Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 6, с. 357 – 360

О лоренц-инвариантных 2D уравнениях, допускающих долгоживущие локализованные решения с нетривиальной структурой

Р. К. Салимов[+1)], *Т. Р. Салимов*[*], *Е. Г. Екомасов*[+∘×]

[+]*Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

[∘]*Тюменский государственный университет, 625003 Тюмень, Россия*

[×]*Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск, Россия*

Поступила в редакцию 14 августа 2020 г.
После переработки 24 августа 2020 г.
Принята к публикации 29 августа 2020 г.

В данной работе представлены Лоренц-инвариантные 2D уравнения, имеющие в случае двух скалярных полей долгоживущие ($t \backsim 1000$) локализованные решения без потерь энергии на излучение. В случае 3 скалярных полей показано существование долгоживущих локализованных решений с нетривиальной внутренней структурой. Эта структура представляет собой два пространственно разделенных и связанных между собой максимума квадратов амплитуды этих полей. Подобные решения могут быть интересны как солитонные модели структуры адронов.

DOI: 10.31857/S1234567820180032

Солитонные решения нелинейных уравнений часто рассматриваются как протяженные модели частиц [1–9]. Например, модель Скирма [10–12], описывающая внутреннюю структуру барионов и легких ядер. Одним из недостатков солитонного подхода является достаточно малое количество математических моделей, имеющих 2D и 3D устойчивые локализованные решения. В некоторых случаях подобные решения невозможны. Например, существование стационарных локализованных решений лоренц-инвариантных полевых уравнений для пространственной размерности более 1 запрещено теоремой Деррикса [13]. Однако это не исключает таких локализованных, зависящих от времени осциллирующих решений. Ранее в [14] было рассмотрено уравнение (1), имеющее локализованные, не расплывающиеся сферически симметричные численные решения в 3D случае. Также уравнение (2) имеет локализованные, не расплывающиеся цилиндрически симметричные численные решения в 2D случае.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = u^{\frac{1}{2k+1}}, \tag{1}$$

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = u^{\frac{1}{2k+1}}. \tag{2}$$

Следующим естественным шагом исследования решений уравнений (1)–(2) было моделирование их локализованных решений при отсутствии цилиндрической и сферической симметрии. Численное моделирование в двумерном случае показывает, что без условия цилиндрической симметрии локализованные решения из одного поля u неустойчивы и достаточно быстро ($t \backsim 30$) распадаются. Распад локализованных решений (2) происходил при переходе амплитуды решения через нулевые значения. Поэтому для получения устойчивых локализованных решений были рассмотрены уравнения вида (3)–(4) для двух скалярных полей. Основным доводом в пользу возможного существования устойчивых локализованных решений в этом случае была возможность получения решения, при котором оба осциллирующих поля не равны одновременно нулю.

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = \alpha \frac{u}{(u^2+v^2)^{\frac{n}{2n+1}}} + \beta u + \gamma u(u^2+v^2), \tag{3}$$

$$v_{xx} + v_{yy} - v_{tt} = \alpha \frac{v}{(u^2+v^2)^{\frac{n}{2n+1}}} + \beta v + \gamma v(u^2+v^2). \tag{4}$$

Действительно, при ненулевых полях u, v слагаемое при коэффициенте α представляет собой потенциальный барьер вида

$$\alpha \frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{n}{2n+1}}}, \tag{5}$$

[1)] e-mail: salemsrkk@yandex.ru

который тем выше, чем меньше значение u^2+v^2. Слагаемые при при коэффициентах β и γ ограничивают решения большой амплитуды. Гамильтониан системы (3)–(4) имеет один минимум при $u = 0, v = 0$. Численное моделирование показывает, что для существования локализованных решений, также как в случае уравнений (1)–(2), нужна выпуклость вверх выражения $V((u^2+v^2)^{1/2})/((u^2+v^2)^{1/2})$ как функции от $((u^2+v^2)^{1/2})$ вблизи нуля, где V – потенциальная энергия.

При численном исследовании использовался модифицированный разностный метод Кристиансена Ломдала [13] 4 порядка точности. Ограничение по конечному времени счета проводилось из соображений контроля сохранения энергии. Численное моделирование производилось в квадрате 20×20.

Уравнения (3)–(4) интересны тем, что имеют долгоживущие не расплывающиеся численные решения. Локализованные решения в них сохраняются без заметных потерь энергии в течение всего времени численного моделирования, например, для времени $t = 1294$, $E = 13.51$, а при $t = 403$, $E = 13.79$. Интересной особенностью решений при некоторых параметрах является их нетривиальная структура. В частности, при параметрах $n = 8$; $\alpha = 1$; $\beta = 12$; $\gamma = 12$ и начальных условиях вида

$$u(x,y,0) = 0.85e^{(-2((x-10)^2+(y-10)^2/1.44))} \quad u_t(x,y,0) = 0, \tag{6}$$

$$v_t(x,y,0) = 4.24e^{(-2((x-10)^2+(y-10)^2/1.44))} \quad v(x,y,0) = 0 \tag{7}$$

область перехода к нулевым значениям установившегося решения представляет собой овал, периодически изменяющий свою ориентацию на плоскости Oxy (рис. 1, 2).

В промежуточных состояниях решение приближается к “круглому” состоянию. Максимум амплитуды квадрата величины u^2+v^2 при этом значительно не изменяется. Такое поведение решений говорит о существовании некоего поверхностного натяжения.

В случае других начальных условий, при достаточно малых начальных энергиях $E \leq 14$ сценарий развития решения соответствует сценарию, представленному на рис. 1 и 2. Таким образом, локализованное установившееся решение не излучает энергию. При больших значениях энергии, например, при $E = 21.05$, решение, изначально локализованное аналогично (6)–(7), распадается на несколько локализованных объектов (см. рис. 3). Такое поведение вызвано наличием слагаемых при коэффициентах β и γ. Решения с начальными условиями между этими значениями энергий в дальнейшем предполагается исследовать более подробно.

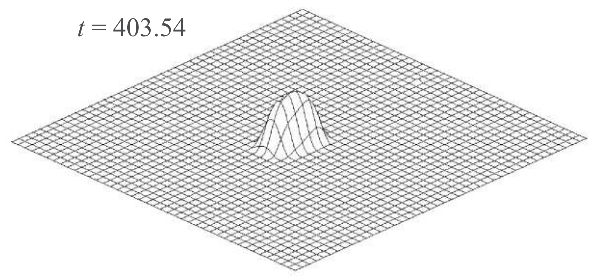

Рис. 1. Пространственное распределение величины $(u^2+v^2)^{1/2}$, $E = 13.79$

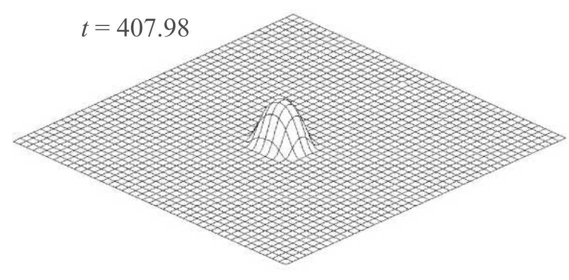

Рис. 2. Пространственное распределение величины $(u^2+v^2)^{1/2}$

Далее в уравнения были добавлены слагаемые вида uv^2, vu^2 для получения двух максимумов величины u^2+v^2. Ожидалось, что поверхностное натяжение будет компенсировать отталкивание полей. Но та-

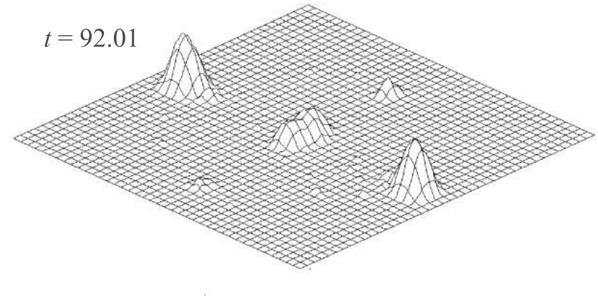

Рис. 3. Пространственное распределение величины $(u^2+v^2)^{1/2}$, $E = 21.05$

кие решения оказались не стабильными. Для стабилизации решений было добавлено 3 скалярное поле. Наличие нескольких полей, одновременно не равных нулю, приводит к более устойчивой локализации решений. Пример существования решений уравнений (3)–(4) это подтверждает.

Были численно исследованы решения уравнений (8)–(10) для трех скалярных полей:

$$u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}=\alpha\frac{u}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{n}{2n+1}}}+\beta u+ \\ +\gamma u(u^2+v^2+w^2)+\lambda uv^2+\xi w, \qquad (8)$$

$$v_{xx}+v_{yy}-v_{tt}=\alpha\frac{v}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{n}{2n+1}}}\beta v+ \\ +\gamma v(u^2+v^2+w^2)+\lambda vu^2-\xi w, \qquad (9)$$

$$w_{xx}+w_{yy}-w_{tt}=\alpha\frac{w}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{n}{2n+1}}}+\eta w+ \\ +\gamma u(u^2+v^2+w^2)+\xi(u-v)+\mu\frac{w}{(w^2)^{\frac{n}{2n+1}}}. \qquad (10)$$

Гамильтониан системы (8)–(10) имеет один минимум при $u=0, v=0, w=0$. Здесь для локализации решений, также как в случае уравнений (3)–(4), нужна выпуклость вверх выражения $V((u^2+v^2+w^2)^{1/2})/((u^2+v^2+w^2)^{1/2})$ как функции от $(u^2+v^2+w^2)^{1/2}$ вблизи нуля, где V – потенциальная энергия. Уравнения построены таким образом, что два скалярных поля u, v отталкиваются из-за слагаемых uv^2, vu^2. Слагаемые при коэффициентах ξ приводят к тому, что при не нулевых значениях полей $u-v$ обязательно появляются не нулевые значения поля w и при не нулевых значениях поля w обязательно появляются не нулевые значения полей u и v. Или другими словами, эти слагаемые обеспечивают некий "конфайенмент" для комбинации полей $u-v$, w и w, u, v. Слагаемое при коэффициенте μ должно обеспечивать локализацию поля w.

Численные решения уравнений (8)–(10) обладают более интересной внутренней структурой. При некоторых начальных условиях и параметрах ($n=8$; $\alpha=1$; $\beta=12$; $\gamma=18$; $\lambda=360$; $\xi=1.2$; $\eta=8\pi$; $\mu=1$),

$$u(x,y,0)=0.15e^{(-2((x-11)^2+(y-10)^2))} \\ u_t(x,y,0)=0, \qquad (11)$$

$$v(x,y,0)=-0.15e^{(-2((x-9)^2+(y-10)^2))} \\ v_t(x,y,0)=0, \qquad (12)$$

$$w_t(x,y,0)=2.83e^{(-2((x-10)^2+(y-10)^2/1.44))} \\ w(x,y,0)=0 \qquad (13)$$

решение представляет собой структуру из двух периодически появляющихся максимумов значения функции $(u^2+v^2+w^2)^{(1/2)}$, см. рис. 4. Максимальное

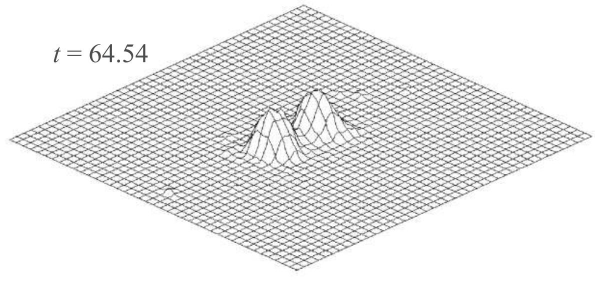

Рис. 4. Энергия системы $E=14.10$

по амплитуде решение сменяется решением минимальной амплитуды величины $(u^2+v^2+w^2)^{(1/2)}$, см. рис. 5.

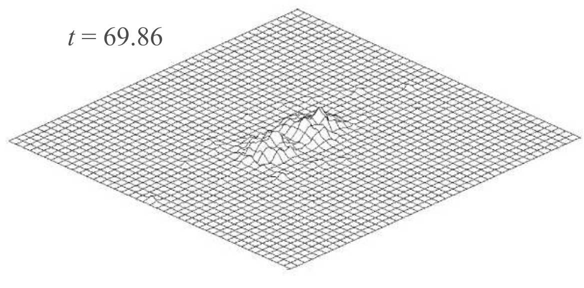

Рис. 5. Состояние малого значения амплитуды

Такое поведение решений сохраняется достаточно длительное время ($t \backsim 400$) без заметного искажения формы решения, см. рис. 6. Здесь нужно отметить,

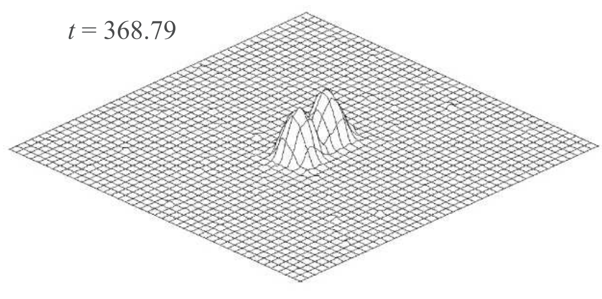

Рис. 6. Энергия системы $E=10.37$

что решение представляет собой связанное состояние из максимумов полей, в каждом из которых одно из полей u, v больше другого. Это состояние является связанным, в противном случае из-за отталкивания полей u, v и начальных условий эти максимумы бы удалились друг от друга. Решения уравнений (8)–(10) исследовались в диапазоне значений начальной энергии, при которой существенны коэффициенты отталкивания и решение представляет собой связанное состояние. Решения с другими начальными условиями предполагается исследовать более подробно в дальнейшем.

Как видно из численного решения уравнений (3)–(4), уравнения скалярных полей с дробной степенной нелинейностью интересны как уравнения, имеющие не расплывающиеся локализованные решения. Существование колебаний пространственной ориентации решений (3)–(4) позволяет говорить о некое м аналоге поверхностного натяжения для локализованных решений. При отталкивании для разных полей поверхностное натяжение может его компенсировать. Это дает возможность получить долгоживущие решения, имеющие несколько пространственных максимумов. Это подтверждают численные решения уравнений (8)–(10). Подобные решения могут быть интересны как солитонные модели структуры адронов. Кроме того, модель (8)–(10) интересна тем, что в гамильтониане данной модели есть слагаемые, обеспечивающие некий "конфайенмент" для комбинаций полей. Подобные модели, по мнению авторов, достойны изучения и имеют перспективы получения стабильных решений с 3-мя пространственно разделенными максимумами полей и обобщения на 3D случай.

1. D. J. Kaup and A. C. Newell, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences A **361**, 413 (1978).
2. A. M. Kosevich, Physica D **41**, 253 (1990).
3. E. Jenkins, A. V. Manohar, and M. B. Wise, Nucl. Phys. B 396(1), 27 (1993); doi:10.1016/0550-3213(93)90256-O.
4. Yu. P. Rybakov and B. Saha, Phys. Lett. A **122**, 5 (1996).
5. N. S. Manton, Nonlinearity **21**(11), T221 (2008).
6. A. Maccari, EJTP **3**(10), 39 (2006).
7. E. J. Weinberg, *Classical Solutions in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, N.Y. (2012).
8. M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge University Press, N.Y. (2011).
9. Y. Iwata, Front. Phys. **8**, 154 (2020).
10. C. Adam, C. Naya, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski, Phys. Rev. Lett. **111**(23), 232501 (2013).
11. C. Naya and P. Sutcliffe, Phys. Rev. Lett. **121**(23), 232002 (2018).
12. R. A. Battye, N. S. Manton, and P. M. Sutcliffe, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **463**(2077), 261 (2007).
13. Р. Додд, Д. Эйлбек, Д. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988).
14. Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов, Письма в ЖЭТФ **100**, 477 (2014).