Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 6, с. 361 – 366

Мнимое изображение в прозрачной диэлектрической сфере

А. Р. Бекиров[1)], *Б. С. Лукьянчук, А. А. Федянин*

Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 августа 2020 г.
После переработки 27 августа 2020 г.
Принята к публикации 28 августа 2020 г.

С позиций волновой теории рассмотрена задача формирования оптического изображения, создаваемого виртуально сходящейся электромагнитной волной от источника света. Решена задача дифракции точечного источника на диэлектрической сфере. Получены формулы, описывающие мнимое изображение точечного источника в диэлектрической сфере, в области параметров, где неприменимо приближение геометрической оптики. Для щелей в непрозрачном экране мнимое изображение в диэлектрической сфере позволяет разрешать щели, отстоящие друг от друга на расстояниях, значительно меньших дифракционного предела $\lambda/2$. Это объясняет ранее полученные экспериментальные результаты по эффекту супер разрешения в мнимом изображении (Nat. Commun. **2**, 1 (2011)).

DOI: 10.31857/S1234567820180044

В 1609 году Галилей изобрел зрительную трубу из двух линз, в котором вогнутая рассеивающая линза образовывала мнимое, увеличенное изображение объекта. В 1611 году Кеплер сформулировал правила построения оптического изображения в линзе на базе закона преломления света и его прямолинейного распространения. Применяя эти правила к прозрачной сфере, легко получить положение плоскости мнимого изображения $z_{vi} = nR/(2-n)$ и соответствующее увеличение $M = n/(2-n)$. В этих формулах n – показатель преломления, а R – радиус сферы. Об эффекте увеличения изображения такой сферой еще две тысячи лет назад сообщал Сенека [1]. Написанные выше формулы имеют ограниченную область применимости: они неприменимы при $n \to 2$, поскольку при этом $M \to \infty$, а также при размере частицы порядка нескольких длин волн света λ; формулы геометрической оптики работают, когда $R \gg \lambda$.

Современные технологии позволяют изготавливать сферические частицы с размерами от десятков нанометров до десятков микрометров, что широко используется в исследованиях по нанофотонике [2]. Уже первые эксперименты [3] показали, что увеличение мнимого изображения с помощью малых сферических микролинз с размером порядка нескольких микрометров позволяет преодолевать дифракционный предел и рассматривать в обычный микроскоп структуры с размером в десятки нанометров. Это явление изучалось в десятках работ, см. литературу, цитированную в [4], и получило хорошее экспериментальное подтверждение. Однако теоретическое описание этого явления требует описание мнимого изображения в рамках волновой теории. Нам не известны работы, посвященные исследованию данной проблемы.

В теории Ми [5, 6] рассматривается точное решение уравнений Максвелла для случая рассеяния сферической частицей плоской электромагнитной волны, приходящей из бесконечности. Эту теорию можно обобщить, рассматривая рассеяние сферической частицей расходящейся сферической волны от точечного источника, находящегося внутри сферы или на некотором расстоянии от нее [7, 8]. В этих работах принимается другая модель точечного источника, в которой не учитывается важный вклад продольных мод. Кроме того, в [7, 8] не рассматривается построение мнимого изображения, которое должно находиться как построение виртуальной сходящейся электромагнитной волны от рассеянного света.

Пусть $\mathbf{E}_s$ – поле некоторого источника, а Γ – поверхность апертуры оптического прибора. Введем поле $\mathbf{E}_i$, используя теорему Кирхгофа–Гельмгольца [5]

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Gamma} (G(\mathbf{n}, \nabla)\mathbf{E}_s^* - \mathbf{E}_s^*(\mathbf{n}, \nabla)G) k^2 dS, \qquad (1)$$

где $G = \exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|]/k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ – функция Грина волнового уравнения, оператор $\nabla = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ и $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, Γ – некоторая поверхность. Интеграл (1), как известно [5, 6], не зависит от формы поверхности, и (в случае бесконечной или замкнутой поверхности), также и от расстояния

1)e-mail: arlen.bekirov@mail.ru

от поверхности до источника. Пусть, например, источник представляет собой излучение, исходящее из щели непрозрачного экрана. Поле такого источника можно определить как

$$\mathbf{E}_s = \frac{(-2)}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\mathbf{E}^0(\mathbf{n}, \nabla)G) k^2 dS. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{E}^0$ – поле в плоскости отверстия. В случае граничных условий Кирхгофа [5], можно принять простейшую модель: $\mathbf{E}^0 = \text{const}$. Поле $\mathbf{E}_s$ представляет собой суперпозицию точечных источников вида $(\mathbf{n}, \nabla)G$. Пусть Γ является бесконечной плоскостью, представляя собой, по сути, апертуру оптического прибора, если поле $\mathbf{E}_s = G\mathbf{e}_x$, то в плоскости источника, параллельной плоскости Γ, поле изображения, $\mathbf{E}_i$, можно аналитически представить в виде

$$\mathbf{E}_i = -i\frac{\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\mathbf{e}_x. \quad (3)$$

Это поле изображения от точечного дельта источника определяется функцией $\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)$, имеющей полуширину $\lambda/2$. Отсюда следует критерий Рэлея: предел разрешения двух некогерентных точечных источников равен $\lambda/2$. Данный критерий относится к поперечному разрешению, продольное разрешение при этом существенно меньше $\lambda/2$. Если в качестве Γ выбрать замкнутую поверхность, окружающую источники, то дифракционный предел $\lambda/2$ сохраняется в любом направлении. В случае $\mathbf{E}_s = (\mathbf{n}, \nabla)G$ аналитическое решение типа (3) найти не удается, но уравнение (1) можно численно проинтегрировать. Численное интегрирование приводит к результатам, качественно сходным с (3), но первый нуль распределения $\mathbf{E}_i$ находится в точке $|x| = 1.22 \cdot \lambda/2$, см. рис. 1.

Теперь мы можем усложнить задачу, поставив между точечным источником и апертурой оптического прибора диэлектрическую сферу радиуса R. В этом случае по-прежнему можно использовать уравнение (1), в которое, однако, следует подставить выражение для поля $\mathbf{E}_s$, обусловленное дифракцией излучения на сфере. Не ограничивая общности рассмотрения, представим источник в виде:

$$\mathbf{E}^i = pkr_0\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{k\partial z_0}\mathbf{e}_x. \quad (4)$$

Для перехода к исходной нормировке достаточно положить $p = 1/kr_0$, для простоты рассматривается случай источника на оси z, т.е. $\mathbf{r}_0 = (0, 0, -r_0)$. Поля, относящиеся к пространству вне сферы, будем

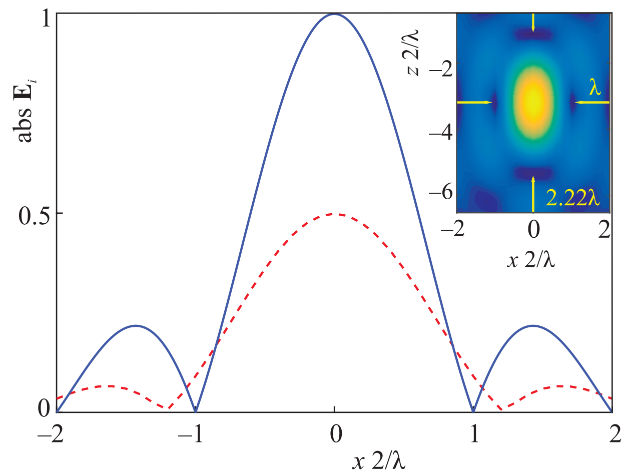

Рис. 1. (Цветной онлайн) Сравнение функции abs $\mathbf{E}_i$ из (3) (синяя линия) с численным расчетом для источника вида $(\mathbf{n}\nabla)G$ (красный пунктир). Точечный источник расположен на оси z в точке $z = -5\lambda/\pi$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Размытое мнимое изображение этого источника показано на вставке

обозначать индексом “1”, а поля внутри сферы – индексом “2”. Оба поля удовлетворяют волновым уравнениям с показателями преломления n_1 и n_2, и магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Для нахождения этих полей мы используем стандартное разложение по собственным функциям $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$, аналогично тому, как это делается в теории Ми [9]:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^i + \sum_{\ell=1}^{\infty}(a_\ell \mathbf{N}_\ell + b_\ell \mathbf{M}_\ell + f_\ell \mathbf{L}_\ell), \quad r > R, \quad (5)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \sum_{\ell=1}^{\infty}(d_\ell \mathbf{N}_\ell + c_\ell \mathbf{M}_\ell + t_\ell \mathbf{L}_\ell), \quad r < R. \quad (6)$$

Функции $\mathbf{M}_\ell$, $\mathbf{N}_\ell$ и $\mathbf{L}_\ell$ даются формулами [9]:

$$\mathbf{M}_\ell = z_\ell(\rho)[\pi_\ell(\theta)\cos\varphi\mathbf{e}_\theta - \tau_\ell(\theta)\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi], \quad (7)$$

$$\mathbf{N}_\ell = \ell(\ell+1)\frac{z_\ell(\rho)}{\rho}P_\ell^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi\mathbf{e}_r + $$
$$+ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho z_\ell(\rho)][\tau_\ell(\theta)\cos\varphi\mathbf{e}_\theta - \pi_\ell(\theta)\sin\varphi\mathbf{e}_\vartheta], \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_\ell = \frac{dz_\ell(\rho)}{d\rho}P_\ell^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi\mathbf{e}_r + $$
$$+ \frac{z_\ell(\rho)}{\rho}[\tau_\ell(\theta)\cos\varphi\mathbf{e}_\theta - \pi_\ell(\theta)\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi]. \quad (9)$$

Здесь $z_\ell(\rho) = j_\ell(k_2 r)$ при $r < R$, $z_\ell(\rho) = h_\ell(k_1 r)$ при $r > R$, $k_{1,2} = kn_{1,2}$, j_ℓ – сферическая функция Бесселя, h_ℓ – сферическая функция Ганкеля первого рода,

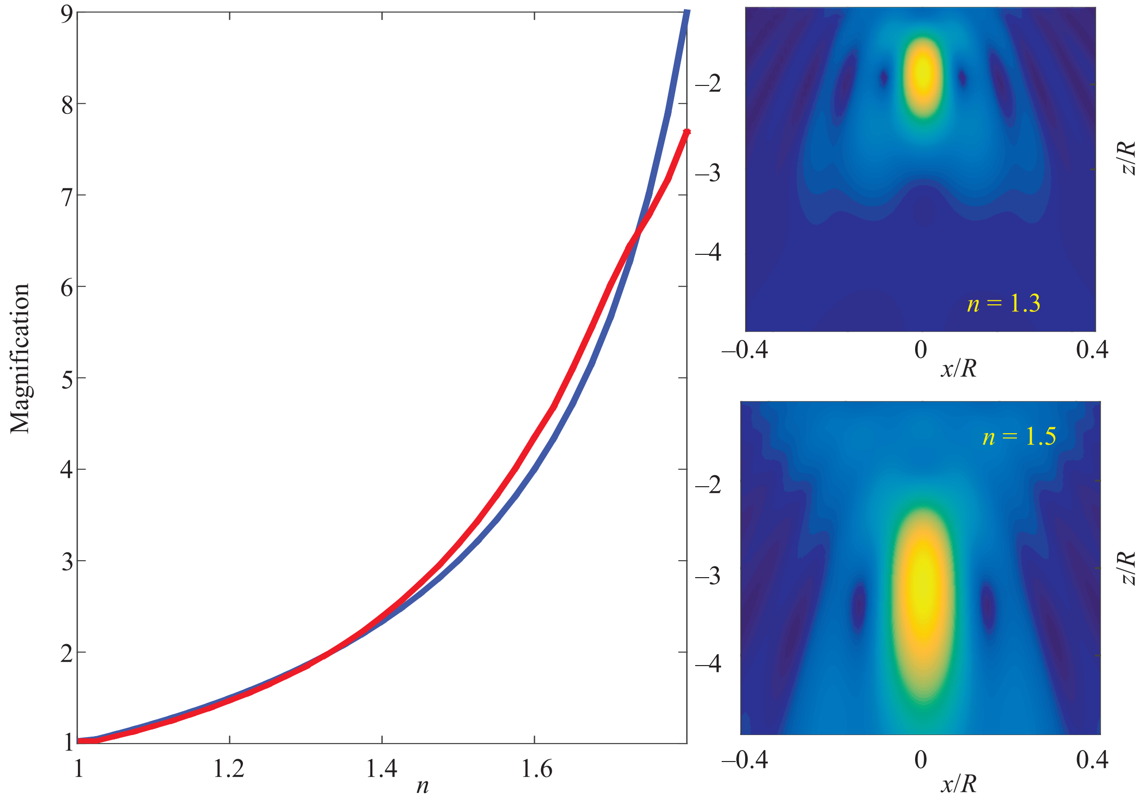

Рис. 2. (Цветной онлайн) Сравнение результатов геометрической (синяя линия) и волновой (красная линия) оптики для параметров $q = q_1 = p^{-1} = 100$. В интеграле (1) область Γ представляла квадрат со стороной $2R$ и центром по оси z, в точке $z = 1.05R$. По мере увеличения показателя преломления размеры области локализации мнимого изображения также возрастают. Размытые мнимые изображения точечного источника, видимые с помощью сфер с показателями преломления $n = 1.3$ и $n = 1.5$, показаны в правой части рисунка

$\pi_\ell = P_\ell^{(1)}(\cos\theta)/\sin\theta$, $\tau_\ell = dP_\ell^{(1)}(\cos\theta)/d\theta$. Величины магнитных полей определяются из (5) и (6) по уравнениям Максвелла. Коэффициенты рассеяния a, b, c, d, f и t находятся из шести граничных условий на поверхности сферы:

$$E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(2)}, \quad E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(2)}, \quad H_\theta^{(1)} = H_\theta^{(2)}, \quad H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(2)},$$

$$\frac{n_1^2}{\mu_1}E_r^{(1)} = \frac{n_2^2}{\mu_2}E_r^{(2)}, \quad Q_\varphi^{(1)} = Q_\varphi^{(2)}. \qquad (10)$$

Здесь первые четыре условия отвечают обычным условиям непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на поверхности сферы, пятое – описывает непрерывность нормального вектора индукции εE_r (вместо диэлектрической проницаемости ε нам удобнее использовать показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$). Наконец, шестое уравнение описывает непрерывность продольных мод поля (здесь $\mathbf{Q}$ – соленоидальная часть поля $\mathbf{E}$). Наличие продольных мод, пропорциональных $\mathbf{L}$ в разложениях (5) и (6), ведет к тому, что все шесть уравнений (10) линейно независимы. В этом состоит отличие от стандартной процедуры в теории Ми [5, 9], где продольные моды не играют никакой роли. Однако именно эти моды важны для построения мнимого изображения. Опуская громоздкие вычисления коэффициентов рассеяния из решения уравнений (10), приведем конечные формулы:

$$c_\ell = iq_1p(-1)^{\ell+1}\frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)}h'_\ell(q_1) \times$$

$$\times \frac{\mu\left(j_\ell(q)[qh_\ell(q)]' - h_\ell(q)[qj_\ell(q)]'\right)}{\mu j_\ell(nq)[qh_\ell(q)]' - h_\ell(q)[nqj_\ell(nq)]'} \qquad (11)$$

$$b_\ell = iq_1p(-1)^{\ell+1}\frac{2\ell+1}{\ell(\ell+1)}h'_\ell(q_1) \times$$

$$\times \frac{j_\ell(q)[nqj_\ell(nq)]' - \mu j_\ell(nq)[qj_\ell(q)]'}{\mu j_\ell(nq)[qh_\ell(q)]' - h_\ell(q)[nqj_\ell(nq)]'}, \qquad (12)$$

$$d_\ell = iq_1p(-1)^\ell\frac{2\ell+1}{\ell(l+1)}\left[\left[\frac{h_\ell(q_1)}{q_1}\right]'(\ell+1) - h'_{\ell+1}(q_1)\right]\times$$

$$\times \frac{\mu n\left(j_\ell(q)[qh_\ell(q)]' - h_\ell(q)[qj_\ell(q)]'\right)}{n^2 j_\ell(nq)[qh_\ell(q)]' - \mu h_\ell(q)[nqj_\ell(nq)]'}, \qquad (13)$$

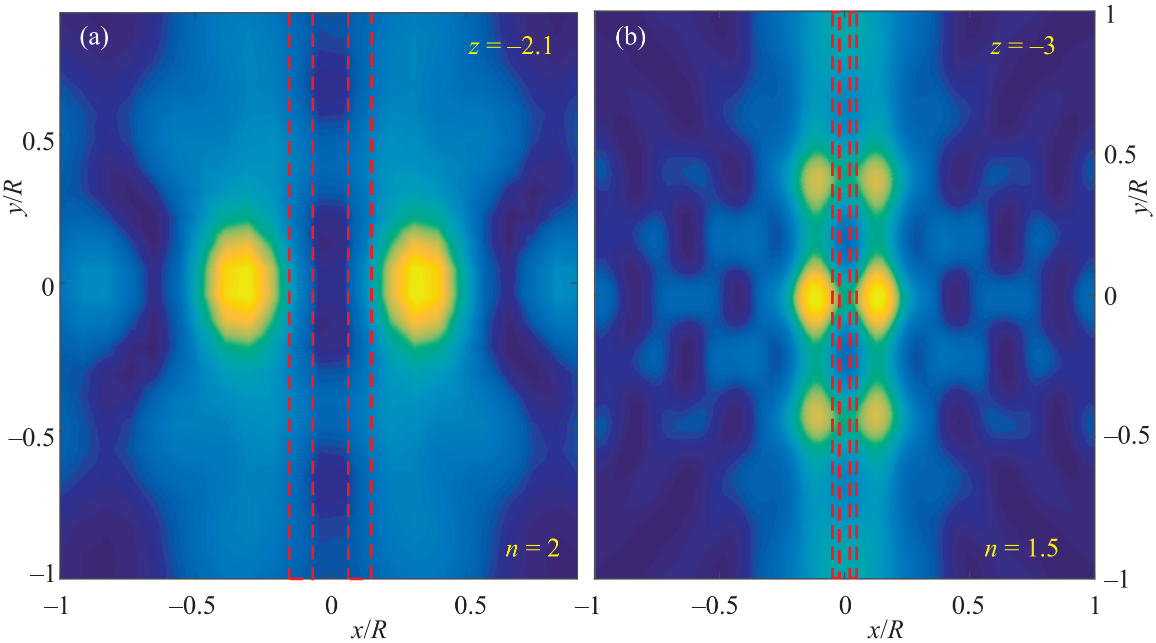

Рис. 3. (Цветной онлайн) Мнимое изображение двух щелей с шириной $\lambda/6$ и расстоянием между ними $\lambda/4$ (a) и $\lambda/6$ (b). Положение щелей показано пунктирными линиями. Значения параметров: (a) – $n = 2$, $q = 12$ и (b) – $n = 1.5$, $q = 38$. Мнимые изображения находятся на расстояниях: (a) $z = -2.1\,R$ и (b) – $z = -3\,R$. Поля щелей складываются некогерентным образом. Изучение в щелях (a) поляризовано вдоль оси x. В щелях (b) $\mathbf{E}^0(-1,\,0,\,0.5)$ для правой и $E^0(1,\,0,\,0.5)$ для левой щелей, соответственно. При построении учитывалась только x поляризация поля $\mathbf{E}_i$

$$a_\ell = iq_1 p(-1)^\ell \frac{2\ell+1}{\ell(l+1)}\left[\left[\frac{h_\ell(q_1)}{q_1}\right]'(\ell+1) - h'_{\ell+1}(q_1)\right]\times$$
$$\times\,\frac{\mu j_\ell(q)[nqj_\ell(nq)]' - n^2 j_\ell(nq)[qj_\ell(q)]'}{n^2 j_\ell(nq)[qh_\ell(q)]' - \mu h_\ell(q)[nqj_\ell(nq)]'}, \qquad (14)$$

$$t_\ell = iq_1 p(-1)^\ell (2l+1)\times$$
$$\times\left[\frac{h_\ell(q_1)}{q_1}\right]'\frac{\mu n(j_\ell(q)h'_\ell(q) - h_\ell(q)j'_\ell(q))}{\mu j_\ell(nq)h'_\ell(q) - n^3 h_\ell(q)j'_\ell(nq)}, \qquad (15)$$

$$f_\ell = iq_1 p(-1)^\ell (2l+1)\times$$
$$\times\left[\frac{h_\ell(q_1)}{q_1}\right]'\frac{n^3 j_\ell(q)j'_\ell(nq) - \mu j_\ell(nq)j'_\ell(q)}{\mu j_\ell(nq)h'_\ell(q) - n^3 h_\ell(q)j'_\ell(nq)}. \qquad (16)$$

Здесь $q = kR$, $q_1 = kr_0$, $n = n_2/n_1$, $\mu = \mu_2/\mu_1$, штрих означает дифференцирование по аргументу. В пределе, когда точечный источник удаляется на бесконечность, функции t и f стремятся к нулю, а коэффициенты a, b, c, d стремятся к своим выражениям в теории Ми, при этом следует положить $p = \exp(-iq_1)$. Множитель $-i$ в этих предельных формулах возникает из-за производной от дельта-функции выбранного точечного источника (4). Положение мнимого изображения определялось по формуле (1), как точка локального максимума поля $\mathbf{E}_i$. Зависимость коэффициента увеличения мнимого изображения M от величины относительного показателя преломления показана на рис. 2. На графике также показано увеличение в пределе геометрической оптики. Несмотря на то, что в приведенном примере выполнены формальные требования геометрической оптики: $q \gg 1$, $q_1 \gg 1$, различие между двумя зависимостями, как и ожидалось, возрастает по мере приближения показателя преломления к двойке.

Теперь перейдем к вопросу о преодолении дифракционного предела для мнимого изображения. Возможность такого явления в волновой теории прежде не исследовалась. Из экспериментов [3, 4, 10, 11] следует, что дифракционный предел преодолевается при определенных параметрах сферы. Поскольку в экспериментах наиболее часто встречаются данные по разрешению периодической системы темных и светлых полос (обычно это полоски нанодециметрового размера, записанные на *Blueray* диске), мы рассмотрим, для начала, разрешение поля от щели согласно формуле (2). Для построения решения мы используем вспомогательные решения ζ_i^j для полей вида $\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{k\partial x^j}\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{r}_0$ описывает произвольное положение источника в пространстве. Решение (2) в этом случае в силу линейности имеет вид:

$$X = \frac{(-2)}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma} E_i^0 n^j \zeta_i^j k^2 dS, \qquad (17)$$

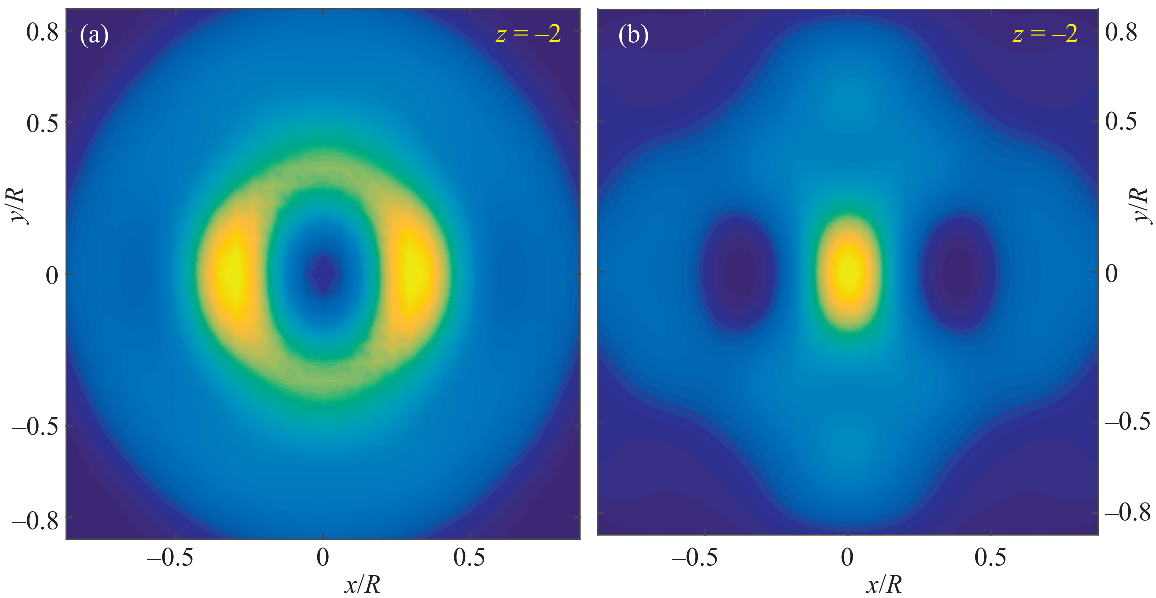

Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) – Мнимое изображение источника, расположенного на оси z ($z = -R$), в виде темной точки на светлом фоне. (b) – Мнимое изображение двух источников, расположенных симметрично по оси x на расстоянии λ друг от друга, $z = -R$. Параметры задачи: $q = 18$, $n = 2$, положение мнимого изображения в плоскости $z = -2R$

где X – один из компонентов рассеянного поля (в программе на MATLAB вначале вычисляются коэффициенты (11)–(16), а потом строятся сами поля).

Расчеты по приведенным выше формулам показывают, что дифракционный предел действительно преодолевается в определенной области параметров сферы. На рисунке 3 показаны два примера, когда в мнимом изображении разрешаются две соседние яркие полосы, расположенные на расстояниях $\lambda/4$ и $\lambda/6$ друг от друга. В приведенных примерах щели считаются некогерентными по отношению друг к другу, но источники внутри каждой из щелей когерентны. В приведенной теории не учитывается возможное изменение поля $\mathbf{E}^0$ внутри самой щели, а также самосогласованный расчет поля $\mathbf{E}^0$, обусловленный эффектом обратного рассеяния сферы. Эффекты такого рода играют важную роль в задаче "частица на подложке" [12, 13]. Однако даже в рассмотренном приближении волновая теория утвердительно отвечает на вопрос о возможности преодоления дифракционного предела в мнимом изображении.

Теоретический предел разрешения на базе приведенных формул возможен, но требует больших численных расчетов, связанных с нахождением максимума разрешения в пятимерном пространстве параметров: размера сферы, показателя преломления и $\{x_0, y_0, z_0\}$ координат, описывающих положение источника (в общем случае следует также учитывать поляризацию и форму щели). Экспериментально подтвержденное разрешение мнимого изображения в видимой области составляет $\lambda/8$ [3, 4]. Данная теория также объясняет экспериментально наблюдавшийся эффект, когда в некоторой области параметров светлые щели в мнимом изображении выглядят темными, а темные области между щелями – светлыми. По существу, это реинкарнация известного явления в теории дифракции – когда в центре изображения непрозрачного диска наблюдается светлое пятно, соответствующее половине действия первой открытой зоны Френеля [5]. Соответствующие картины мнимого изображения показаны на рис. 4.

Заключение. Предложенный метод формирования оптического изображения с помощью построения виртуальной сходящейся волны позволяет находить параметры мнимого изображения в области параметров, где неприменима геометрическая оптика. Метод позволяет определять параметры разрешения изображения за дифракционным пределом.

Эта работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (грант # 14.W03.31.0008). Эта работа также частично поддержана Российским научным фондом (проект # 20-12-00389) и Российским фондом фундаментальных исследований (проект # 20-02-00715).

1. B. S. Luk'yanchuk, R. Paniagua-Dominguez, I. Minin, O. Minin, and Z. B. Wang, Opt. Mater. Express **7**, 1820 (2017).

2. A. I. Kuznetsov, A. E. Miroshnichenko, M. L. Brongersma, Y. S. Kivshar, and B. Luk'yanchuk, Science **354**, aag2472 (2016).
3. Z. B. Wang, W. Guo, L. Li, B. Luk'yanchuk, A. Khan, Z. Liu, Z. Chen, and M. H. Hong, Nature Commun. **2**, 1 (2011).
4. *Label-Free Super-resolution Microscopy*, ed. by V. Astratov, Springer, Cham, Switzerland (2019), p. 371.
5. M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference, and diffraction of light*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands (2013).
6. S. Solimeno, B. Crosignani, and P. DiPorto, *Guiding, Diffraction, and Confinement of Optical Radiation*, Academic Press, N.Y. (1986).
7. H. Chew, P. J. McNulty, and M. Kerker, Phys. Rev. A **13**, 396 (1976).
8. H. Chew, M. Kerker, and D. D. Cooke, Phys. Rev. A **16**, 320 (1977).
9. C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley, Hoboken, New Jersey (1998).
10. L. A. Krivitsky, J. J. Wang, Z. B. Wang, and B. Luk'yanchuk, Sci. Rep. **3**, 3501 (2013).
11. K. W. Allen, N. Farahi, Y. Li, N. I. Limberopoulos, D. E. Walker Jr., A. M. Urbas, V. Liberman, and V. N. Astratov, Annalen der Physik **527**, 513 (2015).
12. B. S. Luk'yanchuk, Y. W. Zheng, and Y. F. Lu, Proc. SPIE **4065**, 576 (2000).
13. D. Bedeaux and J. Vlieger, *Optical properties of surfaces*, Imperial College Press, London (2004).