Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 12, с. 789 – 793 © 2020 г. 25 июня

# Точная $\beta$-функция в абелевых и неабелевых $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных калибровочных моделях и ее аналогия с $\beta$-функцией КХД в C-схеме

*И. О. Горячук*[+1)], *А. Л. Катаев*[*×1)]

[+]*МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики, 119991 Москва, Россия*

[*]*Институт ядерных исследований РАН, 117312 Москва, Россия*

[×]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 19 апреля 2020 г.
После переработки 15 мая 2020 г.
Принята к публикации 15 мая 2020 г.

В $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса без материи продемонстрировано существование класса схем перенормировок, при которых для ренормгрупповой $\beta$-функции, определенной в терминах перенормированной константы связи, справедлива точная формула Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова (НШВЗ). Эти схемы связаны между собой конечными перенормировками, образующими однопараметрическую коммутативную подгруппу общих ренормгрупповых преобразований. Обсуждается аналогия между точными $\beta$-функциями $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса без материи и квантовой хромодинамики в C-схеме.

DOI: 10.31857/S1234567820120125

**1.** В методе ренормгруппы [1] эволюция перенормированной константы связи с изменением масштаба $\mu$ описывается $\beta$-функцией:

$$\beta\left(a_s\right)=\left.\frac{d a_s\left(a_{s0},\mu^2/\Lambda^2\right)}{d\ln\mu^2}\right|_{a_{s0}}= \\ =-\left(\beta_0 {a_s}^2+\beta_1 {a_s}^3+\beta_2 {a_s}^4+O\left({a_s}^5\right)\right), \qquad (1)$$

где $a_s\equiv\alpha_s/\pi$, $a_{s0}$ – затравочная константа связи, а $\Lambda$ – размерный параметр, введенный в теорию при регуляризации. Определение (1) записано в терминах перенормированной константы связи. Коэффициенты $\beta_i$ (при $i\geq 2$) в формуле (1) зависят от процедуры перенормировки. Их можно изменить, совершив конечную перенормировку константы связи.

Характерной особенностью $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных (СУСИ) калибровочных теорий является существование точных выражений для $\beta$-функций [2]. Например, в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной квантовой электродинамике (СКЭД) с $N_f$ ароматами суперполей материи соответствующее выражение в терминах перенормированной константы связи может быть записано как [3]:

$$\beta\left(a\right)=a^2 N_f\left(\frac{1}{2}-\gamma\left(a\right)\right). \qquad (2)$$

Эта формула связывает $\beta$-функцию и аномальную размерность материи:

$$\gamma\left(a\right)=\left.\frac{d\ln Z\left(a\left(a_0,\mu^2/\Lambda^2\right),\mu^2/\Lambda^2\right)}{d\ln\mu^2}\right|_{a_0}, \qquad (3)$$

где $Z\left(a,\mu^2/\Lambda^2\right)$ – константа перенормировки суперполей материи. Как было показано в [4], соотношение (2) справедливо для некоторого класса предписаний перенормировки, которые, следуя терминологии [5], называют схемами НШВЗ.

Когда теория регуляризована при помощи высших производных (HD) [6, 7] (см. также [8]) в суперсимметричном варианте [9, 10], формула (2) выполняется во всех порядках теории возмущений (ТВ) в терминах затравочной константы связи $a_0$ [11], что было непосредственно проверено в трехпетлевом приближении в [11], а также в работе [12] несколько отличным методом. Чтобы эта формула выполнялась на перенормированном языке, были сформулированы специальные граничные условия: $a=a_0$ и $Z=1$, накладываемые при фиксированном $\mu$ [13]. В случае $\mu=\Lambda$ эту схему называют процедурой минимального вычитания логарифмов (MSL), а точнее, HD + MSL. В работе [14] было продемонстрировано, что в перенормированной мягко нарушенной СКЭД HD + MSL предписание также приводит к НШВЗ-подобному соотношению. Впоследствии было пока-

[1)]e-mail: io.gorjachuk@physics.msu.ru; kataev@ms2.inr.ac.ru

зано [15], что формула (2) справедлива точно во всех порядках ТВ и при использовании схемы перенормировки на массовой оболочке (OS) (применявшейся и ранее в СКЭД в [16]).

Чаще для регуляризации СУСИ моделей вместо размерной регуляризации [17] используют метод размерной редукции (DRED) [18]. В качестве процедуры перенормировки в этом случае выступает $\overline{\text{DR}}$ предписание, аналогичное схеме $\overline{\text{MS}}$. При этом точная $\beta$-функция (2) нарушается уже в трехпетлевом приближении [5]. Выражение (2) можно восстановить, совершив конечную перенормировку константы связи. Такую подстройку нужно подбирать в каждом порядке ТВ. Ее можно зафиксировать MSL-подобными граничными условиями, которые были сформулированы в [19] на трехпетлевом уровне. Возможность восстановления соотношения НШВЗ в СКЭД при использовании DRED обсуждалась ранее в работе [20].

Для перенормированной $\mathcal{N}=1$ СУСИ теории Янга–Миллса без материи точная $\beta$-функция имеет вид геометрической прогрессии [21]

$$\beta\left(a_s\right)=\frac{-3C_2{a_s}^2}{4-2C_2a_s}, \tag{4}$$

где $C_2$ – оператор Казимира в присоединенном представлении.

Напомним, как была получена формула (4). В СУСИ теориях операторы, связанные с аксиальной и конформной аномалиями, должны входить в один супермультиплет и перенормироваться одинаково. Известно, что перенормировка следа тензора энергии-импульса пропорциональна $(\beta(a_s)/a_s)$, т.е. конформной аномалии, а оператор аксиальной аномалии не перенормируется в силу теоремы Адлера–Бардина [22], которая формулируется и для СУСИ теорий [23]. На первый взгляд, эти утверждения сложно согласовать (см., например, [24] и ссылки там). Однако в работе [21] было показано, что они не противоречат друг другу, если использовать точную $\beta$-функцию, определенную соотношением (4).

Выражение (4) не согласуется с трехпетлевым результатом [25, 26], вычисленным в схеме $\overline{\text{DR}}$. Совпадение этих выражений достигается после восстановления формулы (4) при помощи конечной перенормировки константы связи, которая построена в работе [5] на трехпетлевом уровне. Существуют также серьезные указания на то, что и HD + MSL предписание перенормировки обеспечит справедливость формулы (4) [27]. Как было показано в [21], использование этой формулы снимает обсуждавшуюся в [24] проблему аномалий в СУСИ теориях, другое решение которой было рассмотрено в [28].

В данной работе демонстрируется, что в $\mathcal{N}=1$ СУСИ теории Янга–Миллса без материи существует целый класс схем перенормировок, в которых обсуждавшееся выше выражение (4) справедливо во всех порядках ТВ. Исследуется групповая структура преобразований, действующих в этом классе. Рассматривается их аналогия с конечными перенормировками, сохраняющими $\beta$-функцию несуперсимметричной квантовой хромодинамики (КХД) в С-схеме.

**2.** Напомним, что в $\mathcal{N}=1$ СКЭД изменение схемы перенормировки осуществляется следующим образом:

$$\begin{gathered} a'\left(a_0,\ \mu/\Lambda\right)=a'\left(a\left(a_0,\ \mu/\Lambda\right)\right), \\ Z'\left(a'\left(a\right),\ \mu/\Lambda\right)=z\left(a\right)Z\left(a,\ \mu/\Lambda\right), \end{gathered} \tag{5}$$

где $Z$ и $Z'$ – константы перенормировки материи в исследуемых схемах, а $a'(a)$ и $z(a)$ – произвольные конечные функции. Когда процедуры перенормировки, связываемые по формулам (5), лежат в классе схем НШВЗ, справедливо следующее условие (во всех порядках ТВ) [4]:

$$\frac{1}{a'(a)}-\frac{1}{a}-N_f\ln z\left(a\right)=\pi B=-\frac{N_f}{2}\ln\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \tag{6}$$

где параметр $B$ не зависит от $a$. Конечные перенормировки, удовлетворяющие данному условию, связывают между собой конкретные схемы этого класса: предписания HD + MSL [13], HD + OS [15], DRED + + $\overline{\text{DR}}$ + (специальная конечная перенормировка) [19] и другие.

Класс всех НШВЗ схем в общем случае параметризуется преобразованиями $\left\{a'(a),\, z(a),\, B\right\}$, где $a'(a)$ и $z(a)$ сохраняют вид точной $\beta$-функции (2). В качестве независимых параметров удобно выбрать величину $B$ и функцию $z(a)$, осуществляющую конечную перенормировку материи.

Рассмотрим два преобразования, удовлетворяющие ограничению (6), которые параметризуются наборами $\left\{a_i(a),\, z_i(a),\, B^{(i)}\right\}$ (при $i=1,2$). Во втором порядке разложения по ТВ функция $z_i(a)$ имеет вид

$$z_i\left(a\right)=1+D_1^{(i)}a+D_2^{(i)}a^2+O\left(a^3\right), \tag{7}$$

а функцию $a_i(a)$ можно найти по формуле

$$\frac{1}{a_i\left(a\right)}=\frac{1}{a}+\pi B^{(i)}+N_f\ln z_i\left(a\right). \tag{8}$$

Таким образом, для описания преобразований внутри изучаемого класса в трехпетлевом приближении достаточно трех коэффициентов: $B^{(i)}$, $D_1^{(i)}$ и $D_2^{(i)}$.

В работе [4] было показано, что обсуждаемые выше преобразования образуют подгруппу общих ренормгрупповых преобразований. Действительно, композиция конечных перенормировок, параметризуемых наборами $\Big\{a_1(a),\ z_1(a),\ B^{(1)}\Big\}$ и $\Big\{a_2(a),\ z_2(a),\ B^{(2)}\Big\}$, для которой

$$\begin{gathered} a'(a) = a_2(a_1(a)),\ z(a) = z_2(a_1(a))\, z_1(a), \\ B = B^{(2)} + B^{(1)}, \end{gathered} \tag{9}$$

также удовлетворяет условию (6). Для каждого преобразования $\Big\{a'(a),\, z(a),\, B\Big\}$ существует ему обратное:

$$\{a(a'),\quad 1/z(a(a')),\quad -B\}. \tag{10}$$

При этом единичный элемент группы конечных перенормировок определяется как:

$$a'(a) = a,\quad z(a) = 1,\quad B = 0. \tag{11}$$

Можно убедиться, что конечные перенормировки (10)–(11) удовлетворяют ограничению (6). Записать разложение по ТВ для задающих их функций $z(a)$, $a'(a)$ и ее обратной $a(a')$ можно по аналогии с формулами (7) и (8).

В случае $\mathcal{N}=1$ СКЭД данная подгруппа является некоммутативной. Это означает, что результат действия композиции преобразований

$$\begin{gathered} a'(a) = a_1(a_2(a)),\ z(a) = z_1(a_2(a))\, z_2(a), \\ B = B^{(1)} + B^{(2)} \end{gathered} \tag{12}$$

не совпадает с результатом (9). Чтобы в этом убедиться, рассмотрим композиции (9) и (12) в трехпетлевом приближении, подставив в каждую из них разложение (7) и использовав (8). Эти композиции будут совпадать в трехпетлевом приближении, только когда коэффициенты в выражениях (7) и (8) подчиняются условию

$$B^{(1)} D_1^{(2)} = B^{(2)} D_1^{(1)}. \tag{13}$$

Поскольку параметры $B^{(i)}$ и $D_1^{(i)}$ могут принимать произвольные значения, данное ограничение, вообще говоря, не выполняется. Более того, в высших порядках ТВ не будут выполняться условия, аналогичные (13), которые содержат коэффициенты старших порядков разложения функций $z_i(a)$ и $a_i(a)$, в том числе $D_2^{(i)}$ в формуле (7). Поэтому, строго говоря, композиции (9) и (12) приводят к различным результатам. Таким образом, подгруппа, сохраняющая формулу (2) в $\mathcal{N}=1$ СКЭД, является, в общем случае, некоммутативной (неабелевой).

**3.** Рассмотрим теперь $\mathcal{N}=1$ СУСИ теорию Янга–Миллса без материи. В ней также существуют преобразования, сохраняющие вид ее точной $\beta$-функции (4). Они задаются при помощи конечных перенормировок константы связи $a_s{}'(a_s)$, которые удовлетворяют условию, аналогичному формуле (6) в $\mathcal{N}=1$ СКЭД:

$$\frac{1}{a_s{}'(a_s)} - \frac{1}{a_s} + \frac{\beta_1}{\beta_0}\ln z_\alpha(a_s) = \pi\tilde{B} \equiv \beta_0 \ln\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \tag{14}$$

где $z_\alpha(a_s) \equiv a_s{}'(a_s)/a_s$, а первые два коэффициента $\beta$-функции (4) имеют вид [29]:

$$\beta_0 = \frac{3}{4}C_2,\qquad \beta_1 = \frac{3}{8}{C_2}^2. \tag{15}$$

Если сравнить ограничения (6) и (14), можно убедиться, что второе является более жестким. В самом деле, оно содержит лишь один параметр $\tilde{B}$, аналогичный $B$ в формуле (6), который достаточно выбрать произвольным образом, чтобы однозначно зафиксировать конечную перенормировку $a_s{}'(a_s)$.

Определяемые условием (14) конечные перенормировки соответствуют изменению масштаба $\mu$ и образуют однопараметрическую коммутативную (абелеву) подгруппу общих ренормгрупповых преобразований. Убедимся в этом непосредственно. Композиция последовательных перенормировок $\Big\{a_{s1}(a_s),\ \tilde{B}^{(1)}\Big\}$ и $\Big\{a_{s2}(a_s),\ \tilde{B}^{(2)}\Big\}$ не зависит от порядка действия:

$$a_s{}'(a_s) = a_{s2}(a_{s1}(a_s)) = a_{s1}(a_{s2}(a_s)) \tag{16}$$

и удовлетворяет условию (14) при $\tilde{B} = \tilde{B}^{(1)} + \tilde{B}^{(2)}$. Исследуемая подгруппа конечных перенормировок содержит единичный элемент тождественного преобразования $\Big\{a_s{}'(a_s) = a_s,\ \tilde{B} = 0\Big\}$. Для любой конечной перенормировки существует обратное преобразование $\Big\{a_s(a_s{}'),\ -\tilde{B}\Big\}$, аналогичное (10). Таким образом, преобразования, удовлетворяющие ограничению (14), образуют коммутативную подгруппу конечных перенормировок в отличие от подгруппы, изучавшейся в разделе 2, которая является некоммутативной.

Заметим также, что свойства рефлексивности, транзитивности и симметрии для преобразований, соответствующих изменению $\mu$, рассматривались ранее в работе [30]. В случае $\mathcal{N}=1$ СУСИ теории Янга–Миллса подгруппа этих преобразований теоретически выделена, поскольку они сохраняют вид точной $\beta$-функции (4).

**4.** В КХД недавно было предложено использовать специальную С-схему [31]. Она применялась, например, в работах [32–34] для изучения аналитической структуры слагаемых, пропорциональных функции Римана $\zeta(n)$ четного целого аргумента ($n = 4, 6, \ldots$), в разложениях ТВ в КХД. По определению, $\beta$-функция С-схемы имеет вид [31]:

$$\beta(a_s) = \frac{-\beta_0 {a_s}^2}{1 - (\beta_1/\beta_0)\, a_s}. \tag{17}$$

Коэффициенты $\beta_0$ и $\beta_1$ найдены, соответственно, в [35, 36] и [37, 38]:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{11}{12} C_2 - \frac{1}{3} T_F n_f, \\ \beta_1 &= \frac{17}{24} {C_2}^2 - \frac{5}{12} C_2 T_F n_f - \frac{1}{4} C_F T_F n_f, \end{aligned} \tag{18}$$

где $n_f$ – число ароматов кварков, $C_F$ и $C_2$ – операторы Казимира в фундаментальном и присоединенном представлении калибровочной группы, $T_F$ – индекс Дынкина.

Выражение (17) согласуется с формулой (4), если вместо коэффициентов $\beta_0$ и $\beta_1$, приведенных в (18), взять их значения (15) для $\mathcal{N} = 1$ СУСИ теории Янга–Миллса без материи; при этом дробь $\beta_1/\beta_0$ в знаменателе (17) делится нацело. Более того, точное деление имеет место и в бескварковой КХД (глюодинамике), для которой в формулах (18) $T_F n_f = 0$.

Чтобы связать ренормгрупповые величины в схеме $\overline{\text{MS}}$ и в С-схеме, нужно совершить следующую конечную перенормировку:

$$a_s{}' = a_s + \left(\frac{{\beta_1}^2}{{\beta_0}^2} - \frac{\beta_2}{\beta_0}\right) {a_s}^3 + O\left({a_s}^4\right). \tag{19}$$

В случае $\overline{\text{MS}}$ схемы коэффициент $\beta_2$ аналитически вычислен в [39, 40]. В глюодинамике он имеет вид $\beta_2 = (2857/3456)\, {C_2}^3$, и дроби в формуле (19) делятся нацело, как и в случае $\mathcal{N} = 1$ СУСИ теории Янга–Миллса без материи. Поэтому преобразование (19) аналогично перенормировке $a_s{}'(a_s)$, приводящей к точной $\beta$-функции (4) после вычислений в $\overline{\text{DR}}$ схеме, а сама она аналогична $\beta$-функции С-схемы в глюодинамике.

Вернемся теперь к рассмотрению случая КХД с кварками. Любые конечные перенормировки, сохраняющие вид (17), удовлетворяют следующему ограничению:

$$\frac{1}{a'_s} - \frac{1}{a_s} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \frac{a'_s}{a_s} = \beta_0 C \equiv \beta_0 \ln \frac{{\mu'}^2}{\mu^2}. \tag{20}$$

Такое же выражение было получено в работе [31], в котором появление параметра $C$ объясняет термин “С-схема”. Условие (20) по виду и смыслу совпадает с формулой (14) для $\mathcal{N} = 1$ СУСИ теории Янга–Миллса, при этом параметры $\tilde{B}$ и $C$ связаны следующим образом:

$$\tilde{B} = \frac{3C_2}{4\pi} C. \tag{21}$$

Отметим, что величина $\Delta$, аналогичная $C$, вводилась ранее в работе [41] при решении ренормгрупповых уравнений для двухпетлевой $\beta$-функции произвольной асимптотически-свободной теории. В случае КХД эти величины идентичны:

$$\Delta = \ln \frac{{\mu'}^2}{\mu^2} = C. \tag{22}$$

Отличие состоит в том, что в С-схеме $\beta$-функция определяется по формуле (17), и соответствующие уравнения ренормгруппы решаются в высших порядках ТВ.

Конечные перенормировки в КХД, удовлетворяющие условию (20), аналогичны преобразованиям, рассмотренным в разделе 3 в случае $\mathcal{N} = 1$ СУСИ теории Янга–Миллса. Они также образуют однопараметрическую коммутативную подгруппу общих ренормгрупповых преобразований, которая полностью характеризуется параметром С.

**Заключение.** В данной работе было продемонстрировано, что в $\mathcal{N} = 1$ СУСИ теории Янга–Миллса без суперполей материи существует класс схем перенормировок, в которых в терминах перенормированной константы связи справедлива точная $\beta$-функция (4). Действующие в этом классе преобразования соответствуют изменению масштаба $\mu$ и образуют однопараметрическую коммутативную подгруппу конечных перенормировок. Было показано, что аналогичные преобразования сохраняют вид $\beta$-функции С- схемы в КХД. Отмечено, что подгруппа конечных перенормировок, сохраняющая формулу (2) в $\mathcal{N} = 1$ СКЭД, в общем случае, является некоммутативной.

Данная работа является продолжением исследований, выполненных в [4, 15, 19]. Авторы благодарны К. В. Степаньянцу за интерес к данной работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”, грант # 17-11-120.

1. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М. (1984).
2. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **229**, 381 (1983).
3. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман, Письма в ЖЭТФ **42**, 182 (1985).
4. I. O. Goriachuk, A. L. Kataev, and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **785**, 561 (2018).

5. I. Jack, D. R. T. Jones, and C. G. North, Phys. Lett. B **386**, 138 (1996).
6. A. A. Slavnov, Nucl. Phys. B **31**, 301 (1971).
7. А. А. Славнов, ТМФ **13**, 174 (1972).
8. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М. (1988).
9. В. К. Кривощеков, ТМФ **36**, 291 (1978).
10. P. C. West, Nucl. Phys. B **268**, 113 (1986).
11. K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **852**, 71 (2011).
12. А. Е. Казанцев, К. В. Степаньянц, ЖЭТФ **147**, 714 (2015).
13. A. L. Kataev and K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **875**, 459 (2013).
14. И. В. Нарцев, К. В. Степаньянц, Письма в ЖЭТФ **105**, 57 (2017).
15. A. L. Kataev, A. E. Kazantsev, and K. V. Stepanyantz, Eur. Phys. J. C **79**, 477 (2019).
16. A. V. Smilga and A. Vainshtein, Nucl. Phys. B **704**, 445 (2005).
17. G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
18. W. Siegel, Phys. Lett. B **84**, 193 (1979).
19. S. S. Aleshin, I. O. Goriachuk, A. L. Kataev, and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **764**, 222 (2017).
20. С. С. Алешин, А. Л. Катаев, К. В. Степаньянц, Письма в ЖЭТФ **103**, 77 (2016).
21. D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **123**, 45 (1983).
22. S. L. Adler and W. A. Bardeen, Phys. Rev. **182**, 1517 (1969).
23. D. R. T. Jones and J. P. Leveille, Nucl. Phys. B **206**, 473 (1982).
24. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, Письма в ЖЭТФ **40**, 161 (1984).
25. L. V. Avdeev and O. V. Tarasov, Phys. Lett. B **112**, 356 (1982).
26. V. N. Velizhanin, Nucl. Phys. B **818**, 95 (2009).
27. K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **909**, 316 (2016).
28. Д. И. Казаков, Письма в ЖЭТФ **41**, 272 (1985).
29. D. R. T. Jones, Phys. Rev. D **22**, 3140 (1980).
30. S. J. Brodsky and X. G. Wu, Phys. Rev. D **86**, 054018 (2012).
31. D. Boito, M. Jamin, and R. Miravitllas, Phys. Rev. Lett. **117**, 152001 (2016).
32. M. Jamin and R. Miravitllas, Phys. Lett. B **779**, 452 (2018).
33. P. A. Baikov and K. G. Chetyrkin, JHEP **1806**, 141 (2018).
34. J. Davies and A. Vogt, Phys. Lett. B **776**, 189 (2018).
35. D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
36. H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
37. D. R. T. Jones, Nucl. Phys. B **75**, 531 (1974).
38. Э. Ш. Егорян, О. В. Тарасов, ТМФ **41**, 26 (1979).
39. O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov, and A. Y. Zharkov, Phys. Lett. B **93**, 429 (1980).
40. S. A. Larin and J. A. M. Vermaseren, Phys. Lett. B **303**, 334 (1993).
41. А. А. Владимиров, Ядерная физика **31**, 1083 (1980).