Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 2, с. 121 – 126

Обменно-обусловленная генерация электромагнитного излучения в геликоидальной магнитной структуре

Е. А. Караштин[1)]

Институт физики микроструктур РАН, 603950 Н. Новгород, Россия

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950 Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 1 июня 2020 г.
После переработки 11 июня 2020 г.
Принята к публикации 11 июня 2020 г.

Теоретически предсказана возможность генерации электромагнитного излучения за счет перехода электронов проводимости между спиновыми подзонами в неколлинеарном ферромагнетике с геликоидальной магнитной структурой. На основе расчета вероятности таких переходов в электродипольном приближении получена зависимость плотности мощности спонтанного излучения от частоты. Для известных из эксперимента параметров гольмия сделаны оценки порогового тока генерации и мощности излучения для помещенной в резонатор геликоидальной структуры. Рассмотрены два случая: частота резонатора соответствует резонансной частоте системы (определяется энергией расщепления спиновых подзон в гольмии и составляет примерно 89 ТГц) и сильно смещена относительно резонансной (около 1 ТГц). Полученные результаты позволяют надеяться на возможность обнаружения эффекта в эксперименте.

DOI: 10.31857/S1234567820140116

Проблема переходов электронов между спиновыми подзонами в ферромагнетике с излучением электромагнитной волны, с одной стороны, изучена мало, а с другой, несомненно, представляет значительный интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения. Практический интерес обусловлен, во-первых, тем, что частота, соответствующая указанным переходам, лежит в инфракрасном или терагерцовом диапазоне [1, 2], и, во-вторых, возможностью простого управления излучателем, основанным на переходах между спиновыми подзонами, например, с помощью приложения внешнего магнитного поля. Фундаментальный интерес связан с тем, что эффекты перехода электронов между спиновыми подзонами с излучением электромагнитной волны требуют наличия в системе той или иной связи спиновых и орбитальных степеней свободы электронов. В то же время, недостаточная изученность вопроса связана с проблемами разного рода в реализации такого излучателя. Как известно, переходы электронов между спиновыми подзонами однородного ферромагнетика в электродипольном приближении при учете только обменного взаимодействия запрещены [3]. Одним из вариантов снятия запрета является учет спин-орбитального взаимодействия [4]; однако, считается, что эффекты, обусловленные таким взаимодействием, в ферромагнетиках малы из-за его релятивистской природы. Некоторое время назад был предложен лазер, основанный на обменных переходах в ферромагнетике, в котором константа обменного взаимодействия связанных электронов, ответственных за намагниченность, и свободных электронов проводимости зависит от квазиимпульса последних [5, 6]. Данная идея получила развитие как в теоретической, так и в экспериментальной деятельности отдельных групп ученых [7–15]. Важно здесь заметить, что связь спиновых и орбитальных степеней свободы электронов проводимости в результате зависящей от их квазиимпульса константы $s{-}d$ обменного взаимодействия не является чисто обменной: такая зависимость константы от квазиимпульса может возникать только в результате спин-орбитального взаимодействия, но не в подсистеме свободных s-электронов, а в подсистеме связанных d- или f-электронов [1]. Вторая подсистема в известной литературе не учитывается явно, однако, если бы такой учет был произведен, эффект излучения оказался бы также спин-орбитальным.

В данной работе предлагается чисто обменный эффект излучения электромагнитной волны с переходом электронов проводимости между спиновыми подзонами. Связь спиновых и орбитальных степеней свободы в предлагаемой системе достигается за счет пространственно-неоднородного неколли-

1)e-mail: eugenk@ipmras.ru

неарного распределения намагниченности [16]. Рассмотрено геликоидальное распределение намагниченности, которое реализуется в гольмии при температуре ниже температуры Нееля, равной 133 К [17]. Поглощение гольмием электромагнитных волн экспериментально изучено в широком диапазоне частот [18]. На частоте, соответствующей обменному расщеплению спектра электронов проводимости, при температуре ниже температуры Нееля обнаружена особенность поглощения (и высокочастотной проводимости), которая связывается с обменно-обусловленными переходами электронов [19]. В настоящей работе теоретически исследован обратный эффект. На основе имеющихся экспериментальных данных рассчитана частотная зависимость спонтанного излучения гольмием при накачке в него неравновесного спина с помощью спин-поляризованного электрического тока [20]. Предложена возможная система для лазерной генерации, основанная на геликоидальном ферромагнетике, и определены ее характеристики (мощность излучения и пороговый ток) для разумных параметров.

Гамильтониан электронов проводимости в ферромагнетике в рамках $s{-}d$ модели обменного взаимодействия [1] имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} + J\left(\hat{\sigma}\cdot\mathbf{M}\left(\mathbf{r}\right)\right), \tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ – оператор импульса, J – обменная константа, $\hat{\sigma}$ – вектор матриц Паули, m_e – масса электрона, $\mathbf{M}\left(\mathbf{r}\right)$ – единичный вектор в направлении намагниченности среды. В данной работе рассматривается геликоидальное распределение с намагниченностью вида $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{x}}\cos qz + \hat{\mathbf{y}}\sin qz$ (см. рис. 1), где

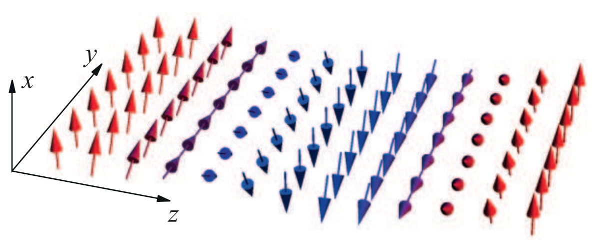

Рис. 1. (Цветной онлайн) Геликоидальное распределение намагниченности

$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ – орты декартовой системы координат, $q = \frac{2\pi}{\lambda_M}$ – волновое число геликоида (λ_M – шаг спирали). Для системы с таким распределением намагниченности волновые функции и спектр могут быть найдены точно [21–23]. Они имеют вид

$$\psi_+ = e^{-i\frac{\varepsilon_+}{\hbar}t + i\mathbf{kr}}\begin{pmatrix}\delta e^{-i\frac{q}{2}z}\\ e^{i\frac{q}{2}z}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\psi_- = e^{-i\frac{\varepsilon_-}{\hbar}t + i\mathbf{kr}}\begin{pmatrix}e^{-i\frac{q}{2}z}\\ -\delta e^{i\frac{q}{2}z}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$E_\pm = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\mathbf{k}^2 + \frac{q^2}{4} \pm \sqrt{j^2 + k_z^2 q^2}\right), \tag{4}$$

где $j = \frac{2m_e}{\hbar^2}J$, $\mathbf{k}$ – квазиимпульс электрона, $\delta = \frac{j}{k_z q + \sqrt{j^2 + k_z^2 q^2}} \equiv \frac{-k_z q + \sqrt{j^2 + k_z^2 q^2}}{j}$.

Оператор взаимодействия электронов с полем электромагнитной волны имеет вид

$$\hat{H}_{em} = -\frac{e}{2m_e c}\left(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}\right), \tag{5}$$

где e – модуль заряда электрона, c – скорость света в вакууме, вектор-потенциал $\mathbf{A} = -\frac{ic}{2\omega}\left(\mathbf{E}e^{-i\omega t} + \text{c.c.}\right)$ в пренебрежении пространственной дисперсией (ω и $\mathbf{E}$ – частота и амплитуда электрического поля волны). Вычислив матричный элемент оператора (5) на волновых функциях (2), (3), нетрудно найти вероятность перехода электрона между спиновыми подзонами под действием электрического поля электромагнитной волны [16, 19]:

$$W^{\pm}_{\mathbf{kk}'} = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{e\hbar E}{2m_e\omega}\right)^2 (q\xi_z)^2 \frac{J^2}{\Delta\varepsilon^2} \times$$
$$\times \frac{\Delta/\pi}{\left(\Delta\varepsilon - \hbar\omega\right)^2 + \Delta^2}\frac{V_{\text{act}}}{\left(2\pi\right)^3}\delta\left(\mathbf{k} - \mathbf{k}'\right), \tag{6}$$

где учтено размытие спиновых уровней за счет релаксации спина (время релаксации $2\pi\hbar/\Delta$), V_{act} – объем активной области, ξ_z – z-компонента вектора поляризации волны (единичного вектора в направлении $\mathbf{E}$), $\Delta\varepsilon = \varepsilon_+ - \varepsilon_- = \frac{\hbar^2}{m_e}\sqrt{j^2 + k_z^2 q^2}$ – изменение энергии при переходе электрона между спиновыми подзонами. Нетрудно видеть, что в магнитном геликоиде такое изменение энергии зависит от квазиимпульса электрона вдоль оси спирали k_z, т.е. спиновое расщепление не является постоянным в $\mathbf{k}$-пространстве.

Зная вероятность перехода электронов между спиновыми подзонами, можно записать интенсивность стимулированного излучения фотонов

$$R_{\text{st}} = \frac{1}{V}\int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{\left(2\pi\right)^3}W^{\pm}_{\mathbf{kk}'}\left(f_+\left(1 - f_-\right) - f_-\left(1 - f_+\right)\right), \tag{7}$$

где $f_\pm$ – функции распределения для электронов двух спиновых подзон. Мы будем считать их функциями Ферми при нулевой температуре, а количество электронов и, соответственно, уровень Ферми будет отличаться от равновесного. Поскольку вероятность перехода электронов между спиновыми подзонами пропорциональна квадрату обменной константы J, будем, ограничиваясь вторым порядком по J, в функциях распределения пренебрегать обменным расщеплением спектра электронов.

Пусть в системе выделена узкая спектральная полоса электромагнитного излучения (например, с помощью резонатора). Тогда можно описывать систему концентрацией фотонов N_p в данной узкой полосе. Здесь стоит заметить, что, поскольку $W^{\pm}_{\mathbf{kk}'}$ пропорциональна E^2, т.е. интенсивности излучения на частоте ω, параметр R_{st}, определяемый формулой (7), пропорционален концентрации фотонов: $R_{\mathrm{st}} = GN_p$.

Будем предполагать, что инжекция неравновесных по спину электронов осуществляется с помощью протекающего в системе электрического тока плотности j; при этом эффективность инжекции (определяющая степень поляризации электронов по спину) равна η. Как показано ранее, для инжекции электронов в верхнюю спиновую подзону нужно ориентировать магнитный геликоид таким образом, чтобы его ось была параллельна нормали к границе с источником спина [20]. При этом спин инжектированных электронов при протекании их по ферромагнетику следует за локальной намагниченностью, в соответствии с (2) и, кроме того, спиновая поляризация релаксирует к равновесной (переход из состояния (2) в состояние (3)) как за счет оптических переходов, так и в результате других процессов, например, спин-зависимого рассеяния на примесях. Затем заряд покидает ферромагнетик. Тогда общее число электронов в стационарном случае фиксировано, а их распределение по спину является неравновесным. Поэтому вместо концентрации электронов в двух спиновых подзонах $N_\pm$ система описывается величиной инверсной населенности δN: $N_\pm = N^0_\pm \pm \delta N$. Зная вероятность перехода (6) и предполагая, что ток инжектирует относительно немного электронов ($\delta N \ll N^0_\pm$), можно найти интенсивность стимулированного излучения фотонов:

$$R_{\mathrm{st}} = GN_p = \frac{3}{16\pi^2}\frac{e^2q^2\xi_z^2\Delta}{m_e^2\omega^3} I(\omega)\,\delta N N_p, \tag{8}$$

где безразмерная величина I равна

$$I = \int_0^1 dx \frac{\theta^2\left(1-x^2\right)}{(1+\beta^2x^2)\left(\left(\sqrt{1+\beta^2x^2}-\theta\right)^2+\delta^2\right)} \tag{9}$$

и введены безразмерные величины частоты $\theta = \frac{\hbar\omega}{2J}$, константы затухания спина $\delta = \frac{\Delta}{2J}$ и параметр адиабатичности $\beta = \frac{\hbar^2 q k_f/2m_e}{J}$ ($k_f = \left(3\pi^2 N_\pm\right)^{\frac{1}{3}}$ – импульс Ферми, который, вообще говоря, зависит от спиновой подзоны).

Зная интенсивность стимулированного излучения (8), можно записать уравнения для концентрации электронов и концентрации фотонов аналогично тому, как это делалось ранее в литературе [6]:

$$\dot{N}_p = GN_p - \nu_p N_p, \tag{10}$$

$$\delta\dot{N} = -GN_p - \frac{\Delta}{2\pi\hbar}\delta N + \frac{\eta}{eL}\left(1-e^{-\frac{L}{\lambda_s}}\right) j. \tag{11}$$

Здесь частота релаксации фотонов $\nu_p = \nu_p' + \nu_p''$ учитывает как поглощение фотонов в системе с частотой ν_p', так и выход их из резонатора с частотой ν_p''. Кроме того, считается, что характерная длина пути заряда в ферромагнетике равна L (например, в плоско-слоистой системе, рассмотренной ниже, где спин из однородного ферромагнитного слоя инжектируется в неоднородный геликоидальный слой, L – толщина последнего), а длина релаксации спина равна λ_s. В общем случае уравнения (10), (11) имеют два стационарных решения. Одно из них тривиально и существует всегда: $N_p^{(*)} = 0, \delta N^{(*)} = \frac{2\pi\hbar\eta}{eL\Delta}\left(1-e^{-\frac{L}{\lambda_s}}\right) j$. Оно соответствует отсутствию фотонов. Другое определяется соотношениями

$$\nu_p = G\left(\delta N^{(**)}\right), \tag{12}$$

$$N_p^{(**)} = \frac{1}{\nu_p}\left(-\frac{\Delta}{2\pi\hbar}\delta N^{(**)} + \frac{\eta}{eL}\left(1-e^{-\frac{L}{\lambda_s}}\right) j\right). \tag{13}$$

Очевидно, что это состояние равновесия существует только если плотность тока j превышает пороговое значение

$$j_{th} = \frac{eL\Delta}{2\pi\hbar\eta\left(1-e^{-\frac{L}{\lambda_s}}\right)}\delta N^{(**)}, \tag{14}$$

где $\delta N^{(**)}$ определяется уравнением (12). Учитывая выражение G для геликоида (8), можно записать $\delta N^{(**)}$ в виде:

$$\delta N^{(**)} = \frac{8\pi^2}{3I(\omega)\xi_z^2}\frac{\hbar c}{e^2}\frac{\hbar\nu_p}{\Delta}\frac{m_e c^2}{\hbar^2q^2/2m_e}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3, \tag{15}$$

из такой формы записи видно, что правая часть имеет размерность концентрации. В зависимости от плотности протекающего в системе тока, существуют два случая: если $j < j_{\mathrm{th}}$, есть только одно состояние равновесия (*) типа устойчивый фокус; если же

$j > j_{\rm th}$, состояние равновесия (*) имеет тип седло и появляется устойчивое состояние равновесия (**) типа фокус.

Рассмотрим вначале спонтанное излучение фотонов системой. В этом случае концентрация фотонов $N_p \propto \frac{1}{V}$ и стремится к нулю. Поэтому концентрация электронов равна $\delta N^{(*)}$. Пользуясь формулой, связывающей коэффициенты Эйнштейна для вынужденного и спонтанного излучения [24], нетрудно найти спектральную плотность мощности спонтанного излучения на единицу объема активной области:

$$p = \frac{3}{8\pi^3}\frac{\hbar^2 e^2 q^2 \xi_z^2}{m_e^2 c^3} I(\omega)\, \frac{\eta}{eL}\left(1 - e^{-\frac{L}{\lambda_s}}\right) j, \qquad (16)$$

где $I(\omega)$ определяется формулой (9) и фактически определяет частотную зависимость плотности мощности спонтанного излучения. График такой зависимости для гольмия, основанный на известных из эксперимента параметрах [18, 19] ($\delta = 0.225$, $\beta = 1.14$ при значениях $J = 0.185$ эВ, $k_f = 5.3 \cdot 10^7$ см$^{-1}$, $q = 1.07 \cdot 10^7$ см$^{-1}$, что соответствует полной концентрации электронов $N_\Sigma = 10^{22}$ см$^{-3}$ и периоду намагниченности $\lambda_M = 6$ нм, наблюдающемуся в гольмии при температуре ниже температуры Нееля, но выше температуры Кюри (20 К) [17]), приведен на рис. 2. В использованной нами модели число фотонов

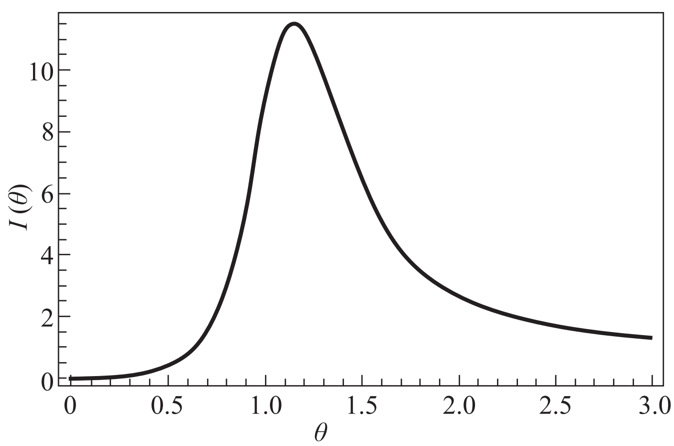

Рис. 2. Зависимость плотности мощности спонтанного излучения от частоты для гольмия (в безразмерных единицах; $\theta = \hbar\omega/2J$)

в области высоких частот спадает с частотой недостаточно быстро, что приводит к расходимости энергии спонтанного излучения света. Однако для частот порядка частоты, соответствующей обменному расщеплению и меньше, модель должна быть достаточно точной. Видно, что число фотонов имеет максимум при $\omega \approx \frac{2J}{\hbar}$, при этом частота, соответствующая максимуму, немного превышает указанное значение ($\theta \approx 1.1$). Это связано, с одной стороны, с тем, что в результате размытия уровней вклад дают не только те переходы, которые точно соответствуют частоте волны, но и соседние; в результате при преодолении $2J$ эффективная плотность состояний вначале возрастает, хотя реальная плотность состояний, соответствующих заданной частоте, все время падает с ростом частоты. С другой стороны, сдвиг в область высоких частот дает множитель θ^2 в $I(\omega)$. Для оценки размерного коэффициента в (16) использованы, кроме приведенных выше параметров, значения $\eta = 0.1$, $L = 10$ нм, $\lambda_s = 20$ нм [25, 26]; также считается, что электромагнитная волна поляризована вдоль оси z, т.е. $\xi_z = 1$. Коэффициент при $I(\omega)$ в спектральной плотности мощности излучения на 1 см^3 объема активной области и на 1 $\frac{\text{А}}{\text{см}^2}$ тока оказался равен $10^{-22}\,\frac{\text{Вт}}{\text{Гц}\cdot\text{см}^3\cdot\text{А}/\text{см}^2}$. Таким образом, спонтанное излучение оказывается весьма слабым (см. ниже).

Для оценки возможности вынужденного излучения в неколлинеарном ферромагнетике (состояние равновесия типа (**), определяемое формулами (12), (13)) рассмотрим систему, изображенную на рис. 3.

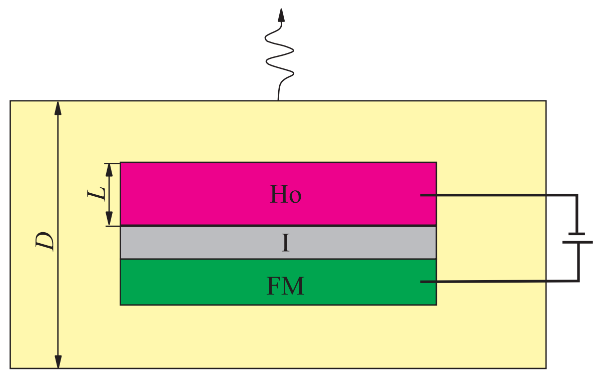

Рис. 3. (Цветной онлайн) Возможная геометрия системы для генерации электромагнитных волн, основанной на гольмии в геликоидальном магнитном состоянии (FM – однородный ферромагнетик, I – диэлектрическая прослойка, Ho – гольмий)

Активная область, в которую инжектируется спин-поляризованный ток, помещена в резонатор. Пусть площади активной области и резонатора равны $S_{\rm act}$ и $S_{\rm res}$, толщина активной области, как и раньше, L, а резонатора – D. Потери фотонов в резонаторе определяются как выходом их из резонатора с характерной частотой $\nu_p'' \approx \kappa\frac{c}{D}$, где величина κ определяет прозрачность стенки резонатора, так и поглощением их свободными носителями заряда с частотой $\nu_p' = \frac{V_{\rm act}}{V_{\rm res}}\nu_p^{\rm met}$, где $\nu_p^{\rm met}$ можно найти, зная проводимость активной области [6]. Величина $\nu_p^{\rm met}$ зависит от частоты и для указанных выше параметров гольмия примерно равна $1.1 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Поглощением в диэлектрике, заполняющем резонатор, можно пренебречь по сравнению с учтенными двумя вкладами.

Используя теперь зависимость $I(\omega)$, показанную на рис. 2, а также параметры, указанные выше, можно оценить критический ток и мощность излучения, например, при токе, вдвое превышающем критический. Возьмем для оценок значения площадей $S_{\rm act} = 1000\,\text{мкм}^2$, $S_{\rm res} = 1\,\text{мм}^2$ и $D = 10\,\text{мкм}$; прозрачность стенки резонатора выберем равной $\kappa = 10^{-4}$. Подставляя параметры в (14) и (15), получим для частоты $\nu = 89\,\text{ТГц}$, соответствующей условию $\hbar\omega = 2J$ ($\theta = 1$), значение критического тока $j_{\rm th} = 1.25 \cdot 10^8\,\frac{\text{А}}{\text{см}^2}$. Полученное значение тока достижимо в импульсном режиме, поскольку омические потери при протекании такого тока весьма велики (порядка 10^4 Вт). Мощность излучения, выходящего из резонатора, соответствующая $j = 2j_{\rm th}$, равна $P = 14\,\text{Вт}$ (в импульсе) при объеме активной области $V_{\rm act} = 10^{-11}\,\text{см}^{-3}$. Можно также оценить критический ток и мощность при работе вдали от резонанса системы, например, на частоте $\nu = 1\,\text{ТГц}$ (определяемой резонатором). Это имеет смысл, поскольку величина размытия уровней из-за релаксации спина Δ велика (порядка 0.08 эВ). Для данной частоты поглощение фотонов составляет $\nu_p^{\rm met} = 1.4 \cdot 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, и в результате простого вычисления получаем $j_{\rm th} = 3 \cdot 10^7\,\frac{\text{А}}{\text{см}^2}$, $P = 22\,\text{мВт}$. Полученные значения разумны и могут быть реализованы в эксперименте.

Можно сравнить мощность спонтанного и вынужденного излучения для полученных оценок. Если ширина линии излучения, определяемая параметром κ, составляет для частоты порядка 10^{14} Гц величину порядка 10^{10} Гц, объем активной области соответствует выбранным выше параметрам, ток равен $10^8\,\frac{\text{А}}{\text{см}^2}$ и величина $I(\omega) \approx 10$, то мощность спонтанного излучения оказывается равной 10^{-14} Вт, что крайне мало по сравнению с полученной оценкой мощности вынужденного излучения.

Таким образом, в данной работе теоретически исследована возможность создания генератора электромагнитного излучения на основе обусловленных обменом электродипольных переходов электронов проводимости между спиновыми подзонами в гольмии, в котором при температуре ниже температуры Нееля (133 K) реализуется геликоидальное распределение намагниченности. На основе имеющихся экспериментальных данных о поглощении электромагнитного излучения гольмием сделаны оценки порогового тока генерации и мощности излучения для помещенной в резонатор геликоидальной структуры. Рассмотрены два случая: частота резонатора соответствует резонансной частоте системы (определяется энергией расщепления спиновых подзон в гольмии и составляет примерно 89 ТГц) и сильно смещена относительно резонансной (около 1 ТГц). Продемонстрирована принципиальная возможность проведения эксперимента по излучению электромагнитных волн при переходе электронов между спиновыми подзонами неколлинеарно намагниченной системой. Полученный пороговый ток достаточно велик и достижим лишь в импульсном режиме. Важной проблемой является то, что пропускание тока большой плотности может привести к перемагничиванию активной области. Для понижения пороговой плотности тока можно увеличивать эффективность инжекции спина либо повышать добротность резонатора. Также заметим, что в случае генерации излучения вдали от резонанса эффективность генерации низка (примерно на пять порядков ниже, чем в резонансе). Для достижения более эффективной генерации в терагерцовом диапазоне частот, а также снижения поглощения излучения средой (и порогового тока) представляется возможным использование в качестве активной среды разбавленных магнитных полупроводников [2].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант # 19-72-00130).

1. С. В. Вонсовский, *Магнетизм*, Наука, М. (1971).
2. T. Dietl, Nature Mater. **9**, 965 (2010).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982).
4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, М. (2002).
5. A. Kadigrobov, Z. Ivanov, T. Claeson, R. I. Shekhter, and M. Jonson, Europhys. Lett. **67**, 948 (2004).
6. A. Kadigrobov, R. I. Shekhter, and M. Jonson, Low Temp. Phys. **31**, 352 (2005).
7. R. I. Shekhter, A. M. Kadigrobov, M. Jonson, E. I. Smotrova, A. I. Nosich, and V. Korenivski, Opt. Lett. **36**, 2381 (2011).
8. V. Korenivski, A. Iovan, A. Kadigrobov and R. I. Shekhter, EPL **104**, 27011 (2013).
9. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, И. В. Маликов, Г. М. Михайлов, А. И. Панас, С. Г. Чигарев, Э. М. Эпштейн, Письма в ЖЭТФ **93**(5), 289 (2011).
10. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, Г. М. Михайлов, С. Г. Чигарев, Письма в ЖЭТФ **98**(11), 837 (2013).
11. Ю. В. Гуляев, Е. А. Вилков, П. Е. Зильберман, Г. М. Михайлов, А. В. Черных, С. Г. Чигарев, Письма в ЖЭТФ **99**(9), 591 (2014).

12. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, С. Г. Чигарев, Радиотехника и электроника **60**(5), 441 (2015).
13. Ю. В. Гуляев, Е. А. Вилков, С. Г. Чигарев, Р. С. Куликов, А. Р. Сафин, Н. Н. Удалов, Р. С. Давыденко, А. Г. Колесников, А. В. Огнев, Г. М. Михайлов, А. В. Черных, С. В. Ильин, Радиотехника и электроника **63**(8), 858 (2018).
14. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, А. И. Крикунов, А. И. Панас, Э. М. Эпштейн, Письма в ЖЭТФ **85**(3), 192 (2007).
15. Н. А. Виглин, В. В. Устинов, В. М. Цвелиховская, О. Ф. Денисов, Письма в ЖЭТФ **84**(2), 84 (2006).
16. А. А. Фраерман, О. Г. Удалов, Письма в ЖЭТФ **87**(3), 187 (2008).
17. W. C. Koehler, J. Appl. Phys. **36**, 1078 (1965).
18. P. Weber and M. Dressel, J. Magn. Magn. Mater. **272–276**, E1109 (2004).
19. Е. А. Караштин, О. Г. Удалов, ЖЭТФ **140**(6), 1134 (2011).
20. Е. А. Караштин, ФТТ **62**(9), 1483 (2020).
21. В. М. Матвеев, Э. Л. Нагаев, ЖЭТФ **69**, 2151 (1975).
22. Э. Л. Нагаев, *Физика магнитных полупроводников*, Наука, М. (1979).
23. M. Calvo, Phys. Rev. B **19**, 5507 (1978).
24. И. И. Кондиленко, П. А. Коротков, А. И. Хижняк, *Физика лазеров*, Вища школа, Киев (1984).
25. L. Piraux, S. Dubois, A. Fert, and L. Belliard, Eur. Phys. J. B **4**, 413 (1998).
26. J. Bass and W. P. Pratt Jr., J. Phys.: Condens. Matter. **19**, 183201 (2007).