Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 8, с. 493 – 498 © 2020 г. 25 октября

Процессы $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ и $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ в киральной модели НИЛ с учетом взаимодействия пионов в конечном состоянии

М. К. Волков[1)], *А. Б. Арбузов, А. А. Пивоваров*

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 2 сентября 2020 г.
После переработки 2 сентября 2020 г.
Принята к публикации 13 сентября 2020 г.

Рассмотрены процессы $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ и $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ в киральной модели Намбу–Иона-Лазинио с учетом взаимодействия пионов в конечном состоянии с выходом за рамки $1/N_c$ приближения. Учтен вклад петлевой поправки за счет обмена пионов ρ-мезоном, которая дает основной вклад в P-волновом канале. В результате получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для обоих процессов.

DOI: 10.31857/S123456782020001X

1. Введение. Киральная модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [1–4], а также ее расширенный вариант [5–7], учитывающий первые радиально возбужденные состояния мезонов, позволили описать многие распады τ-лептонов и процессы рождения мезонов на встречных электрон-позитронных пучках при низких энергиях в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными [8–14]. Однако оказалось, что описание в рамках модели НИЛ таких важных процессов, как распад $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ и рождение пары пионов в электрон-позитронной аннигиляции при низких энергиях не удается согласовать с известными экспериментальными данными с достаточной точностью. Мы считаем, это является следствием большого влияния взаимодействия пионов в конечном состоянии в данных процессах. Описать основной вклад взаимодействия пионов в конечном состоянии в P-волне можно за счет обмена вылетающих пионов ρ-мезоном. Данные диаграммы соответствуют более высокому порядку по $1/N_c$, чем тот порядок $(1/\sqrt{N_c})$, в котором сформулирована модель НИЛ. Целью данной работы является исследование возможности рассмотреть такие вклады дополнительно к результатам, получаемым в стандартной модели НИЛ.

Процесс $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ является наиболее вероятной модой распада τ-лептона, и его парциальная ширина измерена с высокой точностью: $\mathrm{Br}(\tau \to \pi\pi\nu_\tau) = (25.49\pm0.09)\%$ [15]. В теоретических работах согласие с экспериментом достигается обычно за счет использования феноменологической параметризации формфактора пиона, которая фитируется по экспериментальным данным [16–19] без анализа соответствующей физической картины. Подобная ситуация имеет место и для процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$, адронный ток которого связан с тем, что присутствует в распаде τ-лептона, преобразованием изоспина в рамках гипотезы сохранения векторного тока. Поэтому принципиально важно иметь согласованное теоретическое описание обоих процессов. Также в литературе обсуждается проблема согласования низкоэнергетических процессов электрон-позитронной аннигиляции в адроны и соответствующих мод распада τ-лептонов, см. работу [20] и ссылки в ней. С другой стороны, точность экспериментальных результатов по изучению данных процессов постоянно повышается [21–23]. Важность детального понимания этих процессов обусловлена и тем, что они дают существенный вклад в определение адронной поляризации вакуума [24]. Отметим, что в процессе электрон-позитронной аннигиляции в пионы также важно адекватно описать смешивание ρ- и ω-мезонов, которое чувствительно к разнице токовых масс u- и d-кварков.

Взаимодействие пионов в конечном состоянии исследовалось теоретически в целом ряде подходов. Наиболее общим является метод дисперсионных соотношений, в рамках которого успешно описаны взаимодействия в конечном состоянии легких пар мезонов $\pi\pi$, πK и KK с учетом фазовых сдвигов [25]. Учет таких взаимодействий особенно важен для описания $\pi\pi$- и KK-рассеяния при малых энергиях. Рассматриваемый нами диапазон энергий также находится в области применимости киральной пертурба-

[1)]e-mail: volkov@theor.jinr.ru

тивной теории (ChPT – *Chiral Perturbation Theory*) [26, 27]. В частности, в рамках унитаризованной ChPT взаимодействия в конечном состоянии рассматривались с помощью метода инверсии амплитуд [28, 29]. Непосредственное использование названных методов в сочетании с моделью НИЛ невозможно в силу несогласованности соответствующих подходов. С другой стороны, учет мезонных петлевых поправок в рамках модели НИЛ уже применялся при описании ряда процессов [30, 31], где однако рассмотренные мезонные петли не выходили за рамки ведущего по $1/N_c$ приближения модели.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится используемый нами лагранжиан стандартной модели НИЛ. В следующих двух разделах 3 и 4 рассматриваются процессы электрон-позитронной аннигиляции в два пиона и распад τ-лептона, соответственно. Раздел 5 посвящен обсуждению результатов.

2. Лагранжиан стандартной модели НИЛ. Фрагмент кварк-мезонного лагранжиана взаимодействия модели НИЛ, содержащего нужные нам вершины, имеет вид [3]:

$$\Delta\mathcal{L}_{int} = \bar{q}\left[\frac{g_\rho}{2}\gamma^\mu\left(\tau_3\rho^0_\mu + \tau_0\omega_\mu\right) + ig_\pi\gamma^5\tau_3\pi^0 + \right.$$
$$\left. + \frac{g_\rho}{2}\gamma^\mu\sum_{j=\pm}\tau_j\rho^j_\mu + ig_\pi\gamma^5\sum_{j=\pm}\tau_j\pi^j\right]q, \quad (1)$$

где q и $\bar{q}$ – $SU(2)$ дублеты u- и d-кварковых полей с составляющими массами $m_u \approx m_d = m = 280$ МэВ; τ_3 – матрица Паули; $\tau_\pm$ – линейные комбинации матриц Паули; τ_0 – единичная матрица. Константы взаимодействия:

$$g_\rho = \left(\frac{2}{3}I_2\right)^{-1/2}, \quad g_\pi = \left(\frac{4}{Z_\pi}I_2\right)^{-1/2}, \quad (2)$$

где

$$Z_\pi = \left[1 - 6\frac{m^2}{M^2_{a_1}}\right]^{-1} \quad (3)$$

константа дополнительной перенормировки, возникающая при учете $\pi - a_1$ переходов, $M_{a_1} = 1230 \pm$ $\pm\, 40$ МэВ [15] – масса аксиально векторного мезона. Интегралы, возникающие в результате перенормировки лагранжиана:

$$I_2 = -i\frac{N_c}{(2\pi)^4}\int\frac{\Theta(\Lambda^2 + k^2)}{(m^2 - k^2)^2}\mathrm{d}^4k =$$
$$= \frac{N_c}{(4\pi)^2}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) - \left(1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^{-1}\right], \quad (4)$$

где $\Lambda = 1250$ МэВ – параметр обрезания по импульсу кварков в петле, $N_c = 3$ – число цветов.

3. Процесс $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. Диаграммы процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ без учета взаимодействия в конечном состоянии приведены на рис. 1–3.

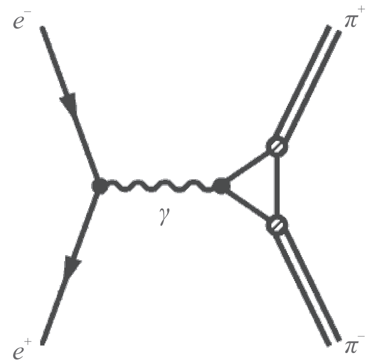

Рис. 1. Контактная диаграмма процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$

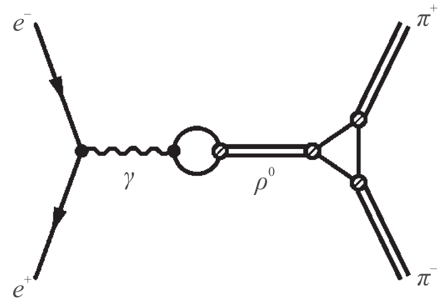

Рис. 2. Диаграмма процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ с промежуточным ρ-мезоном

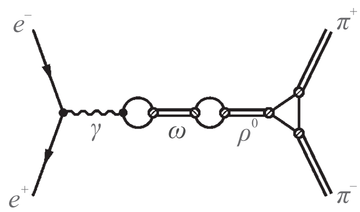

Рис. 3. Диаграмма процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ с промежуточным ω-мезоном

В данном процессе играет роль только P-волна, а контактное взаимодействие четырех пионов через кварковый четырехугольник, а также взаимодействие пионов через скалярный мезон, относящиеся к S-волне, здесь вклада не дают. Взаимодействие пионов путем аннигиляции в ρ-мезон учтено в ширине распада в знаменателе пропагатора Брейта–Вигнера промежуточного ρ-мезона. Поэтому для учета взаимодействия пионов в конечном состоянии в данном процессе достаточно учесть обмен ρ-мезоном. В результате возникает мезонный треугольник, см. рис. 4.

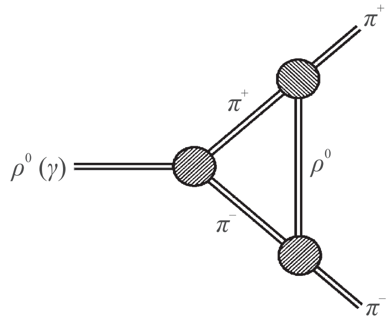

Рис. 4. Взаимодействие пионов во конечном состоянии в случае электрон-позитронной аннигиляции

Каждая вершина этого треугольника выражается через амплитуду распада $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$, которую можно получить с помощью лагранжиана (1):

$$M(\rho^0 \to \pi^+\pi^-) = g_\rho e_\mu(q)\,(p_+ - p_-)^\mu\,, \tag{5}$$

где q – импульс распадающегося ρ-мезона, p_+, p_- – импульсы пионов, $e_\mu(q)$ – поляризационный вектор распадающегося ρ-мезона.

Из данной амплитуды можно получить вершину мезонного лагранжиана, описывающую взаимодействие ρ-мезона с пионами:

$$\mathcal{L} = -ig_\rho\rho^0_\mu\left(\pi^+\partial^\mu\pi^- - \pi^-\partial^\mu\pi^+\right). \tag{6}$$

С помощью этих вершин можно описать треугольную мезонную петлю, приводящую к интегралу:

$$g_\rho^3\int\frac{(k-2p_-)^\lambda(k+2p_+)^\nu(2k+p_+-p_-)^\mu\left(g_{\nu\lambda}-\frac{k_\nu k_\lambda}{M_\rho^2}\right)}{\left[k^2-M_\rho^2\right]\left[(k-p_-)^2-M_\pi^2\right]\left[(k+p_+)^2-M_\pi^2\right]}\times \times\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{7}$$

Если разложить этот интеграл по внешним импульсам и удержать только расходящиеся члены (по аналогии с методом, используемым в модели НИЛ), то получится выражение

$$ig_\rho^3\left[\frac{I_{1M}}{M_\rho^2} + \left(1 + \frac{4M_\pi^2 - q^2}{2M_\rho^2}\right)I_{2M}\right](p_+ - p_-)^\mu\,, \tag{8}$$

где $q = p_+ + p_-$; I_{1M} и I_{2M} — квадратично и логарифмически расходящиеся интегралы, соответственно:

$$\begin{aligned} I_{2M} &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{\Theta(\Lambda_M^2+k^2)}{(M_\rho^2-k^2)(M_\pi^2-k^2)}\mathrm{d}^4k = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{M_\rho^2-M_\pi^2}\times \\ &\times\left[M_\rho^2\ln\left(\frac{\Lambda_M^2}{M_\rho^2}+1\right) - M_\pi^2\ln\left(\frac{\Lambda_M^2}{M_\pi^2}+1\right)\right], \\ I_{1M} &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{\Theta(\Lambda_M^2+k^2)}{(M_\rho^2-k^2)}\mathrm{d}^4k = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\Lambda_M^2 - M_\rho^2\ln\left(\frac{\Lambda_M^2}{M_\rho^2}+1\right)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

где Λ_M – параметр обрезания по импульсу мезонной петли.

Тогда амплитуда рассматриваемого процесса электрон-позитронной аннигиляции принимает вид:

$$\begin{aligned} M(e^+e^- \to \pi\pi) &= -\frac{4\pi\alpha_{em}}{s}\left[1 + \frac{s}{M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho} + \right. \\ &\left. + \frac{s^2}{9}\frac{g_\rho^2\left[I_2(u) - I_2(d)\right]}{\left[M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho\right]\left[M_\omega^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\omega\right]}\right]\times \\ &\times\left\{1 + g_\rho^2\left[\frac{I_{1M}}{M_\rho^2} + \left(1 + \frac{4M_\pi^2 - s}{2M_\rho^2}\right)I_{2M}\right]\right\}\times \\ &\times L_\mu^{em}(p_+ - p_-)^\mu, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\alpha_{em} \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры, $s = (p_+ + p_-)^2$, $L_\mu^{em} = \bar{e}^-\gamma_\mu e^-$ – электромагнитный лептонный ток.

Третье слагаемое в первых квадратных скобках соответствует вкладу от промежуточного ω-мезона, переходящего в ρ-мезон через кварковую петлю. Здесь в амплитуде возникает разность $I_2(u) - I_2(d)$, где $I_2(u)$ и $I_2(d)$ – интегралы вида (4) с u- и d-кварковыми массами, соответственно. В данном случае разницей масс этих кварков пренебрегать нельзя, и при вычислениях использовалось значение $m_d - m_u = 4$ МэВ, полученное в рамках модели НИЛ при описании распада $\omega \to \pi\pi$ и разницы масс заряженных и нейтральных пионов [3].

По экспериментально известной зависимости сечения данного процесса от энергии сталкивающихся лептонов можно зафиксировать параметр обрезания по импульсу мезонной петли $\Lambda_M = 860$ МэВ. Зависимость, полученная при данном значении параметра обрезания, показана на рис. 5 в сравнении с экспериментальными данными [21]. Видно, что учет взаимодействий в конечном состоянии оказался количественно очень важным именно вблизи пика, соответствующего резонансу ρ-мезона.

4. Процесс $\boldsymbol{\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau}$. Диаграммы Фейнмана процесса $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ без учета взаимодействия в конечном состоянии приведены на рис. 6, 7.

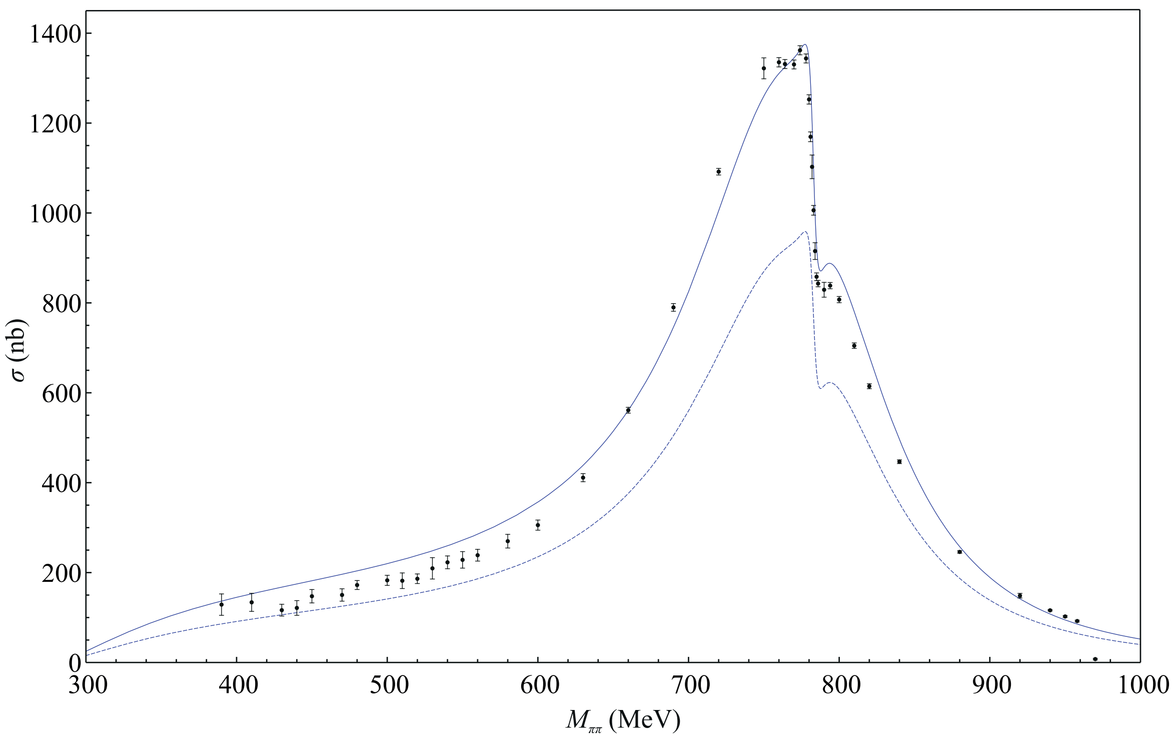

Рис. 5. (Цветной онлайн) Сечение процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ в зависимости от энергии в системе центра масс. Экспериментальные точки взяты из работы [21]. Пунктирная кривая получена без вклада взаимодействий в конечном состоянии, а сплошная с его учетом

Мезонный треугольник, необходимый для учета взаимодействия пионов в конечном состоянии, приведен на рис. 8.

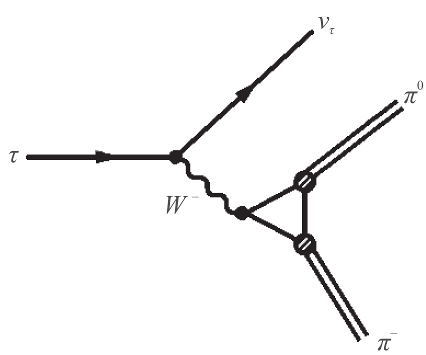

Рис. 6. Контактная диаграмма процесса $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$

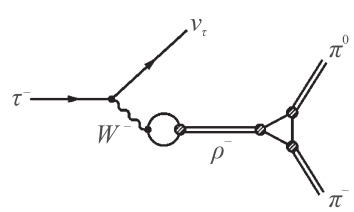

Рис. 7. Диаграмма процесса $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ с промежуточным ρ-мезоном

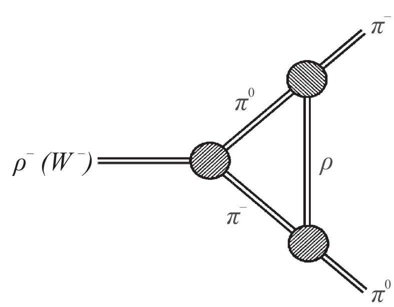

Рис. 8. Взаимодействие пионов во конечном состоянии в случае распада τ-лептона

Этот треугольник приводит к интегралу того же вида, что и в случае процесса e^+e^--аннигиляции, рассмотренного выше. Амплитуда рассматриваемого процесса распада τ-лептона принимает вид:

$$M(\tau \to \pi\pi\nu) = -G_F V_{ud}\left[1 + \frac{s}{M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho}\right] \times \\ \times \left\{1 + g_\rho^2\left[\frac{I_{1M}}{M_\rho^2} + \left(1 + \frac{4M_\pi^2 - s}{2M_\rho^2}\right) I_{2M}\right]\right\} \times \\ \times L_\mu^{\mathrm{weak}} \left(p_- - p_0\right)^\mu , \quad (11)$$

где G_F– константа Ферми, V_{ud} – элемент матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы, $L_\mu^{\mathrm{weak}} = \bar{\nu}_\tau \gamma_\mu \left(1 - \gamma^5\right) \tau^-$ – слабый лептонный ток. Первое слагаемое в первых квадратных скобках соответствует контактному вкладу, т.е. вкладу диаграмм без перехода W-бозона в промежуточные мезоны. Второе слагаемое — вкладу с промежуточным ρ-мезоном. Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует диаграмме без взаимодействия пионов в конечном состоянии.

В итоге для определенного в предыдущем разделе параметра обрезания мезонной петли находим парциальную ширину данного распада:

$$\mathrm{Br}(\tau \to \pi\pi\nu) = (25.0 \pm 1.2)\,\%, \tag{12}$$

где теоретическая неопределенность $\sim 5\,\%$ оценена по результатам сравнения предсказаний киральной $U(2)\times U(2)$ модели НИЛ с экспериментальными данными по взаимодействию мезонов, состоящих только из легких кварков [3]. Теоретическая неопределенность связана с эффектами, нарушающими киральную симметрию, и ограниченностью ведущего по $1/N_c$ приближения модели. Экспериментальное значение ширины этого распада [15]

$$\mathrm{Br}(\tau \to \pi\pi\nu)_{\mathrm{exp}} = (25.49 \pm 0.09)\,\%. \tag{13}$$

Без учета взаимодействия в конечном состоянии стандартная модель НИЛ предсказывала для этого распада парциальную ширину приблизительно 17 %. Видно, что как и в случае электрон-позитронной аннигиляции в два пиона, учет обмена пионов ρ-мезоном позволил получить удовлетворительное согласие с экспериментальными данными и для рассматриваемого распада.

5. Заключение. Таким образом, мы показали, что в рассмотренных процессах учет взаимодействия в конечном состоянии играет очень важную роль. Последнее обусловлено тем, что в данных процессах пионы рождаются в P-волне, что дает им возможность обменяться ρ-мезоном, константы взаимодействия с которым велики. Также большой вклад взаимодействия в конечном состоянии обусловлен относительной малостью энергии и близостью к порогу рождения пионов. Удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для обоих случаев подтверждает применимость гипотезы сохранения векторного тока.

Адекватное описание взаимодействий мезонов в конечном состоянии невозможно в рамках стандартной модели НИЛ, так как она сформулирована в низшем порядке по $1/N_c$. Тогда как учет взаимодействия пионов в конечном состоянии требует выхода за рамки этого приближения, что и было сделано в настоящей работе. По известным экспериментальным данным для процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ было получено значение параметра обрезания мезонной петли, описывающей взаимодействие пионов в конечном состоянии. В результате удалось описать распад $\tau^- \to \pi^-\pi^0\nu_\tau$ в удовлетворительном согласии с экспериментом.

В данной работе мы ограничились рассмотрением области относительно малых инвариантных масс пары пионов вблизи пика ρ-мезона, в которой вклад взаимодействий в конечном состоянии оказался существенным. Понятно, что в процессе электрон-позитронной аннигиляции в два пиона при энергиях выше 1 ГэВ будет необходимо учесть и вклады возбужденных состояний мезонов, в первую очередь, $\rho(1450)$-мезона, что можно сделать в рамках расширенной модели НИЛ [5–7]. Однако в рассмотренной здесь области энергий мы эффективно включаем эти вклады в обсуждавшуюся выше оценку теоретической неопределенности стандартной модели НИЛ.

1. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
2. D. Ebert and M. K. Volkov, Z. Phys. C **16**, 205 (1983).
3. M. K. Volkov, Sov. J. Part. Nucl. **17**, 186 (1986).
4. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B **271**, 188 (1986).
5. M. K. Volkov and C. Weiss, Phys. Rev. D **56**, 221 (1997).
6. M. K. Volkov, Phys. Atom. Nucl. **60**, 1920 (1997).
7. M. K. Volkov, D. Ebert, and M. Nagy, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 5443 (1998).
8. M. K. Volkov and A. B. Arbuzov, Phys. Part. Nucl. **47**, 489 (2016).
9. M. K. Volkov and A. B. Arbuzov, Phys.-Uspekhi **60**, 643 (2017).
10. M. K. Volkov and A. A. Pivovarov, JETP Lett. **108**, 347 (2018).
11. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Eur. Phys. J. A **55**, 165 (2019).
12. M. K. Volkov and A. A. Pivovarov, JETP Lett. **110**, 237 (2019).
13. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Nucl. Phys. A **1000**, 121810 (2020).
14. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Int. J. Mod. Phys. A **35**, 2050035 (2020).
15. M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018).
16. J. H. Kuhn and A. Santamaria, Z. Phys. C **48**, 445 (1990).
17. E. Bartos, S. Dubnicka, A. Z. Dubnickova, and H. Hayashii, Int. J. Mod. Phys. A **32**, 1750154 (2017).
18. J. A. Miranda and P. Roig, JHEP **11**, 038 (2018).

19. L. R. Dai, R. Pavao, S. Sakai, and E. Oset, Eur. Phys. J. A **55**, 20 (2019).
20. M. Benayoun, EPJ Web Conf. **118**, 01001 (2016).
21. M. N. Achasov, K. I. Beloborodov, A. V. Berdyugin et al. (Collaboration), JETP **101**(6), 1053 (2005).
22. S. Schael, R. Barate, R. Bruneliere et al. (ALEPH), Phys. Rep. **421**, 191 (2005).
23. M. Fujikawa, H. Hayashii, S. Eidelman et al. (Belle), Phys. Rev. D **78**, 072006 (2008).
24. S. Actis, A. Arbuzov, G. Balossini et al. (Working Group on Radiative Corrections and Monte Carlo Generators for Low Energies), Eur. Phys. J. C **66**, 585 (2010).
25. M. Dax, T. Isken, and B. Kubis, Eur. Phys. J. C **78**, 859 (2018).
26. S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
27. J. Gasser and H. Leutwyler, Annals Phys. **158**, 142 (1984).
28. T. N. Truong, Phys. Rev. Lett. **67**, 2260 (1991).
29. A. G. Nicola, J. R. Pelaez, and G. Rios, Phys. Rev. D **77**, 056006 (2008).
30. D. Ebert, T. Feldmann, and M. K. Volkov, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 4399 (1997).
31. M. K. Volkov, E. A. Kuraev, and Y. M. Bystritskiy, Central Eur. J. Phys. **8**, 580 (2010).