Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 3, с. 165 – 171

Взаимодействие двух газовых пузырьков вблизи контакта, пульсирующих в жидкости в переменном поле давления

Ш. В. Сандуляну[+*1)], *А. Г. Петров*[+]

[+]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 7 июня 2020 г.
После переработки 18 июня 2020 г.
Принята к публикации 2 июля 2020 г.

Исследуются условия слияния и его отсутствия двух пульсирующих сферических пузырьков в жидкости под действием слабого низкочастотного акустического поля давления. Благодаря тому, что частота поля давления много меньше собственных частот, пузырьки пульсируют с одинаковыми относительными амплитудами и фазами. На больших расстояниях пузырьки сближаются в соответствии с законом Бьеркнесов. Однако вблизи контакта вязкие силы могут уравновесить силу притяжения и пузырьки не будут сливаться. Показано, что при отношении радиусов, меньше 3, пузырьки сливаются, а в противном случае устанавливаются периодические колебания при малом зазоре между поверхностями пузырьков и слияния не происходит. Эти теоретические результаты подтверждаются имеющимися в литературе экспериментами.

DOI: 10.31857/S1234567820150045

1. Введение. Эффекты акустического воздействия на газожидкостные системы имеют широкое применение в различных областях: в химико-технологических и биотехнологических реакторах [1], в пищевой промышленности [2], в микрофлотации для очистки от угольных частиц [3], при водоочистке и обогащении [4], в медицине [5].

Проблема взаимодействия двух сфер в жидкости восходит к классическим работам Томсона, Стокса, Бьеркнесов, Хикса и др. ученых XIX в. В них рассматриваются как сферы с постоянными радиусами [6, 7], так и с переменными радиусами [8, 9].

Наиболее полно и просто изучено взаимодействие двух сфер переменных радиусов, находящихся далеко друг от друга. Под действием переменного поля давления два пульсирующие в фазе пузырька притягиваются, а пульсирующие в противофазе отталкиваются благодаря силе Бьеркнеса, обратно пропорциональной квадрату расстояния между центрами сфер r.

Экспериментальное подтверждение силы Бьеркнеса как силы притяжения можно найти в [10–15].

В ряде работ [16–23] для силы взаимодействия получены разложения по обратным степеням расстояния между сферами. Сила может существенно отличаться от классической силы Бьеркнеса. Если частота акустического воздействия сравнима с собственными частотами газовых пузырьков, то можно воздействовать на фазу их пульсаций. Как следствие, сила взаимодействия может стать силой отталкивания, и таким воздействием можно предотвратить сближение пузырьков. Существуют эксперименты, в которых сближение пузырьков не заканчивается слиянием [24, 25]. Несмотря на то, что формула Бьеркнеса была уточнена до членов порядка r^{-6}, она не применима для описания динамики пузырьков при сближении их к контакту.

В настоящем исследовании используется метод Лагранжа, примененный для двух пузырков равных радиусов [26], а также метод Рауса, примененный для случая произвольных радиусов [27]. Главным слагаемым функции Лагранжа является кинетическая энергия жидкости. Ее точное выражение найдено в [9, 28, 29]. В отличии от предыдущих исследований, взаимодействие сфер с учетом вязкости изучается в окрестности их контакта. Для частот акустической волны, много меньших собственных частот пузырьков, они пульсируют в фазе и классическая сила Бьеркнеса притягивает их. Тем не менее вблизи контакта притяжение может смениться отталкиванием. Показано, что характер взаимодействия пульсирующих пузырьков вблизи их контакта существенно зависит от отношения их радиусов.

2. Постановка задачи. Рассматривается взаимодействие двух сферических газовых пузырьков, радиусов R_1 и R_2 (см. рис. 1), пульсирующих в жид-

[1)]e-mail: shtefan.sanduleanu@gmail.com

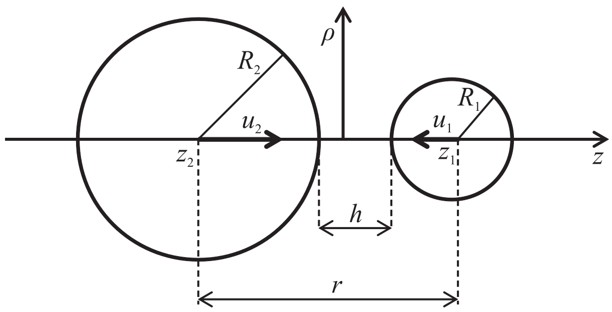

Рис. 1. Постановка задачи

кости при их движении вдоль линии центров (ось z) под действием слабого акустического поля давления $\Delta p \sim 10$ кПа с частотой $\omega/2\pi \sim 20$ кГц. Для пузырьков с характерными радиусами $R \sim 5 \div 25$ мкм собственная частота колебаний в воде $\omega_0/2\pi \sim 200$ кГц, много больше частоты акустического воздействия, и, как следствие, пузырьки пульсируют с одинаковой фазой. В таком случае в соответствии с законом Бьеркнесов на больших расстояниях пузырьки притягиваются друг к другу. Однако при сближении пузырьков к их контакту закон Бьеркнесов неприменим и возможность слияния требует специального рассмотрения.

При изучении взаимодействия пузырьков не будет учитываться сила Архимеда, ввиду того, что ее можно компенсировать градиентом давления в стоячей акустической волне, что отмечено в экспериментальных работах [12–14]. Благодаря слабому акустическому воздействию, числа Вебера и капиллярности много меньше единицы, что оправдывает предположение сферичности пузырьков. Эффекты сжимаемости жидкости не учитываются. Более подробно условие сферичности, а также влияние силы Архимеда обсуждаются в разделе 4.

3. Метод Лагранжа. Динамические уравнения записываются в форме Лагранжа второго рода [30], в которых вязкие силы учитываются как обобщенные. При больших расстояниях между пузырьками вязкие силы пренебрежимо малы по сравнению с инерционными силами. Известно [31], что вязкая сила вблизи контакта растет обратно пропорционально зазору между поверхностями пузырьков. Поэтому при сближении пузырьков, когда зазор h стремится к нулю, вязкие силы становятся сравнимыми с инерционными. Таким образом, гидродинамические силы разделяются на инерционные, которые определяются в рамках модели идеальной жидкости методом Лагранжа, и вязкие силы, которые учитываются в безынерционном приближении Стокса. В монографии Ландау и Лифшица [32] аналогичными рассуждениями построено выражение для силы, действующей на сферу, движущуюся с переменной скоростью в вязкой жидкости. Сила складывается из силы присоединенной массы, силы Стокса и силы Бассе. Следует также указать, что при малых зазорах между пузырьками основной вклад в вязкую силу набирается около контакта, а кинетическая энергия и соответственно силы инерции набираются на масштабе размера пузырьков.

Лагранжиан системы $L = T - \Pi$ зависит от четырех обобщенных координат: координаты центров сфер z_1, z_2, их радиусов R_1, R_2 и скоростей $\dot{z}_1 = -u_1$, $\dot{z}_2 = u_2$, $\dot{R}_1$, $\dot{R}_2$ (рис. 1). Здесь T – кинетическая энергия жидкости с плотностью ρ_l

$$\begin{aligned} T = 2\pi\rho_l\big(&A_1u_1^2 + 2Bu_1u_2 + A_2u_2^2 + \\ &+ D_1\dot{R}_1^2 + 2E\dot{R}_1\dot{R}_2 + D_2\dot{R}_2^2 + \\ &+ C_{11}u_1\dot{R}_1 + C_{12}u_1\dot{R}_2 + C_{21}u_2\dot{R}_1 + C_{22}u_2\dot{R}_2\big). \end{aligned} \quad (1)$$

В точной постановке, для движения двух пульсирующих сфер вдоль линии центров в идеальной несжимаемой жидкости, коэффициенты кинетической энергии $A_1, B, ..., C_{22}$ были ранее найдены в виде рядов, зависящих от R_1, R_2 и $r = z_1 - z_2$ [7, 9, 26, 28, 29]. Кинетической энергией газа пренебрегаем.

Потенциальная энергия имеет вид [26, 33]

$$\Pi = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{4}{3}\pi R_i^3\left(p(t) + \frac{p_{i0}}{\gamma - 1}\left(\frac{R_{i0}}{R_i}\right)^{3\gamma}\right) + 4\pi\sigma R_i^2\right), \quad (2)$$

где $p(t) = \bar{p} + \Delta p\cos\omega t$, σ – коэффициент поверхностного натяжения, γ – показатель адиабаты газа в пузырьках, $p_{i0} = \bar{p} + 2\sigma/R_{i0}$ и R_{i0} – давление и радиус пузырька в отсутствии пульсации давления.

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{dI_1}{dt} = F_B + F_{\mu_l 1}, \quad \frac{dI_2}{dt} = -F_B + F_{\mu_l 2}, \quad (3)$$

$$\frac{dJ_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial R_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial R_1}, \quad \frac{dJ_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial R_2} - \frac{\partial \Pi}{\partial R_2}, \quad (4)$$

где $I_i = \partial T/\partial \dot{z}_i$, $J_i = \partial T/\partial \dot{R}_i$, $i = 1, 2$ – четыре импульса системы, $F_B = \partial T/\partial r$ – обобщенная сила Бьеркнеса, $F_{\mu_l 1}$ и $F_{\mu_l 2}$ – вязкие силы, действующие на сферы.

При наличии поверхностно активных веществ (ПАВ) в жидкости на поверхности сферических пузырьков выполняется условие прилипания. Как в случае твердых шаров [31], так и для пульсирующих сфер [34, 35], было показано, что вблизи их контакта главные асимптотики вязких сил равны между собой и имеют разные знаки

$$\frac{F_{\mu_l 1}}{6\pi\mu_l\bar{R}} \approx \frac{-F_{\mu_l 2}}{6\pi\mu_l\bar{R}} = -\frac{\bar{R}}{h}\dot{h} - \ln\left(\frac{\bar{R}}{h}\right)\left(\frac{1}{5}+\alpha_1\alpha_2\right)\dot{h} - \\ - \ln\left(\frac{\bar{R}}{h}\right)\left(\alpha_2(1+\alpha_1)\dot{R}_1 + \alpha_1(1+\alpha_2)\dot{R}_2\right) + O\left(1\right), \tag{5}$$

где $\dot{h} = -(\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + u_1 + u_2)$, $\bar{R} = R_1R_2/(R_1+R_2)$, $\alpha_i = R_i/(R_1+R_2)$, μ_l – коэффициент вязкости жидкости.

В случае отсутствия ПАВ (дистиллированная вода) на поверхности сфер выполняется условие нулевого тангенциального напряжения. Главная асимптотика вязких сил логарифмическая [36–38]:

$$F_{\mu_l 1} \approx -F_{\mu_l 2} = -2\pi\mu_l\bar{R}\dot{h}\ln(\bar{R}/h) + O\left(1\right). \tag{6}$$

В обоих случаях из (5) и (6) следует, что суммарный импульс сохраняется не только в идеальной жидкости, но и с учетом вязких сил

$$I = I_1 + I_2 = \text{const}. \tag{7}$$

4. Вынужденные пульсации пузырьков. При малых амплитудах $\Delta p \ll \bar{p}$, а также при низких частотах акустического воздействия $\omega^2 \ll \omega_0^2$, в уравнениях Лагранжа (4), следуя [17, 26], можно пренебречь инерционными членами. Тогда в линейном приближении по относительным амплитудам колебаний $\varepsilon_i(t) = (R_i(t) - R_{i0})/R_{i0}$ из уравнений (4) получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_i} = 0, \quad \Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \tag{8}$$

где $\Pi_i = 2\pi R_{i0}^3\left(C_i + 2\Delta p\cos(\omega t)\varepsilon_i + 3\gamma\bar{p}\varepsilon_i^2\right)$. Из (8) следует, что пузырьки пульсируют с одинаковыми относительными амплитудами и одинаковыми фазами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos(\omega t), \tag{9}$$

где $\varepsilon_0 = -\Delta p/(3\gamma\bar{p})$. Из уравнений Лагранжа для четырех степеней свободы остаются уравнения для двух оставшихся степеней свободы, координат центров сфер (3).

В работах [12–14] замечено, что в вертикально стоячей волне $p(x,t) = \bar{p} + \Delta p_{\max}\cos(2\pi x/\lambda)\cos\omega t$ эффект всплытия пузырьков за счет силы Архимеда гасится. Действительно, в градиенте давления возникает сила, направленная вдоль вертикальной оси x (в западной литературе *primary Bjerknes force*). Эта сила, усредненная по временному периоду с учетом (9), равна

$$F_i^p = \left\langle \frac{4\pi}{3}R_i^3\nabla p\right\rangle = \frac{4\pi}{3}R_{i0}^3\frac{\Delta p_{\max}^2}{\gamma\bar{p}}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sin(4\pi x/\lambda)}{4}. \tag{10}$$

Отсюда видно, что отношение силы F_i^p к силе Архимеда $F_i^A = \rho_l g 4\pi R_{i0}^3/3$ не зависит от радиуса. Поэтому при

$$\sin(4\pi x/\lambda) = \frac{2\rho_l g\gamma\bar{p}\lambda}{\pi\Delta p_{\max}^2} \tag{11}$$

эти силы будут уравновешиваться для пузырьков любых размеров.

Например, при $\Delta p_{\max} \sim 10$ кПа, частоте $\omega/2\pi \sim \sim 20$ кГц, $\gamma = 1.4$, $\bar{p} = 100$ кПа, $\lambda = 2\pi c/\omega$, скорость звука в воде $c = 1500$ м/с получим $\sin(4\pi x/\lambda) = 0.66$ и пузырьки будут взаимодействовать в горизонтальной плоскости при фиксированном уровне x.

Для пузырьков с радиусами $R \sim 10$ мкм число Вебера

$$We = \frac{\rho v^2 R}{\sigma} \sim \frac{\rho R^3\omega^2\varepsilon_0^2}{\sigma} \sim 10^{-4}. \tag{12}$$

Число капиллярности около зазора можно оценить как [35]

$$Ca = \frac{\mu\dot{R}}{h}\frac{R}{\sigma} = \frac{\mu R^2\omega\varepsilon_0}{\sigma h}, \tag{13}$$

учитывая, что критический зазор, при котором пузырьки сливаются $h \sim 100$ нм [1], для пузырьков с радиусами $R \sim 10$ мкм в воде имеем $Ca \lesssim 4\cdot 10^{-2}$.

Малость чисел Вебера и капиллярности оправдывает предположение сферичности пузырьков.

5. Преобразования Рауса. Закон сохранения (7) позволяет понизить порядок системы уравнений с помощью преобразования Рауса [30]. Перейдя к координатам $\delta = h/R_1 = (z_1 - z_2 - R_1 - R_2)/R_1$ $(R_2 \geq R_1)$, $z_{\text{sum}} = z_1 + z_2$, с учетом $F_{\mu_l 1} + F_{\mu_l 2} \approx 0$, уравнения Лагранжа (3) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\delta}} = \frac{\partial T}{\partial\delta} + F_{\mu_l}\frac{\partial h}{\partial\delta}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{z}_{\text{sum}}} = 0, \tag{14}$$

где $T = T(\delta, \dot{\delta}, \dot{z}_{\text{sum}}, t)$, $F_{\mu_l} \approx F_{\mu_l 1}$. Таким образом, переменная z_{sum} является циклической и может быть исключена методом Рауса. Предполагая, что для установившегося периодического движения суммарный импульс равен нулю $\partial T/\partial\dot{z}_{\text{sum}} = I = I_1 + I_2 = 0$, находим безразмерную функцию Рауса

$$T_R = \frac{T - I\dot{z}_{\text{sum}}}{2\pi\rho_l R_{10}^5} = \frac{\mu_{11}(1+\varepsilon)^5\dot{\delta}^2}{2} + \\ + \mu_{12}(1+\varepsilon)^4\dot{\varepsilon}\dot{\delta} + \frac{\mu_{22}(1+\varepsilon)^3\dot{\varepsilon}^2}{2} \tag{15}$$

и безразмерные функции $\mu_{ij}(k,\delta)$

$$\mu_{11}(k,\delta) = \frac{2}{R_1^3}\frac{A_1A_2 - B^2}{F_1 + F_2}, \tag{16}$$

$$\mu_{12}(k,\delta) = \mu_{11}(k,\delta)(1+k+\delta) - \frac{1}{R_1^3}\frac{F_2G_1 + F_1G_2}{F_1+F_2}, \tag{17}$$

$$\mu_{22}(k,\delta) = (2\mu_{12}(k,\delta) - \mu_{11}(k,\delta))(1+k+\delta) + \\ + \frac{2}{R_1^3}\left(D_1 + 2Ek + D_2k^2 - \frac{(G_1-G_2)^2}{4(F_1+F_2)}\right), \tag{18}$$

где $F_i = A_i - B$, $G_i = C_{i1} + kC_{i2}$, $k = R_2/R_1$.

Найденная функция Рауса T_R согласуется с результатом Хикса [7] для твердых шаров, движущихся в идеальной жидкости.

Уравнение Рауса приобретает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_R}{\partial \dot\delta} = \frac{\partial T_R}{\partial \delta} + \frac{F_{\mu_l}}{2\pi\rho_l R_{10}^5}\frac{\partial h}{\partial \delta}. \tag{19}$$

6. Метод осреднения. Подставляя (15) в уравнение (19) в предположении $\varepsilon \ll 1$, учтем первый порядок по ε и δ в левой части и второй порядок в правой части

$$\frac{d}{dt'}\left(\mu_{11}\dot\delta + \mu_{12}\dot\varepsilon\right) = f_B + f_{\mu_l}, \tag{20}$$

$$f_B = \frac{1}{2}(d_{22}\dot\varepsilon^2 + 2d_{12}\dot\varepsilon\dot\delta + d_{11}\dot\delta^2),\ \ f_{\mu_l} = \frac{F_{\mu_l}(1+\varepsilon)}{2\pi\rho\omega^2 R_{10}^4}, \tag{21}$$

где $d_{ij} = \partial\mu_{ij}/\partial\delta$, в отличии от [26], μ_{ij}, d_{ij}, f_{μ_l} зависят от отношения радиусов пузырьков $k = R_2/R_1$.

Здесь и далее точкой обозначена производная по безразмерному времени $t' = \omega t$.

В случае отсутствия слияния пузырьков, решение уравнения (20) представляет собой периодические осцилляции около некоторого среднего безразмерного зазора $\bar\delta$. Тогда безразмерный зазор можно искать в виде $\delta(t') = \bar\delta + x(t')$, при этом $\dot\delta(t') = \dot x(t')$.

Рассмотрим сперва вязкие силы для граничных условий прилипания (5)

$$f_{\mu_l} = \eta_{11}(\delta,k,\varepsilon)\dot\delta + \eta_{12}(\delta,k,\varepsilon)\dot\varepsilon, \tag{22}$$

где $\eta_{ij}(\delta,k,\varepsilon)$ выражаются из (5)

$$\eta_{11} = -3M\frac{(1+\varepsilon)^3k}{(1+k)^2}\left(\frac{k}{\delta} - \frac{1+7k+k^2}{5(1+k)}\ln\frac{\delta(k+1)}{k}\right),$$

$$\eta_{12} = 9M\frac{(1+\varepsilon)^2k^2}{(1+k)^2}\ln\frac{\delta(k+1)}{k},$$

где $M = \mu_l/\rho\omega R_{10}^2$.

Перенесем линейные члены по x и ε в левую часть равенства (20), а квадратичные в правую, причем полные дифференциалы по квадратичным членам опускаются:

$$\frac{d}{dt'}\left(\mu_{11}\dot x + \bar\eta_{11}x + \mu_{12}\dot\varepsilon + \bar\eta_{12}\varepsilon\right) = f_B + f_{\mu_l}^{(2)}, \tag{23}$$

где введены обозначения $\bar\eta_{ij} = \eta_{ij}(\bar\delta,k,0)$,

$$f_{\mu_l}^{(2)} = x\dot\varepsilon\frac{9Mk^2}{(1+k)^2\bar\delta} + 3\dot x\varepsilon\bar\eta_{11}. \tag{24}$$

Учитывая (9), в линейном приближении получим

$$x = -\varepsilon_0\left(a\cos(t') + b\sin(t')\right), \\ a = (\eta_{11}\eta_{12} + \mu_{11}\mu_{12})/(\eta_{11}^2 + \mu_{11}^2), \\ b = (\eta_{12}\mu_{12} - \eta_{11}\mu_{11})/(\eta_{11}^2 + \mu_{11}^2). \tag{25}$$

Стоящая в правой части уравнения (23) осредненная по периоду суммарная сила

$$\bar f(M,k,\bar\delta) = \bar f_B + \bar f_{\mu_l}^{(2)} \tag{26}$$

определяет характер сближения пузырьков. Она зависит от параметра вязкости $M = \mu_l/\rho\omega R_{10}^2$, отношения радиусов k и среднего по периоду зазора между сферами.

Если $\bar f$ остается отрицательной во время сближения, то процесс сближения заканчивается слиянием пузырьков. Этот случай демонстрируется на рис. 2a и b при отношении радиусов 1 и 2.8. Исследование показывает, что средняя сила не меняет отрицательного знака при отношении радиусов $R_2/R_1 \le 2.8$, произвольных значениях $\bar\delta > 0$ и для значений M, меняющихся в широких пределах. В недавних экспериментах [12–14] рассматривался следующий диапазон параметров: $0 < M < 0.07$. В этом случае как в теории, так и в экспериментах процесс сближения заканчивался слиянием пузырьков.

При $R_2/R_1 \ge 3$ вблизи контакта средняя сила меняет знак с минуса на плюс. В точке $\bar\delta = \delta_0$ средняя сила обращается в нуль. В этой точке процесс сближения заканчивается и устанавливаются периодические колебания при положительном зазоре $\bar\delta = \delta_0 > 0$. Этот случай демонстрируется на рис. 2c и d при отношении радиусов 3 и 5. Как видно из графиков, установившийся зазор δ_0 зависит от параметра вязкости M. Анализ показывает, что зависимость δ_0 от M близка к линейной.

Аналогично был рассмотрен случай взаимодействия двух пузырьков с учетом вязкой силы, определенной по формуле (6) для нулевого тангенциального напряжения. Такое граничное условие реализуется в хорошо очищенной жидкости (в частности, в дистиллированной воде). Анализ показал, что в этом случае средняя сила $\bar f$ всегда отрицательна при любых значениях M, k и $\bar\delta$. Таким образом, можно заключить, что в дистиллированной воде вязкие силы не могут препятствовать слиянию пузырьков.

7. Численное решение уравнений Лагранжа. Полученные методом осреднения результаты можно

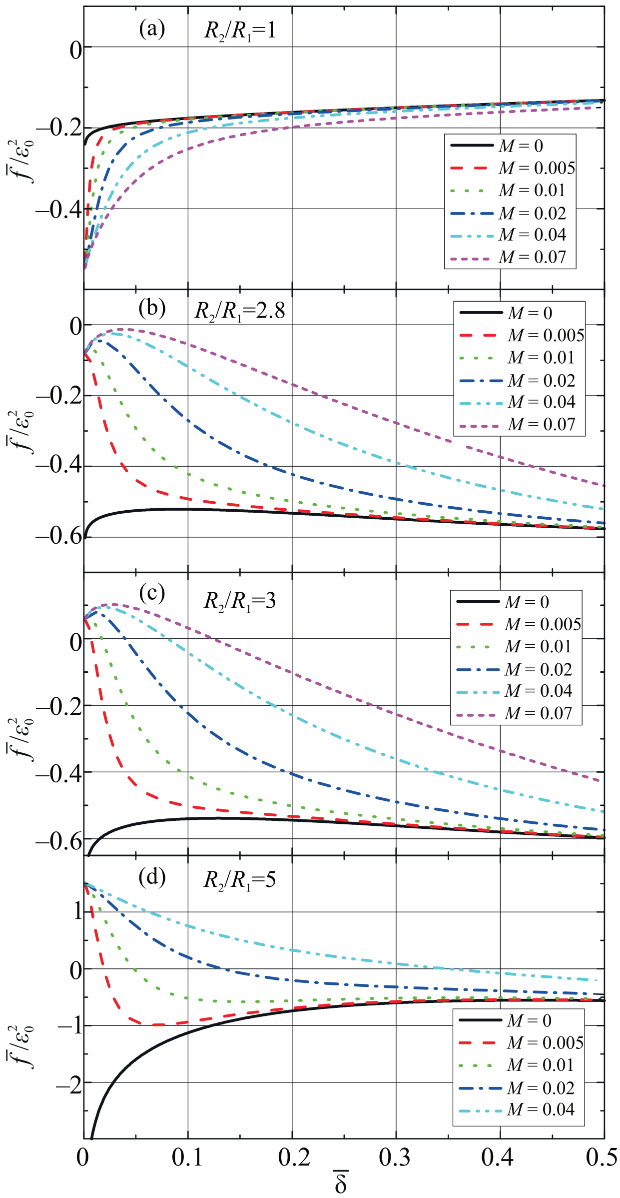

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость осредненной силы $\overline{f}/\varepsilon_0^2$ от среднего безразмерного зазора $\bar{\delta}$ для: (a) – $k = 1$, (b) – $k = 2.8$, (c) – $k = 3$, (d) – $k = 5$ при разных параметрах M

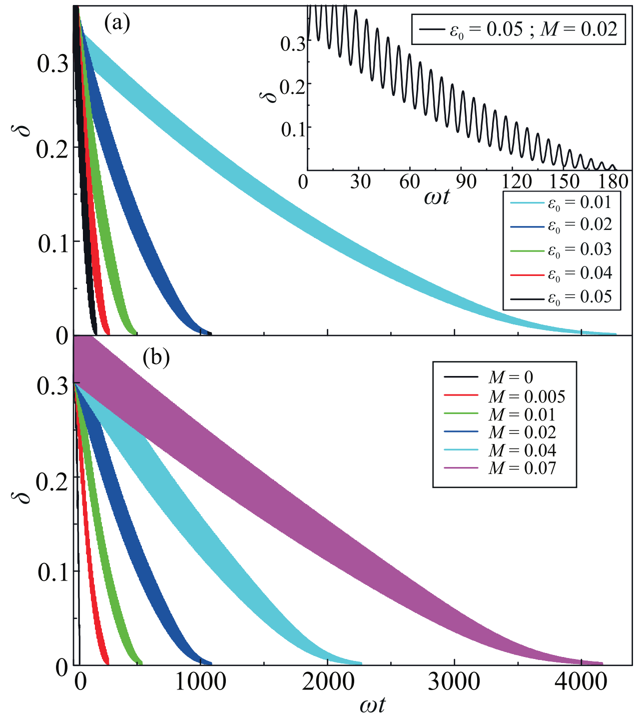

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость относительного зазора $\delta(\omega t) = h/R_1$ для $R_2/R_1 = 1$ при: (a) – $M = 0.02$ и $\varepsilon_0 = \{0.01 \div 0.05\}$, на вставке – при $M = 0.02$ и $\varepsilon_0 = 0.05$; (b) – $M = \{0 \div 0.07\}$ и $\varepsilon_0 = 0.02$

проверить с помощью численного решения уравнений Лагранжа (3). Как коэффициенты кинетической энергии $A_1, B, ..., C_{22}$, так и вязкие силы $F_{\mu_l 1}$ и $F_{\mu_l 2}$ были найдены из точных рядов [9, 28, 29, 34, 37, 39] в разложении до h^3.

Система уравнений (3) второго порядка решалась численно для различных значений параметров M, ε_0 и k. Для одинаковых пузырьков ($k = R_2/R_1 = 1$) зависимость относительного зазора $\delta = h/R_1$ от ωt представлена на рис. 3. Начальный зазор полагался равным $\delta(0) = 0.3$, а скорости центров – равными нулю.

В виду того, что при $h \leq 100$ нм пленка, разделяющая пузырьки, вследствие флуктуаций разрушается [1, 14], то численное интегрирование уравнений (3) останавливалось при достижении критического зазора $\delta(\omega t^*) \leq \delta^* = 10^{-3}$, который считается достаточным для слияния пузырьков. Как видно из рис. 3, достижение критического значения зазора наблюдается для различных значений параметров $\varepsilon_0 = \{0.01 \div 0.05\}$ и $M = \{0 \div 0.07\}$. Данные результаты находятся в полном согласии с результатами метода осреднения рис. 3a.

Следует заметить, что из численных решений уравнений (3) была получена эмпирическая зависимость времени сближения от $\delta(0) = 0.3$ до δ^* в виде $\omega t^* \sim 20M/\varepsilon_0^2$. При отсутствии же вязкости время сближения значительно меньше и пропорционально $\omega t^* \sim 1/\varepsilon_0$.

Численные решения уравнений (3) дают аналогичные зависимости вплоть до отношений радиусов $R_2/R_1 \leq 2.8$, что согласуется с результатами метода осреднения.

Для отношения радиусов $R_2/R_1 \geq 3$ существует область параметров M, ε_0, для которых процесс сближения не заканчивается слиянием пузырьков. Пузырьки сближаются до некоторого среднего расстояния, около которого устанавливаются периодические колебания (рис. 4). Это среднее расстояние

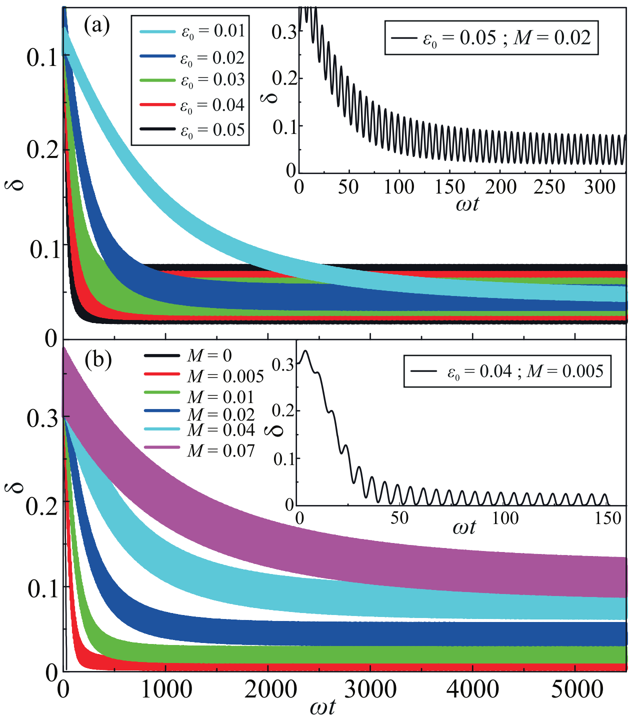

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость относительного зазора $\delta(\omega t) = h/R_1$ для $R_2/R_1 = 3$ при: (a) – $M = 0.02$ и $\varepsilon_0 = \{0.01 \div 0.05\}$, на вставке – при $M = 0.02$ и $\varepsilon_0 = 0.05$; (b) – $M = \{0 \div 0.07\}$ и $\varepsilon_0 = 0.02$, на вставке при $M = 0.005$ и $\varepsilon_0 = 0.04$ достигается критическое расстояние между пузырьками 10^{-3}

практически линейно растет с ростом M и согласуется с теоретическим значением δ_0, полученным методом осреднения рис. 2c.

При увеличении амплитуды пульсации пузырьков в этом установившемся режиме можно добиться слияния пузырьков за счет достижения величины $\delta(\omega t)$ ниже критического значения $\delta^* = 10^{-3}$, вставка на рис. 4b.

Из численных расчетов для $\varepsilon_0 \in [0.001; 0.05]$ и $R_2/R_1 = 3$ получено, что при параметре вязкости M таком, что

$$\frac{\varepsilon_0}{M} < 16/\lg(1/\varepsilon_0) - 4 \approx 4, \tag{27}$$

процесс сближения пузырьков заканчивается до достижения критического зазора и устанавливаются периодические колебания на конечном расстоянии между сферами. Слияния не происходит.

Аналогичные численные расчеты были проведены для пузырьков с большим отношением радиусов вплоть до $R_2/R_1 = 10$. Слияния не происходит при выполнении аналогичного неравенства (27).

Для случая нулевого тангенциального напряжения (6) численное решение уравнений (3) дает слияние для любых отношений радиусов и параметров M, k и ε_0, что также согласуется с результатами, полученными методом осреднения.

8. Обсуждение результатов. В недавних экспериментальных работах [12–15] изучалось парное слияние газовых пузырьков в воде, пульсирующих в переменном поле давления. Пузырьки имели радиусы $R \sim 5 \div 60$ мкм, при этом отношение радиусов варьировалось в пределах $1 \leq R_2/R_1 < 2.5$, частота акустического воздействия и амплитуда осцилляции давления соответственно равны $\omega/2\pi \sim \sim 20 \div 30$ кГц, $\Delta p \sim 10 \div 20$ кПа. В этом случае параметр $M = \mu_l/(\rho_l \omega R_{10}^2)$ меняется в пределах $\sim 0.002 \div 0.07$, а относительная амплитуда осцилляции радиусов $\varepsilon_0 = \Delta p/(3\gamma\bar{p})$ изменяется между значениями 0.02 и 0.05. В согласии с теорией при $R_2/R_1 \leq 2.8$ во всех экспериментах наблюдалось слияние.

Отсутствие слияния при отношении радиусов $R_2/R_1 \geq 3$ требует отдельную экспериментальную проверку, однако в литературе уже имеется косвенное подтверждение справедливости данного результата. В работе [14] рассматривалось парное слияние пузырьков с радиусами ~ 20 мкм. На приведенной серии рисунков видно, что на протяжении всего процесса их сближения, с одним из пузырьков находится в "контакте" третий малый пузырек радиуса ~ 5 мкм. После слияния первых двух пузырьков на фоне слившегося пузырька можно заметить третий малый пузырек, который так и остался в контакте, а слияния не произошло.

9. Заключение. Таким образом, было получено, что для отношения радиусов пузырьков не более 2.8 вязкие силы не препятствуют их слиянию. При отношении больше 3 и при наличии ПАВ существует область параметров вязкости и амплитуды акустического давления, при которых вязкие силы способны уравновесить силы гидродинамического притяжения. Случаи парного слияния для отношения радиусов менее 2.8 находятся в согласии с известными экспериментами. Случаи отсутствия слияния также находят экспериментальные подтверждения.

Работа выполнена по теме государственного задания (# госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

1. T. O. Oolman and H. W. Blanch, Chem. Eng. Comm. **43**, 237 (1986).

2. H. Feng, G. V. Barbosa-Cánovas, and J. Weiss, *Ultrasound technologies for food and bioprocessing*, Springer, N.Y. (2011).
3. Y. Chen, G. Xie, J. Chang, J. Grundy, and Q. Liu, Fuel **248**, 38 (2019).
4. Б. В. Дерягин, С. С. Духин, Н. Н. Рулев, *Микрофлотация: Водоочистка, Обогащение*, Химия, М. (1986).
5. C. C. Coussios and R. A. Roy, Annu. Rev. Fluid Mech. **40**, 395 (2008).
6. Г. Ламб, Гидродинамика, *Гостехиздат*, М., Л. (1947).
7. W. M. Hicks, Philos. Trans. R. Soc. **171**, 455 (1880).
8. V. Bjerknes, *Fields of force: Supplementary Lectures, Applications to Meteorology*, The Columbia university press, N.Y. (1906).
9. R. A. Herman, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **87**, 204 (1887).
10. В. Ф. Казанцев, ДАН СССР **129**, 64 (1959).
11. L. A. Crum, J. Acoust. Soc. Am. **57**, 1363 (1975).
12. J. Jiao, Y. He, T. Leong, S. E. Kentish, M. Ashokkumar, R. Manasseh and J. Lee, J. Phys. Chem. B **117**, 12549 (2013).
13. J. Jiao, Y. He, S. E. Kentish, M. Ashokkumar, R. Manasseh, and J. Lee, Ultrasonics **58**, 35 (2015).
14. J. Jiao, Y. He, K. Yasui, S. E. Kentish, M. Ashokkumar, R. Manasseh, and J. Lee, Ultrasonics Sonochemistry **22**, 70 (2015).
15. S. Cleve, M. Guédra, C. Inserra, C. Mauger, and P. Blanc-Benon, Phys. Rev. E **98**, 033115 (2018).
16. Е. А. Заболотская, Акустический журнал **30**, 618 (1984).
17. A. Harkin, T. J. Kaper, and A. L. I. Nadim, J. Fluid Mech. **445**, 377 (2001).
18. R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, C. D. Ohl, and W. Lauterborn, Phys. Rev. E **56**, 2924 (1997).
19. A. A. Doinikov, Phys. Rev. E **64**, 026301 (2001).
20. Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щукин, Акустический журнал **18**, 565 (1972).
21. H. N. Oguz and A. Prosperetti, J. Fluid Mech. **218**, 143 (1990).
22. А. А. Аганин, А. И. Давлетшин, Математическое моделирование **21**, 89 (2009).
23. A. A. Doinikov and A. Bouakaz, Phys. Rev. E **92**, 043001 (2015).
24. Ю. А. Кобелев, Л. А. Островский, А. М. Сутин, Письма в ЖЭТФ **30**, 423 (1979).
25. P. L. Marston, E. H. Trinh, J. Depew, and J. Asaki, in *Bubble Dynamics and Interface Phenomena*, ed. by J. R. Blake, J. M. Boulton-Stone, and N. H. Thomas, Kluwer Academic, Dordrecht (1994), p. 343.
26. А. Г. Петров, МЖГ **4**, 81 (2011).
27. S. V. Sanduleanu and A. G. Petrov, J. Phys.: Conf. Ser. **656**, 012035 (2015).
28. О. В. Воинов, А. Г. Петров, Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа **10**, 86 (1976).
29. Ш. В. Сандуляну, ПММ **3**, 312 (2020).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, М. (1988).
31. D. J. Jeffrey, Mathematika **29**, 58 (1982).
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, М. (1988).
33. А. Г. Петров, *Аналитическая гидродинамика*, Физматлит, М. (2010).
34. Ш. В. Сандуляну, ПМТФ **4**, в печати (2020).
35. S. Michelin, G. Gallino, F. Gallaire, and E. Lauga, J. Fluid Mech. **860**, 172 (2019).
36. А. З. Зинченко, ПММ **42**, 955 (1978).
37. Ш. В. Сандуляну, *Волны и вихри в сложных средах: 10-ая межд. конф. – школа молодых ученых; 03–05 декабря 2019 г.*, ООО "Премиум-принт", М. (2019).
38. S. Michelin, E. Guérin, and E. Lauga, Phys. Rev. Fluids. **3**, 043601 (2018).
39. Ш. В. Сандуляну, А. Г. Петров ДАН **483**, 393 (2018).