Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 5, с. 305 – 311

Изгибно-модуляционная динамика оптико-терагерцового солитона в градиентном волноводе

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 августа 2020 г.
После переработки 13 августа 2020 г.
Принята к публикации 13 августа 2020 г.

Представлено теоретическое исследование нелинейной стадии влияния изгибной и модуляционной неустойчивостей на динамику оптико-терагерцового солитона в квадратично-нелинейном градиентном волноводе. Показано, что обе неустойчивости имеют принципиальное значение и неотделимы одна от другой. Если несущая частота оптической компоненты лежит в области аномальной дисперсии групповой скорости, то данные неустойчивости развиваются в режиме с обострением, приводя к самофокусировке солитона. В случае же нормальной дисперсии групповой скорости взаимное влияние волновода и изгибно-модуляционной динамики приводят к формированию устойчивого пространственно-временного солитона.

DOI: 10.31857/S1234567820170048

Введение. Вопросы о способах повышения эффективности генерации терагерцового излучения поднимаются последнее время неоднократно в связи с актуальными приложениями данного излучения в системах безопасности, восстановления изображений, широкополосной связи, медицине и т.д. [1–3].

Особой популярностью в вопросах генерации терагерцового излучения пользуются методы, основанные на лазерных технологиях [4–6]. Один из наиболее эффективных методов генерации опирается на подход, связанный с явлением оптического выпрямления в квадратично-нелинейной среде [7–13]. Генерация происходит наиболее эффективно, если выполняется условие синхронизма [14]

$$v_g(\omega) = v_{\rm ph}, \tag{1}$$

где $v_g(\omega)$ – групповая скорость оптического импульса, соответствующая его несущей частоте ω, $v_{\rm ph}$ – фазовая скорость в области генерируемых терагерцовых частот.

В теории нелинейных волн равенство (1) называют условием синхронизма Захарова–Бенни [15–17]. Данное условие соответствует эффективному нелинейному взаимодействию длинных и коротких волн. В нашем случае роль коротковолновой компоненты играет оптический импульс. Роль длинноволновой составляющей отводится терагерцовому сигналу.

В условиях реального эксперимента добиться выполнения условия (1) весьма непросто. Ситуация здесь усугубляется еще и тем, что генерируемый терагерцовый сигнал является широкополосным. Поэтому для выполнения равенства (1) весьма желательно практическое отсутствие дисперсии в широком диапазоне частот генерируемого излучения. Таким образом, данный диапазон должен лежать вдали от линий поглощения.

При выполнении условия (1) происходит непрерывная подпитка оптическим импульсом генерируемого терагерцового сигнала. Как результат, в одномерном режиме генерации способен сформироваться оптико-терагерцовый солитон [14].

При нарушении условия (1) эффективность генерации резко снижается. В неколлинеарном режиме генерации происходит отрыв терагерцового излучения от оптического сигнала, что также снижает эффективность генерации.

Если возможность непосредственно удовлетворить условию (1) отсутствует, применяют технику наклонных фронтов оптического импульса [18–20].

Для повышения интенсивности генерируемого терагерцового сигнала в солитонном режиме желательна его концентрация в малой области пространства. Для этого можно использовать как нелиней-

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

ные свойства среды, вызывающие самофокусировку, так и линейную рефракцию, обусловленную неоднородностью среды. Речь может идти, например, о фокусирующем градиентном волноводе, в котором показатель преломления непрерывно уменьшается от центра к периферийным областям.

При фокусировке импульса испытывают искривления как фазовые, так и групповые фронты. В первом случае говорят о модуляционной неустойчивости [21–23], а во втором – об изгибной [23–26]. Условие синхронизма (1) приводит к предположению, что эти две неустойчивости должны быть тесно связаны друг с другом. В фокусирующем волноводе данная связь может проявляться наиболее рельефно из-за высокой плотности энергии генерируемого излучения. В связи с возрастающей актуальностью поиска эффективных способов генерации терагерцового излучения решение поставленной проблемы приобретает особую важность.

Аналитическому исследованию влияния изгибной и модуляционной неустойчивостей на солитонный режим генерации терагерцового излучения в нелинейном волноводе посвящена настоящая работа.

2. Исходная система и уравнения для солитонных параметров. Процесс генерации терагерцового излучения оптическим импульсом в градиентном нелинейном волноводе при использовании параксиального приближения описывается системой уравнений [27]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+\alpha E\psi-\omega g_\omega(\mathbf{r})\psi+\frac{c}{2n_{\omega0}\omega}\Delta_\perp\psi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z}=-\sigma\frac{\partial}{\partial\tau}(|\psi|^2)+g_T(\mathbf{r})\frac{\partial E}{\partial\tau}+\frac{c}{2n_{T0}}\Delta_\perp\int\limits_{-\infty}^{\tau}Ed\tau'. \quad (3)$$

Здесь ψ – комплексная огибающая электрического поля оптического импульса, E – электрическое поле терагерцового сигнала, $\tau=t-z/v_{g0}$, v_{g0} – линейная групповая скорость оптического импульса в центре поперечного сечения волновода, соответствующая его несущей частоте ω, z – ось волновода, совпадающая с направлением распространения обеих компонент импульса, t – время, $\beta=\partial v_{g0}^{-1}/\partial\omega$ – параметр дисперсии групповой скорости (ДГС) оптической компоненты, $\alpha=4\pi\omega\chi^{(2)}(\omega,0)/cn_{\omega0}$, $\sigma=4\pi\chi^{(2)}(\omega,-\omega)/cn_{T0}$, $\chi^{(2)}(\omega,0)$ и $\chi^{(2)}(\omega,-\omega)$ – нелинейные восприимчивости второго порядка, c – скорость света в вакууме, $n_{\omega0}$ и n_{T0} – оптический и терагерцовый показатели преломления соответственно в центре поперечного сечения волновода; вторые слагаемые в правых частях (3) и (4) описывают влияние волновода, при этом $g_\omega=(n_{\omega0}^2-n_\omega^2(\mathbf{r}))/2cn_{\omega0}$, $g_T=(n_{T0}^2-n_T^2(\mathbf{r}))/2cn_{T0}$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от оси волновода к точке наблюдения, $n_\omega(\mathbf{r})$ и $n_T(\mathbf{r})$ – соответственно оптический и терагерцовый показатели преломления в этой точке, $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан, учитывающий изгибную и модуляционную неустойчивости оптико-терагерцового импульса.

При выводе уравнений (2) и (3) предполагалось, что условие (1) выполняется в центре поперечного сечения волновода: $v_{g0}=c/n_{T0}$.

Волновое уравнение (2) для оптической компоненты редуцировано от второго порядка к первому относительно производной по переменной z благодаря использованию приближения медленно меняющейся огибающей (ММО) для функции $\psi(\tau,z,\mathbf{r})$. В то же время уравнение (3) для терагерцовой компоненты является уравнением первого порядка относительно производной по переменной z благодаря приближению однонаправленного распространения [14, 28, 29]. Поэтому терагерцовый сигнал может состоять из сколь угодно малого числа колебаний.

В одномерном случае ($\Delta_\perp=0$) и в отсутствие волновода ($g_\omega=g_T=0$) уравнения (2), (3) имеют вид системы Ядзимы–Ойкавы [30]. Данная система интегрируема методом обратной задачи рассеяния. Двухкомпонентное солитонное решение этой системы имеет вид [14]

$$\psi=\frac{|\beta|}{\tau_p}\sqrt{\frac{\Omega}{\alpha\sigma}}e^{i(qz-\Omega(t-z/v))}\mathrm{sech}\left(\frac{t-z/v}{\tau_p}\right), \quad (4)$$

$$E=-\frac{\beta}{\alpha\tau_p^2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{t-z/v}{\tau_p}\right), \quad (5)$$

где нелинейная групповая скорость v и параметр q определяются выражениями

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_{g0}}-\beta\Omega, \quad q=\frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{\tau_p^2}+\Omega^2\right), \quad (6)$$

а положительные постоянные Ω и τ_p являются свободными параметрами решения. При этом τ_p имеет смысл временной длительности солитона, а параметром Ω определяется сдвиг несущей частоты оптической компоненты в красную область: $\omega\to\omega-\Omega$. Данный сдвиг возникает благодаря параметрическому распаду оптических фотонов, в результате которого генерируются терагерцовые фотоны [19, 31]. При этом $\Omega\ll\omega$. Это же неравенство вытекает из приближения ММО. Из этого же приближения следует, что $1/\tau_p\ll\omega$.

Для исследования изгибной и модуляционной неустойчивостей воспользуемся методом усредненного лагранжиана (УЛ) [32].

Легко видеть, что системе (2), (3) соответствует плотность лагранжиана

$$L = L_\omega + \frac{\alpha}{2\sigma} L_T + L_{\text{int}}, \tag{7}$$

где

$$L_\omega = \frac{i}{2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right) - \frac{\beta}{2}\left|\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right|^2 + \\ + \omega g_\omega |\psi|^2 + \frac{c}{2n_{\omega 0}\omega}|\nabla_\perp \psi|^2, \tag{8}$$

$$L_T = -\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial Q}{\partial \tau} + g_T\left(\frac{\partial Q}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{c}{2n_{T0}}(\nabla_\perp Q)^2, \tag{9}$$

$$L_{\text{int}} = -\alpha \frac{\partial Q}{\partial \tau}|\psi|^2, \tag{10}$$

а динамическая переменная Q связана с электрическим полем E терагрецовой компоненты соотношением

$$E = \frac{\partial Q}{\partial \tau}. \tag{11}$$

Пробные решения для ψ и Q выберем, отталкиваясь от солитонного решения (4)–(6) при учете (11). Тогда, совершая замены $1/\tau_p \to \mu$, $\Omega \to \gamma$, $qz \to \omega\Phi_2$, $t - z/v = \tau + (1/v_{g0} - 1/v)z \to \tau + \Phi_1$, запишем

$$\psi = |\beta|\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\sigma}}\mu e^{i(\omega\Phi_2 - \gamma(\tau+\Phi_1))}\text{sech}[\mu(\tau+\Phi_1)], \tag{12}$$

$$Q = -\frac{\beta}{\alpha}\mu \tanh[\mu(\tau+\Phi_1)], \tag{13}$$

где μ, γ, Φ_2, Φ_1 – неизвестные функции координат; при этом $\mu/\omega \ll 1$ и $\gamma/\omega \ll 1$.

Переменные Φ_2 и Φ_1 имеют смысл солитонных фазового и группового эйконалов соответственно.

Так как в одномерном случае параметры μ и γ являются постоянными, а Φ_2 и Φ_1 пропорциональны z, то, следуя [32], будем считать μ и γ "медленными" функциями координат, а Φ_2 и Φ_1 – "быстрыми". По этой причине при подстановке (12) и (13) в (7)–(10) будем пренебрегать производными от μ и γ. Это соответствует приближению геометрической оптики для солитонов [32]. В работе [33] данное приближение названо квазиклассическим пределом.

Тогда после интегрирования лагранжиана по τ, пренебрегая слагаемыми μ/ω и γ/ω при одинаковых сомножителях, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L d\tau = \frac{\beta^2}{\alpha\sigma}\Lambda,$$

где Λ – усредненный лагранжиан, определяемый выражением

$$\Lambda = -2\omega\gamma\mu\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + 2\left(\gamma^2\mu - \frac{\mu^3}{3}\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \beta(\gamma\mu^3 - \gamma^3\mu) + \\ + 2\omega g_\omega \gamma\mu + \frac{2}{3}g_T\mu^3 + \frac{c}{3n_{T0}}\mu^3(\nabla_\perp\Phi_1)^2 + \\ + \frac{c}{n_{\omega 0}}\omega\gamma\mu(\nabla_\perp\Phi_2)^2 - 2\frac{c}{n_{\omega 0}}\gamma^2\mu(\nabla_\perp\Phi_1)(\nabla_\perp\Phi_2). \tag{14}$$

Теперь, используя (14), запишем уравнения Эйлера–Лагранжа для солитонных эйконалов, а также для переменных μ и γ:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial\Phi_j/\partial z)} - \nabla_\perp \frac{\partial \Lambda}{\partial(\nabla_\perp \Phi_j)} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} = 0.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mu^3 - 3\gamma^2\mu) + \nabla_\perp(\mu^3\nabla_\perp\varphi_1 - 3\gamma^2\mu\nabla_\perp\varphi_2) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\gamma\mu) + \nabla_\perp(\gamma\mu\nabla_\perp\varphi_2) = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\mu^2}{\gamma^2+\mu^2}\frac{(\nabla_\perp\varphi_1)^2}{2} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+\mu^2}(\nabla_\perp\varphi_1)(\nabla_\perp\varphi_2) + \\ + \frac{c\beta}{n_{T0}}\gamma + \frac{c}{n_{T0}}g_T\frac{\mu^2}{\gamma^2+\mu^2} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi_2)^2}{2} + \frac{c\beta}{2n_{\omega 0}\omega}(\gamma^2+\mu^2) + \frac{c}{n_{\omega 0}}g_\omega = 0, \tag{18}$$

где

$$\varphi_1 = -\frac{c}{n_{T0}}\Phi_1, \quad \varphi_2 = -\frac{c}{n_{\omega 0}}\Phi_2. \tag{19}$$

Система нелинейных уравнений (15)–(18) для солитонных динамических параметров, входящих в пробные решения (12), (13), достаточно сложна для анализа.

В одномерном случае ($\nabla_\perp = 0$) из (15) и (16) находим $\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$. Тогда, полагая $\mu = 1/\tau_p$, $\gamma = \Omega$, из (17) и (19) для однородной среды ($g_T = g_\omega = 0$) будем иметь $\varphi_1 = -c\beta\Omega z/n_{T0}$, $\varphi_2 = -c\beta(\Omega^2 + \tau_p^{-2})z/(2n_{\omega 0}\omega)$. Используя теперь (19), (12), (13) и (11), приходим к одномерному солитонному решению (4)–(6). Таким образом, в случае однородной одномерной среды система (15)–(18) имеет решения, в точности соответствующие временному солитону (4)–(6). Это обстоятельство является важным аргументом в пользу метода применяемого здесь метода УЛ.

3. Аналитические решения для стадии развитой генерации. В целях упрощения сделаем некоторые численные оценки. Из (11)–(13), а также из выражений для α и σ имеем следующее отношение интенсивностей терагерцовой $I_T = cE^2/(4\pi n_{T0})$ и оптической $I_\omega = c|\psi|^2/(2\pi n_{\omega 0})$ компонент:

$$\frac{I_T}{I_\omega} \sim 2\frac{\mu^2}{\omega\gamma}\left(\frac{n_{\omega 0}}{n_{T0}}\right)^2 \frac{\chi^{(2)}(\omega,-\omega)}{\chi^{(2)}(\omega,0)}.$$

Принимая во внимание, что

$$n_{\omega 0}/n_{T0} \sim \chi^{(2)}(\omega,-\omega)/\chi^{(2)}(\omega,0) \sim 1,$$

запишем

$$\frac{I_T}{I_\omega} \sim \frac{\mu}{\omega}\frac{\mu}{\gamma}.$$

Так как $\mu \sim 1/\tau_p$, $\gamma \sim \Omega$, то

$$\frac{I_T}{I_\omega} \sim \frac{1}{(\omega\tau_p)(\Omega\tau_p)}.$$

Сдвиг несущей частоты оптического импульса происходит в нелинейной среде по мере генерации терагерцового излучения и формирования оптико-терагерцового солитона. На входе же в среду данный сдвиг частоты отсутствует ($\Omega = \gamma = 0$). В то же время длительность импульса всегда имеет конечное значение ($\mu \sim 1/\tau_p \neq 0$). Поэтому ниже будем считать выполненным условие $\mu^2 \gg \gamma^2$. Пусть, например, $\omega \approx 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, $\tau_p \sim 10^{-13}\,\text{с}$, $\Omega \sim 10^{12}\,\text{с}^{-1}$. Тогда $I_T/I_\omega \sim 10^{-1}$, что соответствует развитой стадии солитонного режима генерации терагерцового излучения. В этом случае система (15)–(18) примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho_1\nabla_\perp\varphi_1) = 0,\\ &\frac{\partial\rho_2}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho_2\nabla_\perp\varphi_2) = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi_1)^2}{2} + \frac{c\beta}{n_{T0}\omega}\frac{\rho_2}{\rho_1^{1/3}} + \frac{c}{n_{T0}}g_T = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi_2)^2}{2} + \frac{c\beta}{2n_{\omega 0}\omega}\rho_1^{2/3} + \frac{c}{n_{\omega 0}}g_\omega = 0, \tag{22}$$

где $\rho_1 = \mu^3$, $\rho_2 = \omega\gamma\mu$.

Отсюда имеем

$$\mu = \rho_1^{1/3}, \quad \gamma = \frac{\rho_2}{\omega\rho_1^{1/3}}. \tag{23}$$

Система (20)–(22) формально похожа на уравнения, описывающие двумерную динамику воображаемой двухкомпонентной идеальной жидкости во внешнем поле. Роль внешнего поля здесь играет градиентный волновод, а роль времени – координата z.

Легко видеть, что при условии $g_T/n_{T0} = g_\omega/n_{\omega 0}$ система (20)–(22) является совместной, если положить

$$\rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \frac{n_{T0}}{2n_{\omega 0}}\rho, \quad \varphi_{1,2}(z,\mathbf{r}) = \varphi(z,\mathbf{r}). \tag{24}$$

Отсюда и из (23) имеем

$$\mu^2 = \frac{2n_{\omega 0}}{n_{T0}}\omega\gamma. \tag{25}$$

Полагая здесь $\omega \sim 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, $\gamma \sim 10^{11}\,\text{с}^{-1}$, будем иметь $\mu \sim 10^{13}\,\text{с}^{-1}$. Таким образом, условие $\mu^2 \gg \gamma^2$ выполняется с хорошим запасом.

Пусть поперечные профили оптической и терагерцовой линейных восприимчивостей χ_ω и χ_T градиентного волновода имеют параболический вид: $\chi_{\omega,T}(r) = \chi_{\omega 0,T0}(1 - r^2/a^2_{\omega,T})$. При этом $r \leq a \equiv \min\{a_\omega, a_T\}$, где параметр a имеет смысл поперечного радиуса волновода. В этом случае соответствующие показатели преломления обладают поперечными профилями вида

$$n_{T,\omega}(r) = \sqrt{n^2_{T0,\omega 0} - (n^2_{T0,\omega 0} - 1)\frac{r^2}{a^2_{T,\omega}}}.$$

Тогда вместо (20)–(22) имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{c\beta}{2n_{\omega 0}\omega}\rho^{2/3} + \frac{\kappa^2}{2}r^2 = 0, \tag{27}$$

где

$$\kappa^2 = \frac{n^2_{T0} - 1}{n^2_{T0}a^2_T} = \frac{n^2_{\omega 0} - 1}{n^2_{\omega 0}a^2_\omega}. \tag{28}$$

Уравнение (26) имеет точное аксиально-симметричное автомодельное решение [34–36]

$$\rho = \frac{1}{\tau_0^3}\frac{R_0^2}{R^2}F\left(\frac{r}{R}\right), \quad \varphi = f(z) + \frac{r^2}{2}\frac{R'}{R}, \tag{29}$$

где $R = R(z)$ – функция координаты z, имеющая смысл апертуры пространственно- временного солитона, второе слагаемое во втором выражении (29) описывает кривизну фазовых волновых фронтов оптической компоненты, R_0 – некоторая постоянная, соответствующая апертуре солитона при плоском фазовом волновом фронте оптической компоненты ($R'(z) = 0$), τ_0 – временная длительность солитона на его центральной оси ($r = 0$) при $R = R_0$, функции $f(z)$ и $F(r/R)$ определяются после подстановки (29) в (27). Совершая данную подстановку, приравняем в правой части выражения при r^0 и r^2 к нулю. Тогда, полагая для локализованного решения

$$F = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2} \tag{30}$$

при $r \le R$ и $F = 0$ при $r \ge R$, получим уравнения

$$f' = -\frac{R_0^2}{l_r^2}\frac{\operatorname{sgn}(\beta)}{q^{4/3}}, \tag{31}$$

$$q'' = -\frac{\partial U}{\partial q}. \tag{32}$$

Здесь

$$U = \frac{\kappa^2}{q}q^2 + \frac{3\operatorname{sgn}(\beta)}{2l_r^2 q^{4/3}}, \tag{33}$$

$q = R/R_0$, l_r – длина нелинейной рефракции оптической компоненты, определяемая выражением [37]

$$l_r = \sqrt{l_d l_D}, \tag{34}$$

l_d и l_D – дисперсионная и дифракционная длины соответственно:

$$l_d = \frac{2\tau_p^2}{|\beta|}, \quad l_D = \frac{n_{\omega 0}\omega}{c}R_0^2. \tag{35}$$

Уравнение (32) формально описывает динамику ньютоновской частицы единичной массы в поле с “потенциальной энергией” (33). Первое слагаемое в правой части (33) соответствует линейной рефракции градиентного волновода. Второе слагаемое в этом выражении описывает нелинейную рефракцию оптико-терагерцового солитона.

Решив уравнение (32), мы с помощью (31) сможем найти $f(z)$. Используя затем (30) и (29), получим выражения для ρ и φ. Из (24) и (23) определим параметры μ и γ. После подстановки данных параметров в (12), (13) и (11) найдем компоненты полей ψ и E оптико-терагерцового солитона для области $r \le R$. Вне этой области обе компоненты поля равны нулю.

Ниже рассмотрим две различные ситуации, соответствующие аномальной и нормальной ДГС оптической компоненты.

3.1. Самофокусировка при аномальной ДГС ($\beta < 0$). В этом случае “потенциальная энергия” $U(q)$ монотонно убывает до $-\infty$ при уменьшении динамического параметра q. Понятно, что по мере распространения импульса будем иметь $q \to 0$, что соответствует самофокусировке солитона. Исследуем поведение солитона вблизи фокуса, где $q = R/R_0 \ll 1$. При очень малых значениях q в (33) можно пренебречь первым слагаемым. Таким образом влияние волновода в этом случае несущественно. Тогда после интегрирования (32) получим

$$\frac{z_f - z}{l_r} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{R/R_0}\frac{q^{2/3}dq}{\sqrt{1-q^{4/3}}}, \tag{36}$$

где дистанция самофокусировки

$$z_f = \frac{l_r}{\sqrt{3}}\int\limits_0^1\frac{q^{2/3}dq}{\sqrt{1-q^{4/3}}} \approx 0.76 l_r. \tag{37}$$

Так как $R/R_0 \ll 1$, в подкоренном выражении (36) можно пренебречь $q^{4/3}$. Тогда имеем приближенно $\frac{z_f - z}{l_r} \approx \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{R/R_0} q^{2/3}dq = \frac{\sqrt{3}}{5}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{5/3}$. Отсюда с учетом (37) найдем

$$R = 1.60 R_0 (1 - z/z_f)^{3/5}. \tag{38}$$

Из (29), (30), (24) и (23) получим

$$\mu = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \tag{39}$$

где временная длительность на оси солитона

$$\tau_p = \tau_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^{2/3}. \tag{40}$$

Отсюда, а также из (39) и (25) будем иметь

$$\gamma = \Omega\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{41}$$

где “красный” сдвиг несущей частоты на оси солитона

$$\Omega = \Omega_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{4/3}, \tag{42}$$

$\Omega_0 = \frac{n_{T0}}{2n_{\omega 0}\omega\tau_0^2}$.

Подставляя (38) в (31) с учетом (37), после интегрирования и использования (29), (24) и (19) получим

$$\frac{c}{n_T}\Phi_1 = \frac{c}{n_\omega}\Phi_2 = 2.02\frac{R_0^2}{l_r}\left(1 - \frac{z}{z_f}\right)^{1/5} + \frac{3}{10}\frac{r^2}{z_f - z}. \tag{43}$$

Подстановка (38)–(43) в (11)–(13) приводит нас к искомому приближенному решению для оптико-терагерцового солитона вблизи точки самофокусировки.

Из (11)–(13), а также из (38)–(42) видно, что пики интенсивностей обеих компонент солитона имеют следующее пространственное распределение в поперечных сечениях: $I_\omega/I_{\omega 0} = I_T/I_{T0} = (1 - r^2/R^2)^2$. При этом интенсивности $I_{\omega 0}$ и I_{T0} на оси солитона вблизи точки самофокусировки испытывают сингулярность: $I_{\omega 0} \sim I_{T0} \sim (1 - z/z_f)^{-8/5}$.

Из (38), (40) и (42) видно, что самофокусировка солитона сопровождается уменьшением его длительности и сингулярным ростом "красного" сдвига несущей частоты: $\tau_p \sim (1 - z/z_f)^{2/5}$, $\Omega \sim (1 - z/z_f)^{-4/5}$. При этом, как видно из (43), кривизны групповых и фазовых фронтов резко возрастают, что сопровождается значительным уменьшением групповой и фазовой скоростей на оси волновода. Обратная длительность оптико-терагерцового солитона и красный сдвиг несущей частоты оптической компоненты уменьшаются от центров поперечных сечений к периферийным участкам по законам (39) и (41) соответственно. Эти выводы качественно совпадают с численными экспериментами, проведенными в [38].

Взяв в (35) для одноосного кристалла ниобата лития $\beta \sim 10^{-26}\,\text{с}^2/\text{см}$ [39], $\tau_p \sim 10^{-13}\,\text{с}$, $\omega \sim 10^{15}\,\text{с}^{-1}$, $R_0 \sim 10^{-1}$–10^{-2} мм, найдем $l_d \sim l_D \sim 1$ см. Отсюда, а также из (34) и (37) находим $l_r \sim z_f \sim 1$ см.

3.2. Самоканалирование при нормальной ДГС ($\beta > 0$). В этом случае "потенциальная энергия" $U(q)$ имеет локальный минимум. Это соответствует возможности формирования устойчивой оптико-терагерцовой "пули". Так как в точке локального минимума $R' = 0$, то волновые фронты являются плоскими (см. второе выражение (29)). Следовательно, в этой точке $R = R_0$ (или $q = 1$). Таким образом, приходим к условию $(\partial U/\partial q)_{q=1} = 0$. Отсюда, а также из (33)–(35) имеем для поперечного радиуса оптико-терагерцовой пули

$$R_0 = 0.56 a_\omega \sqrt{\frac{n_{\omega 0}}{n_{\omega 0}^2 - 1}\frac{\lambda}{l_d}}, \tag{44}$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны, соответствующая несущей частоте ω.

Полагая здесь $\lambda \sim 10^{-4}$ см, $l_d \sim 1$ см, будем иметь $R_0 \sim 10^{-2} a_\omega$. Пусть $a_\omega \sim 1$ мм. Тогда $R_0 \sim 10^{-2}$ мм $\sim$ $\sim 10\lambda$.

Таким образом, в случае нормальной ДГС в градиентном волноводе возможно формирование устойчивого пространственно-временного солитона, состоящего из оптической и терагерцовой компонент. Принимая во внимание общепринятую терминологию [40], назовем данное связанное состояние оптико-терагерцовой пулей.

Поперечные распределения обратной длительности солитона и красного сдвига несущей частоты оптической компоненты определяются, как и в случае аномальной ДГС, соотношениями (39) и (41) соответственно. Только теперь в них следует совершить замены $\tau_p \to \tau_0$ и $\Omega \to \Omega_0$ (см. (40) и (42) при $R = R_0$).

При приведенных выше параметрах найдем для интенсивности оптической солитонной компоненты на центральной оси волновода: $I_{\omega 0} \sim \left(\frac{c}{4\pi}\right)^3 \frac{\beta^2 \Omega_0}{\chi^{(2)2}\omega\tau_0^2} \sim$ $\sim 10^{10}\,\text{Вт/см}^2$. Для терагерцовой составляющей имеем $I_{T0} \sim 0.1 I_{\omega 0} \sim 10^9\,\text{Вт/см}^2$.

Заметим, что для теоретического описания оптико-терагерцовой пули в градиентном волноводе достаточно ограничиться приближением геометрической оптики, не вдаваясь в тонкости явлений дифракции.

Заключение. Проведенное в настоящей работе теоретической исследование показывает, что на динамику оптико-терагерцового солитона существенное влияние оказывают как изгибная, так и модуляционная неустойчивости. Обе неустойчивости развиваются в связанном нелинейном режиме, влияя друг на друга. Динамику фазовых волновых фронтов невозможно отделить от динамики групповых фронтов.

Градиентный волновод оказывает принципиальное влияние на динамику оптико-терагерцового солитона в области нормальной ДГС для оптической компоненты. Важно, что в этом случае волновод препятствует развитию изгибно-модуляционной неустойчивости, приводя к возможности формирования устойчивой оптико-терагерцовой пули. Если же несущая частота оптической компоненты лежит в области аномальной ДГС, то наличие волновода не имеет принципиального значения. В этом случае обе неустойчивости развиваются в режиме с обострением, приводя к самофокусировке солитона. Здесь, скорее, можно говорить о тенденции к самофокусировке, так как неизвестно, к чему может привести строгий учет дифракции за пределами приближения геометрической оптики. Пока на пути соответствующих аналитических расчетов встают трудности математического характера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 19-02-00234а).

---

1. P. Y. Han and X.-C. Zhang, Meas. Sci. Tech. **12**, 1747 (2001).
2. B. Fergusson and X.-C. Zhang, Natures Mater. **1**, 26 (2002).
3. А. Е. Щеголев, А. М. Попов, А. В. Богацкая, П. М. Никифорова, М. В. Терешонок, Н. В. Кленов, Письма в ЖЭТФ **111**, 443 (2020) [A. E. Schegolev, A. M. Popova, A. V. Bogatskaya, P. M. Nikiforova,

M. V. Tereshonok, and N. V. Klenov, JETP Lett. **111**, 371 (2020)].

4. Д. А. Шкитов, А. П. Потылицын, Г. А. Науменко, М. В. Шевелев, А. Арышев, Н. Терунума, Дж. Уракава, Письма в ЖЭТФ **111**, 443 (2019) [D. A. Shkitov, A. P. Potylitsyn, G. A. Naumenko, M. V. Shevelev, A. Aryshev, N. Terunuma, and J. Urakawa, JETP Lett. **109**, 771 (2019)].
5. В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, Письма в ЖЭТФ **112**, 81 (2020).
6. S. Stremoukhov and A. Andreev, JOSA B **34**, 233 (2017).
7. У. А. Абдуллин, Г. А. Ляхов, О. В. Руденко, А. С. Чиркин, ЖЭТФ **66**, 1295 (1974) [U. A. Abdullin, G. A. Lyakhov, O. V. Rudenko, and A. S. Chirkin, Sov. Phys. JETP **39**, 633 (1974)].
8. Д. А. Багдасарян, А. О. Макарян, П. С. Погосян, Письма в ЖЭТФ **37**, 498 (1983) [D. A. Bagdasaryan, A. O. Makaryan, and P. S. Pogosyan, JETP Lett. **37**, 594 (1983)].
9. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
10. G. Kh. Kitaeva, Laser Phys. Lett. **5**, 559 (2008).
11. А. Н. Тучак, Г. Н. Гольцман, Г. Х. Китаева, А. Н. Пенин, С. В. Селиверстов, М. И. Финкель, А. В. Шепелев, П. В. Якунин, Письма в ЖЭТФ **96**, 97 (2012) [A. N. Tuchak, G. N. Gol'tsman, G. Kh. Kitaeva, A. N. Penin, S. V. Seliverstov, M. I. Finkel, A. V. Shepelev, and P. V. Yakunin, JETP Lett. **96**, 94 (2012)].
12. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **96**, 281 (2012) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **96**, 263 (2012)].
13. А. Н. Бугай, ЭЧАЯ **50**, 185 (2019) [A. N. Bugay, Physics of Particles and Nuclei **50**, 210 (2019)].
14. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, Письма в ЖЭТФ **75**, 746 (2002) [S. V. Sazonov and A. F. Sobolevskii, JETP Lett. **75**, 621 (2002)].
15. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988) [R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, N.Y. (1982)].
16. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972) [V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972)].
17. D. J. Benney, Stud. Appl. Math. **56**, 81 (1977).
18. J. Hebling, G. Almasi, and I. Z. Cosma, Opt. Express **10**, 1161 (2002).
19. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **85**, 279 (2007) [A. G. Stepanov, A. A. Mel'nikov, V. O. Kompanets, and S. V. Chekalin, JETP Lett. **85**, 227 (2007)].
20. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, А. Ю. Шашков, Квант. электрон. **42**, 1027 (2012) [A. N. Bugay, S. V. Sazonov, and A. Yu. Shashkov, Quantum Electronics **42**, 1027 (2012)].
21. E. A. Kuznetsov, A. M. Rubenchik, and V. E. Zakharov, Phys. Rep. **142**, 103 (1986).
22. Y. S. Kivshar and D. E. Pelinovsky, Phys. Rep. **331**, 117 (2000).
23. B. A. Malomed, D. Mihalache, F. Wise, and L. Torner, J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **7**, R53 (2005).
24. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, ЖЭТФ **65**, 99 (1973) [V. E. Zakharov and A. M. Rubenchik, Sov. Phys. JETP **38**, 494 (1974)].
25. D. E. Pelinovsky, Math. Comput. Simul. **55**, 585 (2001).
26. G. Lombardi, W. Van Alphen, S. N. Klimin, and J. Tempere, Phys. Rev. A **96**, 033609 (2017).
27. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, Изв. РАН. Сер. Физическая **82**, 1610 (2018) [A. N. Bugay and S. V. Sazonov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **82**, 1468 (2018)].
28. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. **6**, L53 (1973).
29. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 1160 (2003) [S. V. Sazonov and A. F. Sobolevskii, JETP **96**, 1019 (2003)].
30. N. Yajima and M. Oikawa, Prog. Theor. Phys. **56**, 1719 (1976).
31. T. Hattori and K. Takeuchi, Opt. Express **15**, 8076 (2007).
32. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987) [S. K. Zhdanov and B. A. Trubnikov, Sov. Phys. JETP **65**, 904 (1987)].
33. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, С. Л. Мушер, Письма в ЖЭТФ **41**, 125 (1985) [V. E. Zakharov, E. A. Kuznetsov, and S. L. Musher, JETP Lett. **41**, 154 (1985)].
34. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, Sov. Phys. Usp. **10**, 609 (1968)].
35. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, М. (2001), 496 с. [N. V. Karlov and N. A. Kirichenko, *Oscillations, Waves, Structures*, Fizmatlit, Moscow (2001), 496 p. [in Russian]].
36. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **130**, 145 (2006) [S. V. Sazonov, JETP **103**, 126 (2006)].
37. S. V. Sazonov, Phys. Wave Phenom. **24**, 31 (2016).
38. A. N. Bugay, S. V. Sazonov, and P. Yu. Shestakov, Proc. SPIE **10684**, 106841M (2018).
39. А. Ярив, *Квантовая электроника*, Сов. радио, М. (1980), 488 с. [A. Yariv, *Quantum Electronics*, John Wiley & Sons, N.Y. (1989), 676 p.].
40. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005), 648 с. [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003), 540 p.].