

О вычислении специальной геометрии для Калаби–Яу типа “петля” и двух конструкциях зеркального многообразия

А. А. Артемьев^{+*1)}, И. В. Кочергин^{+*1)}

⁺ Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 141701 Черногловка, Россия

^{*} Московский физико-технический институт, 142432 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 12 августа 2020 г.

После переработки 12 августа 2020 г.

Принята к публикации 12 августа 2020 г.

Вычислены кэлеровы потенциалы на пространстве модулей комплексных структур для двух многообразий Калаби–Яу, заданных как гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах. Найдены зеркальные образы этих многообразий в соответствии с конструкциями Батырева и Берглунда–Хубша, показана их эквивалентность.

DOI: 10.31857/S1234567820170012

Компактификация теории суперструн является одним из возможных способов объединить Стандартную модель и квантовую гравитацию. Известно, что в этом подходе из феноменологических соображений требуется компактификация 6 дополнительных измерений на многообразии Калаби–Яу; низкоэнергетическая теория тогда определяется его специальной кэлеровой геометрией [1]. Важным инструментом в задаче о ее вычислении является гипотеза о существовании зеркальной симметрии: она позволяет провести не прямое вычисление потенциала на пространстве кэлеровых модулей, для которого не существует явных формул. Зеркальным семейством Калаби–Яу к данному называют такое, у которого пространство модулей комплексных структур совпадает с пространством кэлеровых модулей исходного и наоборот.

Доступным для изучения классом многообразий Калаби–Яу являются гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах; классификация таких Калаби–Яу приведена в [2]. Для примеров из этого класса уже было получено много результатов (см., например, работы [3–5]). Наша работа имеет целью продолжение исследований в этом направлении; мы вычисляем специальную геометрию для двух примеров из не рассматриваемого ранее типа “петля” (типа 16 согласно классификации [2]), а также строим для этих примеров зеркальные семейства двумя способами и показываем их эквивалентность.

Приведем краткое описание метода вычисления кэлерова потенциала на пространстве модулей ком-

плексных структур Калаби–Яу, заданного нулями многочлена во взвешенном проективном пространстве, развитый в серии работ Алешкина, Белавина, начиная с [6].

Рассматривается взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}_{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5}$ – фактор $\mathbb{C}^5 / \{0\}$ по действию \mathbb{C}^* , определенному как

$$\mathbb{C}^5 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{C}^*} \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{C}^*} (\lambda^{k_1} x_1, \lambda^{k_2} x_2, \lambda^{k_3} x_3, \lambda^{k_4} x_4, \lambda^{k_5} x_5). \quad (1)$$

Нас интересует гиперповерхность, заданная в нем нулями некоторого невырожденного полинома

$$0 = W_0(x) = \sum_{a=1}^5 \prod_{i=1}^5 x_i^{M_{ai}} \quad (2)$$

с условиями $\sum_i k_i M_{ai} = d = \sum_i k_i \forall a$. Первое равенство – условие квазиоднородности; второе условие необходимо, чтобы заданная поверхность была многообразием Калаби–Яу. Известно, что деформациям комплексной структуры этого многообразия отвечает добавление к W_0 линейной комбинации мономов той же степени квазиоднородности d :

$$W(x, \phi) = W_0(x) + \sum_{i=1}^h \phi_i e_i(x). \quad (3)$$

Нужно исключить из множества всех таких мономов те, которые могут быть сгенерированы заменой координат в исходном полиноме, т.е. мономы, пропорциональные элементам из $\langle \frac{\partial W_0}{\partial x_i} \rangle$. В большинстве случаев мономиальными деформациями пространство моду-

¹⁾e-mail: artemev.aa@phystech.edu; kochergin.iv@phystech.edu

лей комплексных структур (локально) исчерпывается (это всегда так для многообразий, заданных полиномом типа петля).

Определим группу “квантовых симметрий” $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}_d$ полинома W_0 . Ее действие на проективные координаты совпадает с указанным в (1) действием \mathbb{C}^* для параметра $\lambda : \lambda^d = 1$. Тогда рассмотрим так называемое “киральное кольцо” полиномов:

$$R^{\mathcal{Q}} = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^{\mathcal{Q}}}{\langle \partial W_0 / \partial x_i \rangle}. \tag{4}$$

Базис в нем задают мономы E_μ , инвариантные под действием “квантовых симметрий” (т.е. степени, кратной d). Это кольцо – конечномерное линейное пространство: после фактора по $\langle \partial W_0 / \partial x_i \rangle$ степени квазиоднородности его базисных элементов не больше $3d$. По степеням естественно ввести градуировку: $R^{\mathcal{Q}} = R^0 \oplus R^d \oplus R^{2d} \oplus R^{3d}$; тогда размерности компонент фиксированной градуировки равны $\dim R^{0,d,2d,3d} = (1, h, h, 1)$. Введем также спаривание η (билинейный функционал) на этом кольце, матрица которого в базисе $E_\mu, \mu = 1, \dots, 2h + 2$

$$\eta(e_\mu, e_\nu) \equiv \eta_{\mu\nu} = \text{Res} \frac{E_\mu E_\nu}{\prod_{i=1}^5 \partial_i W_0}. \tag{5}$$

В \mathbb{C}^5 можно определить \mathcal{Q} -инвариантные когомологии $(H_{D_\pm})_{\mathcal{Q}}$ оператора $D_\pm = d \pm dW_0 \wedge$. Тогда группа $(H_{D_\pm}^5)_{\mathcal{Q}}$ изоморфна $R^{\mathcal{Q}}$ как линейное пространство; базис в ней – формы вида $E_\mu(x) d^5 x$. К ним определяются дуальные гомологии $H_5(\mathbb{C}^5, \text{Re } W_0 \rightarrow \pm\infty)_{\mathcal{Q}}$, такие, что невырождено спаривание с помощью “осциллирующих интегралов”: для $L_a^\pm \in H_5(\mathbb{C}^5, \text{Re } W_0 \rightarrow \pm\infty)$ оно задается формулой

$$\langle E_\mu d^5 x, L_a^\pm \rangle = \int_{L_a^\pm} E_\mu e^{\mp W_0(x)} d^5 x. \tag{6}$$

Между $H_5(\mathbb{C}^5, \text{Re } W_0 \rightarrow \pm\infty)_{\mathcal{Q}}$ и $H_3(X, \mathbb{R})$, где X – многообразие Калаби–Яу, заданное нулями полинома $W(x, \phi)$, можно построить изоморфизм. Используя его свойства и заданные ранее определения, интересующий нас кэлеров потенциал записывается в удобном для вычислений виде

$$e^{-K_c(X)} = \sigma_\mu^+ \eta_{\mu\lambda} \overline{\mathcal{M}_{\lambda\nu} \sigma_\nu^-}; \tag{7}$$

$$\sigma_\mu^\pm = \int_{\Gamma_\mu^\pm} e^{\mp W(x, \phi)}, \mathcal{M} = T^{-1} \overline{T}, T_{a\mu}^\pm = \int_{L_a^\pm} e_\mu e^{\mp W_0} d^5 x; \tag{8}$$

$$\Gamma_\mu^\pm : \int_{\Gamma_\mu^\pm} e^{\mp W_0(x)} e_\nu d^5 x = \delta_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Важно, что циклы L_a^\pm нужно брать вещественными; матрица \mathcal{M} не зависит от их выбора. Перейдем к рассмотрению исследуемых примеров. Рассмотрим взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}_{9,26,11,23,20}$ и полином

$$0 = W_0 = x_1^7 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^6 x_4 + x_4^3 x_5 + x_5^4 x_1,$$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Его степень квазиоднородности $d = 89$. Пространство модулей его комплексных структур определяется мономиальными деформациями, удовлетворяющими описанным ранее условиям. Таких мономов всего $h = 7$ и их показатели степеней удобно записать в матрицу S

$$e_l = \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В киральном кольце образуют базис $E_1 = 1, h$ мономов $E_{l+1} \equiv e_l$ степени d , а также следующие мономы степени $2d$ и $3d$ (всего $2h + 2 = 16$ мономов E_α):

$$E_{h+1+i} = (e_1^2, e_1 e_2, e_1 e_4, e_1 e_5, e_1 e_6, e_1 e_7, e_4^2);$$

$$E_{16} = e_1 e_2 e_7. \tag{12}$$

Можно найти матрицу спаривания η , как в (5); в нашем базисе с точностью до перестановок базисных элементов она единичная антидиагональная.

Рассмотрим в \mathbb{C}_5 относительные гомологии $H_5(\mathbb{C}_5, \text{Re } (W_0) \rightarrow \infty)_{\mathcal{Q}}$. Выберем в них базис Γ_μ , дуальный к формам $E_\alpha(x) d^5 x$ относительно осциллирующих интегралов, согласно (9). Из (8) кэлеров потенциал выражается через величины

$$\sigma_\beta^+(\phi) = \int_{\Gamma_\beta} e^{-W(x, \phi)} = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_h=0}^{\infty} (-1)^{\sum m_i} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^h \frac{\phi_l^{m_l}}{m_l!} \int_{\Gamma_\beta} d^5 x \prod_{l=1}^h e_l^{m_l} e^{-W_0(x)} \tag{13}$$

и аналогичные ряды с другими знаками. Можно эффективно понижать степень подынтегрального выражения, пользуясь тем, что для любой 4-формы Ω

$$\int_{\Gamma_\mu} e^{-W_0} (d\Omega - dW_0 \wedge \Omega) = \int_{\Gamma_\mu} d(\Omega e^{-W_0}) = 0. \quad (14)$$

Используя эти соотношения, можно получить пять элементарных соотношений для понижения степеней. Обозначая

$$f_\beta(\mathbf{b} \equiv (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)) = \int_{\Gamma_\beta} d^5x e^{-W_0} x_1^{b_1} \dots x_5^{b_5},$$

а также i строку матрицы M как $M_{i\bullet}$, эти пять соотношений можно компактно записать в виде

$$f_\beta(\mathbf{b}) = f_\beta(\mathbf{b} - M_{i\bullet}) \cdot B_i(\mathbf{b}), \quad i = 1, \dots, 5 \quad (15)$$

$$B_i = b_j (M^{-1})_{ji} - \frac{A_i}{17}; \quad B = \mathbf{b} \cdot (M^{-1}) - \frac{\mathbf{A}}{17}, \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = (15, 12, 15, 12, 14).$$

Если мы имеем произведение мономов вида $\prod_{l=1}^h e_l^{m_l}$, то соответствующая ему строка показателей степеней x

$$\mathbf{b}[\mathbf{m} \equiv (m_1, \dots, m_7)] = \mathbf{m} \cdot S. \quad (17)$$

Соответствующие такому \mathbf{b} коэффициенты B

$$B(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \mathbf{m} \cdot (SM^{-1}) - \frac{\mathbf{A}}{17}. \quad (18)$$

Для дальнейшего введем обозначения для элементов строки B как функций от набора целых чисел \mathbf{m} ; в данном случае она имеет вид

$$B(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) \equiv \frac{1}{17} \begin{pmatrix} \nu & \rho & \nu & \rho & \mu \end{pmatrix} (\mathbf{m}). \quad (19)$$

Теперь мы хотим переписать общие соотношения (15) так, чтобы они позволили понижать числа m в произведениях такого типа. Такие соотношения придется искать подбором; они приведены ниже:

$$f_\beta(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \frac{\mu(\mathbf{m})}{17} f_\beta(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{j\bullet}]) = \begin{cases} \frac{\nu^2(\mathbf{m})}{17^2} f_\beta(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{6\bullet}]) \\ \frac{\rho^2(\mathbf{m})}{17^2} f_\beta(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{7\bullet}]) \end{cases}, \quad j = 1, \dots, 5, \quad (20)$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Редукция по первым 5 формулам понижает μ на 17, а другие два числа (ν и ρ) не меняет; аналогичное верно для других двух способов понижения степени. Таким образом, остаток по модулю 17 у всех трех чисел не меняется в результате такого понижения. Любое из чисел $\mathbf{m} = \mu \bmod 17$, $\mathbf{n} = \nu \bmod 17$, $\mathbf{r} = \rho \bmod 17$ однозначно определяет моном из кирального кольца, к которому мы придем в конце процедуры; можно перенумеровать мономы, например, числом $\beta = \mathbf{m} \in [1, 16]$, тогда $\mathbf{n}[\beta] = \frac{2\mathbf{m}}{3}$; $\mathbf{r}[\beta] = \frac{5\mathbf{m}}{3}$. Итак, мы приходим к выражению

$$\sigma_\beta^+(\phi) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_h=0 \\ \mathbf{m}(\mathbf{m})=\beta}} (-1)^{\sum m_i} \left(\prod_l \frac{\phi_l^{m_l}}{m_l!} \right) \times \frac{\Gamma(\frac{\mu(\mathbf{m})}{17} + 1) \Gamma^2(\frac{\nu(\mathbf{m})}{17} + 1) \Gamma^2(\frac{\rho(\mathbf{m})}{17} + 1)}{\Gamma(\frac{\mathbf{m}(\mathbf{m})}{17}) \Gamma^2(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{m})}{17}) \Gamma^2(\frac{\mathbf{r}(\mathbf{m})}{17})}. \quad (22)$$

Как можно проверить, σ_β^- отличаются фактором $(-1)^{|\beta|}$, где $|\beta|$ – градуировка соответствующего монома в киральном кольце ($|\beta| = 0, 1, 2, 3$). Теперь мы должны выбрать базис из вещественных циклов L_a и вычислить матрицу перехода T от Γ к L ; из дуальности Γ и E следует, что она дается выражением

$$T_{a\beta} = \int_{L_a} E_\beta e^{-W_0} d^5x. \quad (23)$$

Сделаем сперва замену переменных

$$x_i = \prod_{j=1}^5 y_j^{17(M^{-1})_{ij}}, \quad (24)$$

при которой W_0 перейдет в $W_0(x(y)) = \sum y_i^{17}$, а все мономы $E_\alpha(x)$ – в мономы по y с целыми степенями.

Определим одномерный цикл в виде “уголка” условиями (с произвольно заданной ориентацией)

$$C[y, \varphi] = \{ \text{Arg } y = \varphi \text{ or } \text{Arg } y = \varphi + \frac{2\pi}{17} \}. \quad (25)$$

Тогда набор из 16 базисных циклов L_a можно выбрать в виде циклов Лефшеца

$$L_a = C[y_1, \frac{2\pi a}{17}] \times \prod_{i=2}^5 C[y_i, 0], \quad a = 1, \dots, 16. \quad (26)$$

Очевидно, что они удовлетворяют условию $\text{Re } W_0 \rightarrow -\infty, y \rightarrow \infty$. Теперь можно вычислить матрицу T для таких циклов, матрицу $\mathcal{M} = T^{-1}\bar{T}$ и, наконец, матрицу $(\eta\mathcal{M})$ – она оказывается диагональной:

$$(\eta\mathcal{M})_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \cdot \gamma(\mathbf{m}[\mu]/17) \gamma^2(\mathbf{n}[\mu]/17) \gamma^2(\mathbf{r}[\mu]/17),$$

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{27}$$

Мы получаем итоговый ответ (здесь σ_β заданы формулой (22))

$$e^{-K_c(\phi)} = \sum_{\mu=1}^{16} (-1)^{|\mu|} \gamma\left(\frac{\mu}{17}\right) \gamma^2\left(\frac{\mathbf{n}[\mu]}{17}\right) \gamma^2\left(\frac{\mathbf{r}[\mu]}{17}\right) \cdot |\sigma_\mu(\phi)|^2. \tag{28}$$

Второй пример многообразия того же типа задан взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}_{25,16,31,36,83}$ и уравнением

$$0 = W_0(x) = x_1^7 x_2 + x_2^{10} x_3 + x_3^5 x_4 + x_4^3 x_5 + x_5^2 x_1 = 0,$$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

В тех же обозначениях, что для первого примера, соответствующие ему данные: $d = 191, h = 4,$

$$e_l = \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{lj}}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Базис в киральном кольце

$$E_\alpha = \left(1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_3, e_4, e_1 e_4, \frac{e_1 e_3 e_4}{e_2}, e_3 e_4, e_1 e_3 e_4 \right). \tag{31}$$

Элементы вектор-строки появляющихся при понижении коэффициентов мы обозначим как

$$B(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \mathbf{m} \cdot (SM^{-1}) - \frac{\mathbf{A}}{11} \equiv \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \mu & \mu & \nu & \lambda & \kappa \end{pmatrix} (\mathbf{m}),$$

$$\mathbf{m} = (m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4), \mathbf{A} = (10, 10, 9, 8, 7). \tag{32}$$

4 соотношения для понижения степеней в терминах чисел m имеют вид

$$f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \frac{\mu^2(\mathbf{m})}{11^2} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{1\bullet}]) = \begin{cases} \frac{\nu(\mathbf{m})}{11} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{2\bullet}]) \\ \frac{\lambda(\mathbf{m})}{11} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{3\bullet}]) \\ \frac{\kappa(\mathbf{m})}{11} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{4\bullet}]) \end{cases} \tag{33}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Мономы из кирального кольца теперь однозначно задаются любым из чисел

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(m) &= \mu(\mathbf{m}) \pmod{11}, \mathbf{n}(\mathbf{m}) = \nu(\mathbf{m}) \pmod{11}, \\ \mathbf{l}(\mathbf{m}) &= \lambda(\mathbf{m}) \pmod{11}, \mathbf{k}(\mathbf{m}) = \kappa(\mathbf{m}) \pmod{11}. \end{aligned} \tag{35}$$

Занумеровав их, например, числом $\mathbf{m} = \alpha,$ получаем формулу для периодов

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^+ &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_h=0 \\ \mathbf{m}(\mathbf{m})=\alpha}}^{\infty} (-1)^{\sum m_a} \left(\prod_a \frac{\phi_a^{m_a}}{m_a!} \right) \frac{\Gamma^2\left(\frac{\mu(\mathbf{m})}{11} + 1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\mathbf{m}(\mathbf{m})}{11}\right)} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu(\mathbf{m})}{11} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{m})}{11}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda(\mathbf{m})}{11} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{l}(\mathbf{m})}{11}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\kappa(\mathbf{m})}{11} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{k}(\mathbf{m})}{11}\right)}. \end{aligned} \tag{36}$$

Для нахождения матрицы \mathcal{M} мы делаем аналогичную (24) замену $x_i = \prod y_j^{11(M^{-1})_{ij}}$; она обладает теми же свойствами, что раньше. Базис из циклов L_α выбирается аналогичным (25) образом, только теперь C – “угол” раствора $\frac{2\pi}{11}$. Вычислив матрицу $\mathcal{M},$ получаем ответ для кэлера потенциала

$$\begin{aligned} e^{-K_c(\phi)} &= \sum_{\beta=1}^{10} (-1)^{|\beta|} \gamma^2\left(\frac{\beta}{11}\right) \times \\ &\times \gamma\left(\frac{\mathbf{n}[\beta]}{11}\right) \gamma\left(\frac{\mathbf{l}[\beta]}{11}\right) \gamma\left(\frac{\mathbf{k}[\beta]}{11}\right) |\sigma_\beta|^2. \end{aligned} \tag{37}$$

Для дальнейшего опишем две конструкции построения зеркального многообразия для Калаби–Яуги гиперповерхностей во взвешенном проективном пространстве.

Первая из них приведена в [2]. Она описывает зеркальное семейство как орбиформ в другом взвешенном проективном пространстве. Имея 5×5 матрицу коэффициентов $M,$ для построения зеркального многообразия нужно:

1. построить полином W' с матрицей показателей $M' = M^T;$
2. найти набор весов k'_i таких, что полином W' квазиоднороден по отношению к ним со степенью $d' = \sum k'_i;$ они задают новое взвешенное проективное пространство;
3. определить многообразие $X',$ заданное как гиперповерхность в этом проективном пространстве нулями $W';$
4. найти полную группу фазовых симметрий A полинома W' и группу его “геометрических

симметрий” G' как фактор A по группе $Q' = \mathbb{Z}_{d'}$ “квантовых” симметрий полинома W' : $G' = A/Q'$, аналогично определить группу геометрических симметрий G полинома W ;

- 5. при несовпадении G' и Q взять орбиформл многообразия X' по некоторой дискретной группе H так, чтобы для фактор-многообразия выполнялось $Q'' = Q' \times H = G$ и $G'' = G'/H = Q$.

Вторая – конструкция Батырева – описывает зеркальное многообразие как подмногообразие в торическом, заданное критическими точками некоторого полинома. Она описана и использована, например, в [4]. Торическим называют многообразие вида $(\mathbb{C}^N - Z)/(\mathbb{C}^*)^h$, где действие $(\mathbb{C}^*)^h$ на проективные координаты y_a , $a = 1, \dots, N$ определяется “матрицей зарядов” Q :

$$y_a \rightarrow \prod_{l=1}^h \lambda_l^{Q_{la}} y_a, \quad \lambda_l \in \mathbb{C}^*, \quad (38)$$

а Z является инвариантным относительно этого действия множеством. Набор весов Q_{la} в нашем случае определяется следующим образом: показатели степеней входящих в состав полинома мономов вместе с его деформациями задают набор из $h + 5$ пятимерных векторов v_a ; их координаты задаются матрицей

$$v_{ia} = (M^T | S^T), \quad i = 1, \dots, 5, \quad a = 1, \dots, h + 5. \quad (39)$$

Тогда матрица Q определяется при поиске интегрального базиса из h целочисленных линейных соотношений на эти вектора вида $\sum_{a=1}^{h+5} Q_{la} v_{ia} = 0$. Соотношения задают интегральный базис, если любое целочисленное соотношение на v может быть представлено суммой с целыми коэффициентами соотношений Q_{li} .

В следующей части мы покажем соответствие этих двух конструкций явным построением для наших примеров полиномов, задающих подмногообразие в торическом. Сначала приведем ответ, дающийся конструкцией Берглунда–Хубша; в обоих случаях, как легко проверить, орбиформа брать не нужно и зеркальное многообразие определяется как (для 1 и 2 примеров соответственно)

$$1 : \mathbb{P}_{5,2,3,5,2}, \quad 0 = V_0 = y_1^3 y_2 + y_2^7 y_3 + y_3^4 y_4 + y_4^3 y_5 + y_5^6 y_1, \quad d_M = 17; \quad (40)$$

$$2 : \mathbb{P}_{1,1,2,3,4}, \quad 0 = V_0 = y_5 y_1^7 + y_1 y_2^{10} + y_2 y_3^5 + y_3 y_4^3 + y_4 y_5^2, \quad d_M = 11. \quad (41)$$

Выпишем интегральный базис целочисленных соотношений Q для двух наших примеров:

$$1 : Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2 : Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Полином, определяющий своими критическими точками подмногообразие в торическом, должен быть инвариантным при действии $(\mathbb{C}^*)^h$, т.е. быть линейной комбинацией мономов $U(y) = \sum f_j(y)$ таких, что

$$f_j = \prod_{a=1}^{h+5} y_a^{P_{aj}}, \quad \sum_{a=1}^{h+5} Q_{la} P_{aj} = 0 \quad \forall j, l. \quad (43)$$

Выберем 5 таких мономов так, чтобы P_{aj} для $a = 1, \dots, 5$ совпадали с элементами матрицы M_{aj} . Тогда из условия (43) однозначно восстанавливается P_{aj} для $a = 6, \dots, h + 5$ из решения системы линейных уравнений. Из построения матрицы Q следует, что в обоих случаях $P_{aj} = S_{a-5,j}$, $a = 6, \dots, h + 5$. Рассмотрим теперь симметрии торического многообразия с генераторами (для 1 и 2 примеров соответственно)

$$1 : \Omega = 5Q_1 - 7Q_2 + Q_3 - 2Q_4 - 2Q_6 - 5Q_7; \\ 2 : \Omega = Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3 + 4Q_4. \quad (44)$$

Эта симметрия тривиально действует на проективные координаты y_a для $a > 6$, а ее действие на первые 5 совпадает с действием \mathbb{C}^* на проективные координаты в соответствующем взвешенном проективном пространстве; скажем, в 1 примере

$$\Omega : (y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6) \rightarrow (y_1 \lambda^2 \ y_2 \lambda^5 \ y_3 \lambda^2 \ y_4 \lambda^5 \ y_5 \lambda^3 \ y_6 \lambda^{-17}). \quad (45)$$

Используя остальные $h - 1$ независимых симметрий, можно тривиализовать зависимость от $h - 1$ переменной y_a , $a > 6$, обратив их в единицу. После этого для обоих примеров полином $U(y)$ приобретает вид

$$U(y) = y_6 V_0(y_1, \dots, y_5). \quad (46)$$

Его критические точки определяются условиями $V_0 = 0$ и $y_6 = 0$ (в силу невырожденности W_0). Второе условие, с учетом действия Ω -симметрии, определяет взвешенное проективное пространство, совпадающее с полученным из конструкции Берглюнда–Хубша, а первое – нужную гиперповерхность в нем. Мы показали, что конструкции согласованы только в одной точке пространства модулей; но таким же образом можно убедиться, что все семейство с различными комплексными структурами, заданное полиномом с деформациями $V(\psi) = V_0 + \sum \psi_k e_k$, “вкладывается” в торическое многообразие по Батыреву.

Таким образом, основным результатом данной работы является вычисление кэлерова потенциала на пространстве комплексных модулей для двух семейств Калаби–Яу-гиперповерхностей во взвешенном проективном пространстве из не рассматриваемого ранее типа; также построены и описаны двумя способами зеркальные к ним семейства и показана эквивалентность этих двух способов. Полученные нами выражения имеют простую структуру, до определенной степени унифицируемы и позволяют предположить общий вид ответа. Более подробное исследование этого вопроса вместе с проверкой зеркальной версии JKLMR-гипотезы (см. [7]) с использованием полученных результатов мы оставляем для дальнейшей работы.

Мы благодарны А. Белавину и М. Белаковскому за полезные обсуждения.

Работа была проведена при поддержке гранта Российского научного фонда # 18-12-00439.

-
1. P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, Nucl. Phys. B **258**, 46 (1985); DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90602-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90602-9).
 2. P. Berglund and T. Hübsch, Nucl. Phys. B **393**, 393(1–2), 377 (1993); DOI: 10.1016/0550-3213(93)90250-s; arXiv: hep-th/9201014 [hep-th].
 3. K. Aleshkin and A. Belavin, JETP Lett. **108**(10), 705 (2018); DOI: 10.1134/s0021364018220010; arXiv: 1806.02772 [hep-th].
 4. K. Aleshkin, A. Belavin, and A. Litvinov, J. Stat. Mech.: Theory Exp. **2019**(3), 034003 (2019); DOI: 10.1088/1742-5468/ab081a; arXiv: 1812.00478 [hep-th].
 5. A. A. Belavin and B. A. Eremin, Theor. Math. Phys. **201**(2), 1606 (2019); DOI: 10.1134/s0040577919110060; arXiv: 1907.11102 [hep-th].
 6. K. Aleshkin and A. Belavin, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **51**(5), 055403 (2018); DOI: 10.1088/1751-8121/aa9e7a; arXiv: 1706.05342 [hep-th].
 7. H. Jockers, V. Kumar, J. M. Lapan, D. R. Morrison, and M. Romo, Commun. Math. Phys. **325**, 1139 (2014); DOI: 10.1007/s00220-013-1874-z; arXiv: 1208.6244.