех таких системах в качестве исходных выступают генерируемые лазерными источниками когерентные квантовые состояния с пуассоновской статистикой. Инжиниринг других квантовых состояний осуществляется посредством преобразования когерентных состояний на неоднородных линейных оптических элементах, включающих вращающиеся матовые диски, диафрагмы, светоделители, линзы и т.п. Оказывается, что в результате преобразований на случайных неоднородностях исходное распределение Пуассона превращается в распределение, относящееся к классу так называемых компаунд-распределений Пуассона [7, 8]. В частности, в случае экспоненциального компаундера, когда параметр среднего в распределении Пуассона становится случайной величиной с экспоненциальным распределением, когерентное состояние с пуассоновской статистикой превращается в тепловое состояние со статистикой Бозе–Эйнштейна. Более широкий класс компаунд-распределений Пуассона, куда входит и многомодовое тепловое состояние, возникает, если вместо экспоненциального распределения в качестве компаундера выступает гамма-распределение. По сравнению с естественными источниками теплового излучения рассматриваемые здесь квазитепловые источники света часто более удобны для задач квантовой оптики, поскольку позволяют генерировать гораздо более высокое число фотонов в расчете на одну моду и имеют существенно более высокие времена когерентности, которыми можно управлять в широких пределах от миллисекунд до десятков секунд. С практической точки зрения рассматриваемые здесь распределения важны для описания статистики лазерного излучения, прошедшего через флуктуирующие среды, например, через турбулент-

[1)]e-mail: bogdanov_yurii@inbox.ru

ные атмосферные оптические каналы [9, 10] или через флуктуирующие оптические волокна [11–14].

Еще одним важным примером является описание отличий статистики фотоотсчетов от исходной статистики фотонов в силу неединичной квантовой эффективности и темновых шумов. В простейших моделях статистика фотоотсчетов детекторов сводится к свертке исходной статистики фотонов с биномиальным распределением, которое определяется эффективностью детектора и с пуассоновским распределением, которое определяется действием шумов. В более общих моделях статистика детекторов фотонов определяется POVM-разложением, которое может быть довольно сложным. В частности, при использовании многопиксельных детекторов, разрешающих число фотонов, возникает ситуация, когда каждый отдельный пиксель имеет свои индивидуальные значения квантовой эффективности и темновых шумов, что приводит к различным распределениям по числу фотонов [15, 16]. Такие детекторы в последнее время нашли применение в квантовых генераторах случайных чисел для задач квантовой криптографии [17–20], поэтому адекватное описание статистики фотоотсчетов в таких системах весьма важно. Заметим, что при этом система квантового распределения ключа должна непосредственно опираться на фундаментальные статистические распределения квантовой статистики [21, 22]. Неоднородность характеристик рассматриваемых детекторов приводит к тому, что их эффективность становится случайной величиной, а исходное биномиальное распределение для числа отсчетов при регистрации фоковского состояния с заданным числом фотонов превращается в компаунд-распределение, аналогично тому, как это было описано выше для квазитепловых источников. Оказывается, что если в качестве компаундера выступает бета-распределение, то биномиальное распределение превращается в распределение Пойа, описывающее фундаментальную статистику фотонов [23, 24]. Число фотонов в исходном состоянии становится случайной пуассоновской величиной, когда мы переходим от регистрации труднодоступных фоковских состояний к регистрации когерентного лазерного излучения. В этом случае распределение Пойа превращается в гиперпуассоновское распределение, являющееся предметом настоящей работы. В то же время, как будет показано ниже, это новое статистическое распределение можно получить, основываясь не только на феноменологических соображениях, но и на общих свойствах статистики бозонов. С точки зрения фундаментальной квантовой статистической физики полученное статистическое распределение описывает число бозонов в заданной подсистеме конечномерной многоуровневой системы в условиях, когда полное число частиц является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Возникающее распределение определяется вырожденной (конфлюэнтной) гипергеометрической функцией. С практической точки зрения инжиниринга квантовых состояний важность полученного распределения обусловлена тем, что оно является естественным обобщением ряда хорошо известных распределений квантовой оптики. В качестве асимптотических предельных форм гиперпуассоновского распределения выступают, в частности, одномодовые и многомодовые тепловые распределения, а также распределение Пуассона. Будучи гибким инструментом анализа данных по статистике фотонов и фотоотсчетов, разработанная модель может быть эффективно использована в задачах статистической реконструкции распределений, включая задачи томографии квантовых состояний, процессов и детекторов.

2. Описание статистики бозонов с использованием распределения Пойа. Известно, что общее число возможных состояний (статистический вес) $\Omega(k, M)$ в системе из k бозонов и M уровней задается следующей формулой [25]:

$$\Omega(k, M) = C^k_{M+k-1}. \tag{1}$$

Здесь $C^k_{M+k-1} = \frac{(M+k-1)!}{k!(M-1)!}$ – биномиальный коэффициент, задающий число сочетаний из $M + k - 1$ элементов по k элементов. На языке оптики мы можем говорить о k фотонах, распределенных по M различным модам.

Рассмотрим подсистему из m мод ($m \leq M$). Найдем вероятность $P(j|k, m, M)$ обнаружить ровно j фотонов в выделенной m-модовой подсистеме, при условии, что в полной M-модовой системе имеется ровно k фотонов. В соответствии с классической формулой вероятностей имеем [23, 26]:

$$P(j|k, m, M) = \frac{C^j_{m+j-1} C^{k-j}_{M-m+k-j-1}}{C^k_{M+k-1}}. \tag{2}$$

Здесь статистический вес C^k_{M+k-1} в системе из k фотонов и M мод есть величина, которая задает знаменатель – полное число равновозможных элементов (исходов). Числитель (число благоприятствующих исходов) – это произведение двух множителей: первый – это статистический вес в системе из j фотонов и m мод в выбранной подсистеме, второй – это статистический вес в системе из $k - j$ оставшихся фотонов и $M - m$ оставшихся мод.

С использованием гамма-функции полученный результат можно записать также в следующей форме:

$$P(j|k,m,M) = \tag{3}$$
$$= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(M)\Gamma(m+j)\Gamma(M-m+k-j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(k-j+1)\Gamma(m)\Gamma(M-m)\Gamma(M+k)}.$$

Формула (3) является более общей по сравнению с формулой (2), поскольку допускает также и нецелые значения для параметров m и M. Это важно, в частности, для задач квантовой томографии, поскольку указанные параметры могут выступать в качестве подгоночных при обработке экспериментальных данных.

В теории вероятностей и статистике полученное распределение называют распределением Пойа [27, 28]. Это распределение находит применение в различных областях, в том числе при описании эпидемий заразных заболеваний [27], а также в задачах обеспечения качества в микроэлектронике [24]. Из приведенного выше рассмотрения мы видим также, что распределение Пойа имеет непосредственное отношение и к фундаментальным аспектам статистики фотонов и бозонов в целом [23, 26].

Производящая функция распределения Пойа выражается через гипергеометрическую функцию [24]

$$G(z|k,m,M) = F(-k,m,M,(1-z)). \tag{4}$$

Заметим, что для гипергеометрической функции также используют обозначение ${}_2F_1$.

Мы видим, что в форме (4) рассматриваемое распределение выражается в наиболее простом компактном виде. Такая компактная форма позволяет нам легко рассчитать различные моменты распределения Пойа в соответствии с известными правилами теории вероятностей [27, 28]. Например, вычисляя первую производную в точке $z = 1$, непосредственно находим математическое ожидание распределения

$$\mu = G'(1|k,m,M) = \frac{km}{M}. \tag{5}$$

Аналогично, вторая производная в точке $z = 1$ даст второй факториальный момент

$$G^{(2)}(1) = M[k(k-1)] = \frac{k(k-1)m(m+1)}{M(M+1)}.$$

В результате получим важную с точки зрения квантовой оптики автокорреляционную функцию второго порядка $g^{(2)}$:

$$g^{(2)} = \frac{G^{(2)}(1)}{\mu^2} = \frac{M}{M+1}\frac{m+1}{m}\frac{k-1}{k}. \tag{6}$$

Второй факториальный момент непосредственно позволяет нам рассчитать также дисперсию распределения:

$$D = G^{(2)}(1) + \mu - \mu^2 = \frac{km(M-m)(M+k)}{M^2(M+1)}. \tag{7}$$

Распределение Пойа является естественным обобщением хорошо известного биномиального распределения [24]. Биномиальное распределение можно рассматривать как предельный случай распределения Пойа при достаточно больших M и m. Действительно, пусть $M \to \infty$, $m \to \infty$, а $\theta = \frac{m}{M} \to \text{const}$. Тогда в рассматриваемом пределе возникает производящая функция биномиального распределения, задающего число "успехов" в серии из k независимых испытаний с вероятностью "успеха" в отдельном испытании, равной θ:

$$F(-k,m,M,(1-z)) \to (1-\theta(1-z))^k. \tag{8}$$

Не менее важно, что формула (4) для производящей функции распределения Пойа позволяет нам также легко получить термодинамический предел для бозонов. Этот предел возникает тогда, когда рассматривается конечная подсистема бесконечно большой системы (числа M и k бесконечно велики, а число m конечно). Формально, пусть $M \to \infty$, $k \to \infty$, а $\mu_0 = \frac{k}{M} \to \text{const}$. Тогда в рассматриваемом пределе возникает производящая функция m-модового бозонного состояния:

$$F(-k,m,M,(1-z)) \to (1+\mu_0(1-z))^{-m}. \tag{9}$$

Полученное многомодовое тепловое распределение относится к классу так называемых компаунд-распределений Пуассона и находит важные применения в задачах инжиниринга квантовых состояний [7, 8].

Мы видим, что распределение Бозе–Эйнштейна, один из краеугольных камней квантовой статистической физики, является непосредственным предельным случаем более общего распределения Пойа. В свою очередь, распределение Пойа, будучи более общим, открывает путь к описанию термодинамических свойств ограниченных квантовых систем, когда полное число мод M и число частиц k в системе не являются предельно большими величинами.

Интересно отметить, что производящая функция гипергеометрического распределения, описывающего фермионы, формально получается из производящей функции распределения Пойа, описывающего бозоны, посредством замены знака у параметров распределения: $M \to -M$, $m \to -m$,

$$G(z|k,m,M) = F(-k,-m,-M,(1-z)). \tag{10}$$

С физической точки зрения, распределения, описывающие бозоны и фермионы (Пойа и гипергеометрическое) возникают в рамках разных выборочных схем на основе урн с шарами [23]. С математической же точки зрения, эти распределения можно описывать в рамках одной и той же выборочной схемы, если допустить нефизические отрицательные значения для чисел шаров в урне. Гипергеометрическое распределение можно интерпретировать в рамках схемы Пойа (с возвращением и добавлением шаров) с отрицательным числом шаров (в духе Дирака: имеем $(-M)$ шаров, из которых $(-m)$ – красные). Наоборот, распределение Пойа можно интерпретировать в рамках схемы без возвращения с отрицательным числом шаров. Формулы (4) и (10) описывают такое соответствие явно. На наш взгляд, с точки зрения квантовой статистической физики распределение Пойа следует называть гипергеометрическим распределением бозонного типа, а обычное гипергеометрическое распределение – гипергеометрическим распределением фермионного типа.

Мы рассмотрели случай, когда полное число частиц k в системе является строго фиксированной величиной. Такие состояния, однако, весьма трудны для практической реализации. Намного более практичной является ситуация, когда полное число частиц в системе не фиксировано, а само является случайной величиной. Наиболее типичным источником фотонов в современных физических экспериментах и квантовых технологиях является лазер, генерирующий когерентное излучение. Как известно, статистика когерентного излучения является пуассоновской. Таким образом, возникает задача о нахождении распределения вероятностей в условиях, когда полное число частиц в бозонной системе имеет распределение Пуассона. Соответствующая задача рассмотрена в следующем разделе.

3. Статистика числа бозонов в подсистеме в условиях, когда полное число частиц в системе имеет распределение Пуассона. Как известно, число фотонов в когерентном состоянии описывается распределением Пуассона, которое, в свою очередь, характеризуется следующей производящей функцией:

$$G(z|\lambda) = \exp(-\lambda(1-z)). \qquad (11)$$

Здесь λ – параметр распределения Пуассона, задающий среднее число фотонов в квантовом состоянии.

Хорошо известно, что производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению отдельных производящих функций [27, 28], поэтому, как нетрудно видеть из (11), сумма независимых пуассоновских случайных величин тоже является пуассоновской случайной величиной. При этом параметр среднего числа фотонов результирующего распределения будет суммой вкладов от отдельных независимых пуассоновских величин: $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m$ (здесь m – полное число слагаемых).

В оптических экспериментах широко используются источники фотонов, формируемые лазерным излучением, проходящим через вращающийся матовый диск [2]. При этом различные неоднородности матового диска порождают пуассоновские потоки с существенно различными интенсивностями. В результате, возникающее суммарное излучение оказывается в близком соответствии с рассматриваемой здесь моделью, определяемой суммой независимых пуассоновских случайных величин. Заметим, что излучение, обусловленное соседними неоднородностями матового диска, может быть в той или иной степени коррелировано, однако данный эффект может быть нивелирован посредством определенного прореживания потока фотонов [7, 8].

Известно, что излучение матового диска может служить хорошей имитацией для генерации тепловых состояний, имеющих распределение Бозе–Эйнштейна [2]. Модель, представленная в настоящем разделе, позволяет не только объяснить генерацию тепловых состояний, но и описать более широкий круг явлений, которые можно отнести к термодинамике ограниченных оптических квантовых систем.

Пусть полное число фотонов n в системе есть случайная величина, имеющая распределение Пуассона со средним λ. Усреднение распределения Пойа (4) с использованием распределения Пуассона приведет нас к новому распределению, производящая функция которого определяется вырожденной (конфлюэнтной) гипергеометрической функцией (*degenerate (confluent) hypergeometric function*):

$$G(z|m, M, \lambda) = \Phi(m, M, -\lambda(1-z)). \qquad (12)$$

Заметим, что для вырожденной гипергеометрической функции также используют обозначение $_1F_1$. Полученное распределение будем называть гиперпуассоновским распределением (*hyper-Poisson distribution*). С точки зрения квантовой статистической физики это распределение можно охарактеризовать как конфлюэнтное гипергеометрическое распределение бозонного типа (*boson type confluent hypergeometric distribution*).

Вывод формулы (12) основан на следующем тождестве, которое можно проверить непосредственно, основываясь на определении гипергеометрических функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(-n, m, M, (1-z)) \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) =$$

$$= \Phi(m, M, -\lambda(1-z)). \quad (13)$$

Производящая функция (12) порождает следующее распределение вероятностей:

$$P(k|m, M, \lambda) =$$

$$= \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M+k)} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)} \frac{\lambda^k}{k!} \Phi(m+k, M+k, -\lambda). \quad (14)$$

Таким образом, полученное распределение задает вероятность обнаружить ровно k фотонов в выделенной m-модовой подсистеме, при условии, что в полной M-модовой системе число фотонов определяется распределением Пуассона со средним λ.

Производящая функция (12) позволяет непосредственно получить важные статистические характеристики рассматриваемого распределения. Вычисляя три первые производные от производящей функции (12), получаем следующие выражения для трех первых факториальных моментов распределения:

$$G^{(1)}(1) = M[k] = \mu = \frac{m}{M}\lambda, \quad (15)$$

$$G^{(2)}(1) = M[k(k-1)] = \frac{m(m+1)}{M(M+1)}\lambda^2, \quad (16)$$

$$G^{(3)}(1) = M[k(k-1)(k-2)] =$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{M(M+1)(M+2)}\lambda^3. \quad (17)$$

Заметим, что факториальные моменты могут быть приближенно оценены по экспериментальным данным, если рассматриваемые математические ожидания заменить выборочными средними. При этом первый факториальный момент, задаваемый формулой (15), определяет математическое ожидание (среднее) μ рассматриваемой случайной величины. Второй и третий факториальные моменты, задаваемые формулами (16) и (17), служат основой для вычисления автокорреляционных функций $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ второго и третьего порядка соответственно:

$$g^{(2)} = \frac{G^{(2)}(1)}{\mu^2} = \frac{m+1}{m} \frac{M}{M+1}, \quad (18)$$

$$g^{(3)} = \frac{G^{(3)}(1)}{\mu^3} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{m^2} \frac{M^2}{(M+1)(M+2)}. \quad (19)$$

Полученные формулы показывают, что экспериментальное оценивание автокорреляционных функций второго и третьего порядка позволяет приближенно восстановить по экспериментальным данным неизвестные параметры распределения m и M. Из формул (18) и (19) непосредственно получаем:

$$m = \frac{2[g^{(3)} - (g^{(2)})^2]}{(g^{(2)})^2 + g^{(2)}g^{(3)} - 2g^{(3)}}, \quad (20)$$

$$M = \frac{2[g^{(3)} - (g^{(2)})^2]}{2(g^{(2)})^2 - g^{(2)} - g^{(3)}}. \quad (21)$$

Таким образом, гиперпуассоновское распределение – это распределение с двумя независимыми автокорреляционными функциями $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$, что иллюстрируют формулы (18) и (19). Заметим, что для обычного распределения Пуассона коэффициенты $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ тривиальны (оба заведомо равны 1), а для компаунд-распределения Пуассона эти коэффициенты жестко связаны между собой [7, 8].

Используя второй факториальный момент, можно получить следующее выражение для дисперсии D рассматриваемого распределения:

$$D = \frac{m}{M}\lambda\left(1 + \frac{\lambda(M-m)}{M(M+1)}\right). \quad (22)$$

Заметим, что в реальных экспериментах и квантовых технологиях среднее число фотонов λ в пуассоновском состоянии зачастую неизвестно априори. Однако, имея экспериментальную оценку среднего числа отсчетов $M[k] = \mu$, и вычисляя параметры распределения m и M по формулам (20) и (21), легко находим:

$$\lambda = \frac{M}{m}\mu. \quad (23)$$

Как уже отмечалось выше, распределение Пойа является базовой моделью для обобщения биномиального распределения. Так, в рамках простейшей модели, статистика числа фотонов, регистрируемая фазово-нечувствительным детектором, есть биномиальная случайная величина, в которой в качестве вероятности "успеха" выступает эффективность детектора η [29]. В более общей модели, основанной на распределении Пойа, эффективность детектора η сама становится случайной величиной, имеющей бета-распределение с параметрами $a = m$ и $b = M - m$ [24]. В условиях тестирования такого детектора посредством когерентного излучения от лазерного источника, статистика зарегистрированного числа фотонов описывается представленной выше моделью с неизвестными параметрами m, M и λ, которые могут

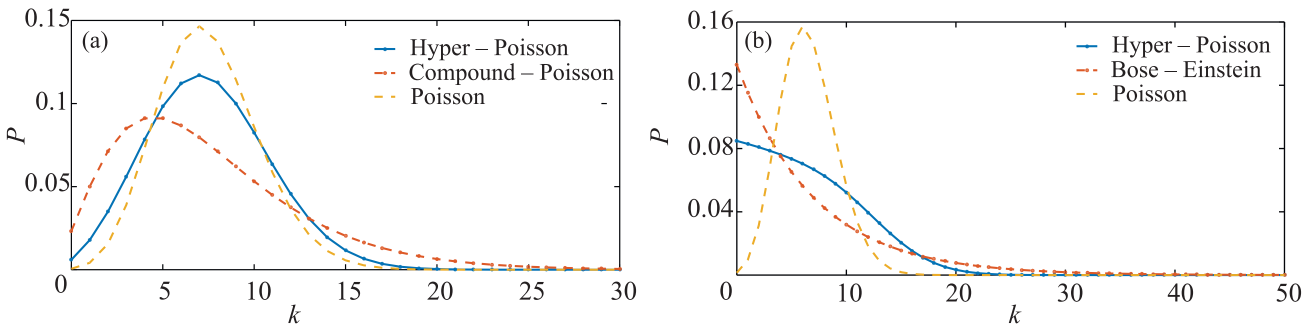

Рис. 1. (Цветной онлайн) Иллюстрация гиперпуассоновского распределения в сравнении с распределением Пуассона и компаунд-распределением Пуассона (тепловым состоянием). Параметры задачи: (a) – $m = 3$, $M = 4$, $\lambda = 10$; (b) – $m = 1$, $M = 2.3$, $\lambda = 15$

быть оценены по формулам (20), (21) и (23). Отметим также, что как параметры бета-распределения величины m и M могут быть нецелыми, выступая в качестве подгоночных параметров при обработке экспериментальных данных.

Как было показано выше, в предельном случае, когда $M \to \infty$, $m \to \infty$, а $\theta = \frac{m}{M} \to \text{const}$, распределение Пойа превращается в биномиальное распределение. В этом случае, рассматриваемое здесь гиперпуассоновское распределение превращается в обычное распределение Пуассона со средним числом отсчетов $\mu = \theta\lambda = \frac{m}{M}\lambda$:

$$\Phi(m, M, -\lambda(1-z)) \to \exp(-\mu(1-z)). \qquad (24)$$

Рассмотрим теперь термодинамический предел полученного гиперпуассоновского распределения (12). Пусть $M \to \infty$, $\lambda \to \infty$, а $\mu_0 = \frac{\lambda}{M} \to \text{const}$. Тогда, в рассматриваемом пределе снова возникает производящая функция m-модового бозонного состояния, отвечающего компаунд-распределению Пуассона [7, 8]:

$$\Phi(m, M, -\lambda(1-z)) \to (1 + \mu_0(1-z))^{-m}. \qquad (25)$$

Полученный результат вполне аналогичен предельному переходу (9) в распределении Пойа, только ранее среднее число фотонов в расчете на одну моду определялось фиксированным числом частиц k в системе в соответствии с формулой $\mu_0 = \frac{k}{M}$, а теперь – средним числом частиц λ в пуассоновском состоянии в соответствии с формулой $\mu_0 = \frac{\lambda}{M}$.

Таким образом, мы можем рассматривать три типа распределений Пуассона различной степени общности. Наиболее общее распределение – это трехпараметрическое гиперпуассоновское распределение (12). Наряду с этим распределением, важное значение имеют и две его предельные формы: двухпараметрическое компаунд-распределение Пуассона, задающее m-модовое бозонное состояние, описываемое компаунд-распределением Пуассона (25), а также обычное однопараметрическое распределение Пуассона (24).

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены все три рассматриваемых распределения вероятностей.

На представленных рисунках для всех трех распределений одинаковы средние значения, а, кроме того, для теплового и гиперпуассоновского распределений совпадают также и значения чисел выделенных мод m. Мы видим, что визуально гиперпуассоновское распределение занимает промежуточное положение между двумя своими предельными формами, задающимися распределением Пуассона и тепловым состоянием соответственно; при это рисунок (a) отвечает многомодовому тепловому состоянию, а рисунок (b) – одномодовому тепловому состоянию.

4. Выводы. Рассмотрена задача о распределении числа бозонов (в частности, фотонов) в заданной подсистеме конечномерной многоуровневой системы в условиях, когда полное число частиц в системе является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона.

Получено новое гиперпуассоновское распределение, которое по своей математической природе может быть охарактеризовано как конфлюэнтное гипергеометрическое распределение бозонного типа и которое является естественным обобщением как обычного распределения Пуассона, так и известного компаунд-распределения Пуассона.

Представлены возможные приложения полученного распределения для описания различных систем генерации и регистрации фотонов. Полученное новое статистическое распределение будет применено нами к задаче квантовой томографии детекторов.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К. А. Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме # 0066-2019-0005 при поддержке

Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 20-32-70153 и 19-32-90212) и Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (грант # 17-13-334-1).

1. C. W. Helstrom, Proc. Phys. Soc. **83**, 777 (1964).
2. F. T. Arecchi, Phys. Rev. Lett. **15**, 912 (1965).
3. F. T. Arecchi, A. Berné, and P. Bulamacchi, Phys. Rev. Lett. **16**, 32 (1966).
4. B. Crosignani, B. Daino, and P. Di Porto, J. Appl. Phys. **42**, 399 (1971).
5. T. Gonsiorowski and J. C. Dainty, J. Opt. Soc. Am. **73**, 234 (1983).
6. M. V. Chekhova, S. P. Kulik, A. N. Penin, and P. A. Prudkovsky, Opt. Commun. **132**, 15 (1996).
7. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, and V. F. Lukichev, Optoelectron. Instrum. Data Process. **52**, 475 (2016).
8. Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, A. A. Kalinkin, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **96**, 063803 (2017).
9. K. S. Kravtsov, A. K. Zhutov, I. V. Radchenko, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **98**, 063831 (2018).
10. Z. Chen, S. Cui, L. Zhang, C. Sun, M. Xiong, and J. Pu, Opt. Express **22**, 18278 (2014).
11. J. Yammine, A. Tandjé, M. Dossou, L. Bigot, and E. R. Andresen, APL Photonics **4**, 022904 (2019).
12. G. Nicholson and D. J. Temple, J. Light. Technol. **7**, 1197 (1989).
13. G. Rademacher, R. S. Luis, B. J. Puttnam, Y. Awaji, and N. Wada, Opt. Express **25**, 12020 (2017).
14. P. S. Y. Poon and C. K. Law, Phys. Rev. A **77**, 032330 (2008).
15. Y. Cai, Y. Chen, X. Chen, J. Ma, G. Xu, Y. Wu, A. Xu, and E. Wu, Appl. Sci. **9**, 2638 (2019).
16. A. Migdall, S. V. Polyakov, J. Fan, and J. C. Bienfang, *Single-Photon Generation and Detection: Physics and Applications*, Elsevier Science, Waltham, Massachusetts (2013), 570 p.
17. M. Ren, E. Wu, Y. Liang, Y. Jian, G. Wu, and H. Zeng, Phys. Rev. A **83**, 023820 (2011); https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.023820.
18. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP Lett. **106**, 470 (2017).
19. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP **126**, 728 (2018).
20. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, A. I. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP Lett. **105**, 606 (2017).
21. S. N. Molotkov, JETP Lett. **105**, 395 (2017).
22. K. A. Balygin, V. I. Zaitsev, A. N. Klimov, S. P. Kulik, and S. N. Molotkov, JETP Lett. **106**, 470 (2017).
23. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze, and G. V. Avosopiants, *Theoretical and experimental study of multi-mode thermal states with subtraction of a random number of photons*, Proc. SPIE **11022**, 110222L (15 March 2019); arXiv:1906.06384 [quant-ph].
24. Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, and V. L. Dshkhunyan, Russian Microelectronics **32**, 51 (2003).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, М. (1995), ч. 1, 608 с.
26. K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, N. A. Bogdanova, Yu. I. Bogdanov, and S. P. Kulik, Phys. Rev. A **101**, 013811 (2020).
27. W. Feller, *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed., Wiley, N.Y., London, Sydney (1968).
28. *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*, ред. Ю. В. Прохоров, Издательство "Большая Российская энциклопедия", М. (1999), 912 с.
29. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).