Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 9, с. 626 – 631 © 2020 г. 10 ноября

Оптимизация спектра нормальных частот линейных ионных кристаллов в ловушках Пауля для EIT-охлаждения с использованием оптической решетки

Л. А. Акопян[+1)], *И. В. Заливако*[*], *К. Е. Лахманский*[+], *К. Ю. Хабарова*[*+], *Н. Н. Колачевский*[*+]

[+]*Российский квантовый центр, 121205 Москва, Россия*

[*]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 сентября 2020 г.
После переработки 3 октября 2020 г.
Принята к публикации 3 октября 2020 г.

Ионы в радиочастотных ловушках находят широкое применение в различных областях прикладной и фундаментальной физики, таких как метрология и квантовые вычисления. Одной из важных задач, необходимых для проведения современных экспериментов, является глубокое охлаждение ионных кристаллов. В работе представлены результаты теоретических исследований по увеличению эффективности глубокого охлаждения линейных ионных кристаллов методом электромагнитно-индуцированной прозрачности (EIT-охлаждения) путем наложения на радиочатотную ловушку оптической решетки. Показано, что данный метод позволяет сузить частотный диапазон, занимаемый различными колебательными модами ионов, и увеличить их аксиальные частоты движения без нарушения линейной конфигурации кристалла. Так, для кристалла из 8 ионов в ловушке Пауля с секулярными частотами $\omega_z = 2\pi \times 100$ кГц и $\omega_r = 2\pi \times 650$ кГц, приложение оптической решетки позволяет сузить диапазон частот, занимаемый колебательными модами, в 2 раза. Исследована зависимость оптимальной мощности оптической решетки для сужения колебательного спектра от количества частиц в ловушке и ее параметров.

DOI: 10.31857/S1234567820210090

1. Введение. Успехи в области высокоточного управления одиночными квантовыми объектами, достигнутые в последние десятилетия, привели к бурному развитию таких областей науки, как квантовые вычисления [1–3], квантовые симуляции [4, 5], прецизионная метрология [6], проверка фундаментальных теорий [7]. Одним из интересных объектов для исследования в этих областях являются ионы, захваченные в радиочастотные ловушки. Наличие заряда и различные методы лазерного охлаждения позволяют захватить и локализовать эти частицы в областях пространства порядка длины волны света, возбуждающего оптические переходы в ионах. Возможность с высокой точностью контролировать электромагнитные поля в области локализации ионов, а также условия ультравысокого вакуума, в которых обычно располагаются ловушки, обеспечивают отсутствие возмущений их энергетической структуры и высокое время когерентности квантовых состояний [8]. В то же время высокостабильные лазерные источники [9] позволяют прецизионным образом манипулировать квантовым состоянием ионов и перепутывать внутренние степени свободы частиц с их движением [10]. Последнее обстоятельство, а также тот факт, что несколько ионов, находящихся в общем потенциале ловушки и отталкивающихся друг от друга посредством силы Кулона, представляют собой систему связанных механических осцилляторов, позволяют эффективно перепутывать электронные квантовые состояния нескольких частиц. В этом случае обобщенные колебательные степени свободы выступают в качестве передатчика взаимодействия, а лазерные поля – перепутывают эти степени свободы с внутренними состояниями частиц. Кроме того, квантовые состояния ионов могут быть с высокой точностью инициализированы и считаны [11] при помощи методов оптической накачки и квантовых скачков. Таким образом, ионы в ловушках являются квантовыми системами, хорошо изолированными от внешней среды, с высокой достоверностью контроля, подготовки и считывания их квантовых состояний, а также с возможностью осуществлять их квантовое перепутывание. Этими факторами и обуславливается столь высокий интерес к ионам в перечисленных выше областях.

[1)]e-mail: l.akopyan@rqc.ru

Одной из важных составляющих экспериментов с ионами является их лазерное охлаждение. Оно позволяет уменьшить область локализации частиц, подавить сдвиги энергетических уровней, вызванные эффектом Доплера, а также дефазировку квантовых состояний, связанную с фактором Дебая–Уоллера [12]. Охлаждение ионов обычно осуществляется в несколько этапов. Первым из них является доплеровское охлаждение [13]. Этот метод позволяет охладить частицы до так называемого доплеровского предела, который обычно составляет примерно 1 мК. Для многих экспериментов, например для задач метрологии, это обычно является достаточным, однако ряд приложений требует охлаждения нормальных мод движения ионов до основного колебательного состояния. В первую очередь, это необходимо для экспериментов по квантовой логике, так как перепутывание частиц производится при помощи этих мод и большое количество фононов в моде может приводить к уменьшению достоверности операций [14, 15]. Также охлаждение до основного состояния необходимо в ряде спектроскопических и метрологических экспериментов, где считывание состояния производится посредством вспомогательного иона другого элемента [12] путем перепутывания их квантовых состояний.

Существует несколько методов глубокого охлаждения. Наиболее известным среди них является метод охлаждения на боковых колебательных частотах [16]. Он подразумевает возможность возбуждения в ионе спектрально узкого перехода, позволяющего отбирать при этом когерентным образом по одному или нескольким фононам из той или иной моды колебаний. Данный метод является эффективным, однако обладает рядом недостатков. Во-первых, он требует возбуждения некоторого узкого оптического или рамановского перехода, что чаще всего подразумевает необходимость в специализированной лазерной системе. Во-вторых, этот лазер должен с одной стороны импульсно и с другой стороны в когерентном режиме возбуждать нужный переход, в результате чего требуется соблюдать правильные длительности и интенсивности импульсов. Но главным недостатком метода является возможность охлаждать в каждый момент времени только одну колебательную моду. Альтернативным подходом является использование эффекта электромагнитноиндуцированной прозрачности (*Electromagnetically induced transparency* – EIT) [17–19]. Для его реализации в энергетической системе уровней частицы должна присутствовать лямбда-схема. Если приложить к иону оптические поля, близкие по частоте к переходам лямбда-схемы, и правильно подобрать их интенсивности, отстройки и поляризации, можно добиться эффективного изменения профиля поглощения ионом излучения. В частности, можно добиться того [20], что ион будет эффективно поглощать фотоны на частотах, близких к красным колебательным боковым полосам [21], и не поглощать на несущей частоте перехода и синих боковых полосах. Это приведет к быстрому охлаждению колебательных мод в некотором диапазоне частот до уровня, близкого к основному колебательному состоянию. При этом для реализации данного подхода обычно можно использовать те же лазерные системы, что и для доплеровского охлаждения. Также отсутствует необходимость в формировании импульсов, а охлаждению подлежит сразу несколько мод, частоты которых находятся в некотором спектральном диапазоне, что особенно важно при работе с большими ионными кристаллами. Данный метод был успешно применен для глубокого охлаждения ионов Ca^+ [22] и Yb^+ [23].

Несмотря на все преимущества метода EIT-охлаждения, у него есть несколько ограничений. Во-первых, охлаждаемые частицы должны обладать специфической структурой энергетических уровней. Во-вторых, как и для метода охлаждения на боковых частотах, требуется реализация режима Лэмба–Дике, когда область локализации иона перед глубоким охлаждением не превосходит длину волны используемого излучения. И, в-третьих, эффективность охлаждения сильно связана с диапазоном частот мод, которые необходимо охладить. Таким образом, чем в меньшем диапазоне частот сосредоточены охлаждаемые моды, тем более глубоким будет охлаждение. В случае линейных ионных кристаллов моды обычно располагаются в достаточно широком спектральном диапазоне, а частоты аксиальных и радиальных мод разделены большим промежутком, что не позволяет эффективно охладить все моды.

В данной работе мы исследуем возможность использования комбинированного радиочастотно-оптического удержания ионов для повышения эффективности EIT-охлаждения. В частности, рассматривается изменение спектра нормальных мод колебаний линейных кристаллов при приложении вдоль оси ловушки оптической решетки. Под оптической решеткой здесь понимается стоячая волна, сформированная двумя встречными когерентными лазерными пучками, распространяющимися вдоль оси ловушки. Регулирование мощности решетки позволяет манипулировать частотами нормальных мод колебаний ионного кристалла [24]. Так, при определенных мощностях решетки можно добиться уменьшения разброса мод по частоте. Поскольку эффективность EIT-метода повышается с уменьшением диапазона частот, наложение оптической решетки позволит достигнуть более глубокого охлаждения. Нами изучена зависимость оптимальной мощности решетки, при которой разброс нормальных мод по частотам минимален, и достижимого диапазона частот нормальных мод от параметров ловушки и числа ионов для линейного кулоновского кристалла. Параметры оптимизировались для охлаждения ионов $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$, как одного из наиболее распространенных элементов в области квантовых вычислений и метрологии [25–27], где рассматриваемый метод является наиболее востребованным.

2. Колебательный спектр ионов в комбинированной ловушке. Линейные ловушки Пауля удерживают ионы при помощи комбинации постоянных и переменных электрических полей [21]. Движение ионов в них можно приближенно рассматривать как движение в гармоническом псевдопотенциале, кривизна которого в направлении вдоль оси ловушки значительно меньше, чем перпендикулярно ей. Секулярные частоты колебаний вдоль оси ω_z и перпендикулярно ей ω_r полностью характеризуют псевдопотенциал. Секулярные частоты зависят от массы и заряда захваченных частиц, геометрических параметров ловушки и напряжений, подаваемых на ее электроды.

При охлаждении ионов в ловушке, когда их средняя кинетическая энергия становится меньше средней потенциальной энергии их взаимодействия, они локализуются и формируют так называемые ионные (кулоновские) кристаллы [28]. В случае, если отношение силы удержания ловушки вдоль оси и перпендикулярно ей удовлетворяет условию [29]

$$\frac{1}{\alpha} \equiv \left(\frac{\omega_r}{\omega_z}\right)^2 \geq \frac{N^{1.73}}{2.53}, \tag{1}$$

ионный кристалл будет иметь вид линейной цепочки вдоль оси ловушки. Здесь N – количество ионов в ловушке. Именно такой вид кристаллов и будет рассматриваться далее в данной работе, так как именно они обычно применяются на практике для задач спектроскопии и квантовой логики. Малые колебания ионов вблизи положения равновесия в кристалле могут быть представлены как суперпозиция колебаний независимых гармонических осцилляторов, называемых нормальными модами. При наложении на кристалл в ловушке оптической решетки на каждый ион начинает действовать дополнительная пондеромоторная сила, обусловленная динамическим эффектом Штарка. Это приводит к изменению колебательного спектра и положений равновесия частиц, что может быть использовано, например, для более эффективного охлаждения. Полный потенциал взаимодействия ионов с внешним полем в псевдопотенциальном приближении запишется следующим образом (оптическая решетка представлена как два встречных гауссовых лазерных пучка, распространяющихся вдоль оси ловушки и сфокусированных в ее центре):

$$V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2}\left[\omega_{xy}^2 x_i^2 + \omega_{xy}^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2\right] + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{1}{d_{ij}} -$$

$$- \frac{4P\eta\alpha_e}{\pi w_0^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1+\frac{z_i^2}{z_R^2}}\exp\left(-\frac{2r_i^2}{w_0^2(1+\frac{z_i^2}{z_R^2})}\right)\cos^2 kz_i, \tag{2}$$

где m, N – масса и полное число ионов, $d_{ij} = \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}$ – расстояние между ионами i, j, $\omega_{xy} \equiv \omega_r$ и ω_z – радиальная и аксиальная секулярные частоты колебаний ионов в ловушке Пауля, e – элементарный заряд, η – волновое сопротивление вакуума, α_e – поляризуемость иона, λ_L – длина волны и $k = \frac{2\pi}{\lambda_L}$ – волновой вектор лазера решетки, w_0 – ширина пучка решетки, $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L}$ – длина Рэлея, P – оптическая мощность в одном из двух пучков, образующих решетку, $r^2 = x^2 + y^2$ – расстояние от оси ловушки до иона. Первый член в этом выражении соответствует энергии ионов в поле ловушки Пауля, второй соответствует их кулоновскому расталкиванию, а третий описывает взаимодействие с оптической решеткой. Удобной характеристикой описания оптической решетки является не зависящая от параметров эксперимента частота решетки $\nu_{\mathrm{lat}} = \sqrt{\frac{2P\eta\alpha_e}{m\pi^3 w_0^2}}k$, физический смысл которой – частота аксиальных колебаний одиночного иона, которые он бы совершал, будучи захваченным только в решетку.

Нормальные моды кристалла могут быть найдены диагонализацией матрицы вторых производных потенциала (2), взятых при равновесных положениях ионов [30]. Эта матрица также называется гессианом. Таким образом, для вычисления спектра колебательных мод кристалла сначала необходимо найти равновесные положения ионов, которые соответствуют координатам частиц, где первые производные потенциальной энергии обращаются в нуль. Однако численное решение данной нелинейной системы уравнений для большого количества ионов является трудоемким вычислительным процессом, поэтому для поиска положений равновесия ионов используется метод молекулярной динамики.

В данной работе моделирование осуществлено в пакете LIon [31], созданном для численной симуляции динамики частиц в радиочастотных ловушках. Нами был создан дополнительный модуль для данного пакета, задающий динамику частицы в комбинированном радиочастотно-оптическом потенциале. Для поиска положений равновесия численно симулируется процесс захвата и охлаждения ионов $^{171}\mathrm{Yb}^+$, наблюдаемый в эксперименте. Для этого ионам сначала присваиваются случайные положения в ловушке и скорости, после чего происходит прямое интегрирование уравнений движения частиц в ловушке, к которым добавлено сильное затухание. Через некоторое время движения частиц полностью затухают, и полученные конечные значения их координат соответствуют положениям равновесия. После нахождения положений равновесия вычисляется матрица Гесса, диагнализацией которой находятся частоты нормальных мод колебаний ионов.

На рисунке 1 в качестве примера приведены результаты вычислений зависимости частоты нормальных мод колебаний линейного 8-ионного кристалла от частоты оптической решетки ν_{lat} для ионов иттербия $^{171}\mathrm{Yb}^+$. Для удобства вторая горизонтальная шкала на графике показывает соответствующие мощности решетки. Здесь и в дальнейшем в расчетах использованы параметры ловушки, типичные для экспериментов по спектроскопии и квантовой логике, а также обеспечивающие выполнение условия (1). Секулярные частоты составили $\omega_z = 2\pi\times 100$ кГц и $\omega_r = 2\pi \times 650$ кГц, длина волны решетки $\lambda_L = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 50$ мкм. На данной длине волны возможно получение большой оптической мощности при помощи коммерчески доступных лазерных источников при относительно высоком значении поляризуемости основного состояния иона иттербия. Поляризуемость основного состояния иттербия на этой длине волны принята равной $\alpha_e = 100$ а.е. [32].

Как можно видеть из рис. 1, частоты радиальных мод слабо зависят от мощности оптической решетки, в то время как аксиальные моды при приложении оптического поля сгущаются и их частоты возрастают. Вертикальная прямая на рис. 1 соответствует оптимальной для EIT-охлаждения при данных параметрах ловушки частоте решетки $\nu_o = 0.530$ МГц, при которой диапазон частот мод $\Delta\omega = 2\pi \times 224$ кГц принимает наименьшее значение.

3. Оптимизация параметров ловушки и решетки для EIT-охлаждения. Была исследована зависимость оптимальных параметров решетки и достижимого сужения ширины спектра нормальных мод для осуществления EIT-охлаждения от количества захваченных ионов и параметров ловушки Пауля. Оптимальные параметры решетки и соответствующие им разбросы частот мод в зависимости от отношения квадратов аксиальной и радиальной секулярных частот ловушки α приведены на рис. 2. Радиальная частота ω_r при этом оставалась постоянной, а аксиальная ω_z – варьировалась. Если менять параметр α путем варьирования ω_r вместо ω_z, качественный характер зависимости не изменяется. Количество ионов, используемое при этой симуляции, составило $N = 6$. Полученные результаты показывают, что с ростом параметра α оптимальная частота решетки падает, приводя к более низким требуемым оптическим мощностям, однако достижимая ширина спектра нормальных мод растет, что уменьшает эффективность охлаждения. Таким образом, при планировании эксперимента по EIT-охлаждению с использованием оптической решетки необходимо искать компромисс между располагаемой оптической мощностью и достигаемой эффективностью охлаждения.

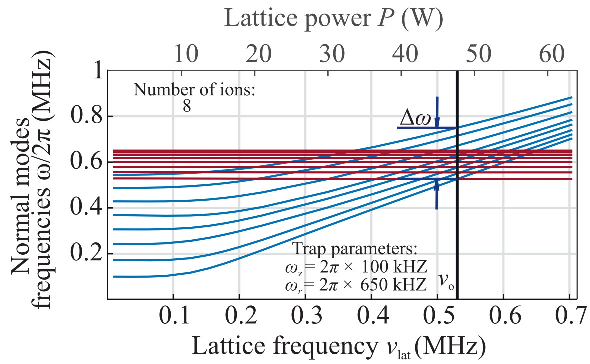

Рис. 1. (Цветной онлайн) Частоты аксиальных (синие кривые) и радиальных (красные кривые) нормальных мод колебаний 8-ионного линейного кристалла в зависимости от мощности приложенной оптической решетки. Частота оптической решетки – частота аксиальных колебаний иона, соответствующая колебаниям частицы только в оптическом потенциале. Параметры ловушки составили $\omega_z = 2\pi \times 100$ кГц и $\omega_r = 2\pi \times 650$ кГц. Вертикальная прямая показывает значение оптимальной частоты решетки $\nu_o = 0.530$ МГц, при которой разброс мод по частотам минимален и равен $\Delta\omega = 2\pi \times 224$ кГц

Рисунок 3 содержит результаты исследования зависимости оптимизированных параметров решетки от длины ионного кристалла N. Из рисунка 3 видно, что с увеличением числа ионов оптимальная частота решетки ν_0 уменьшается, однако, как и в случае с параметром α, минимальный диапазон частот мод $\Delta\omega$ растет и достигает $\Delta\omega = 2\pi \times 224$ кГц для кристалла

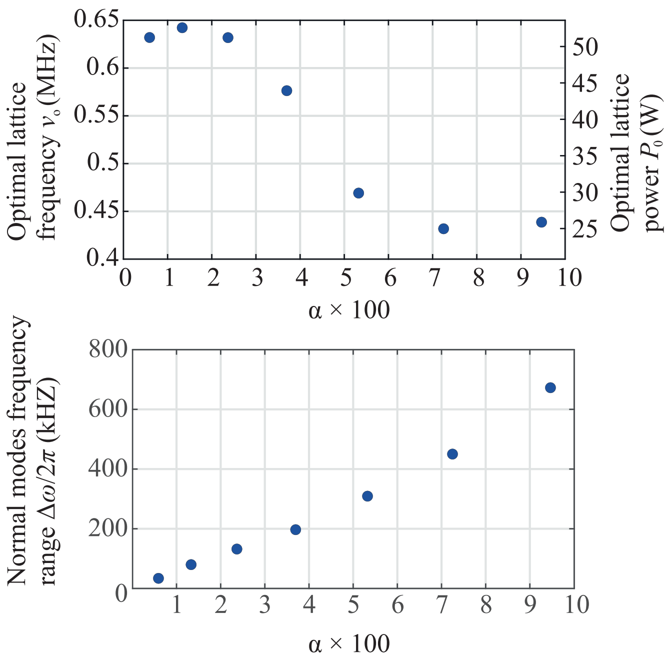

Рис. 2. (Цветной онлайн) Графики зависимости оптимальной частоты оптической решетки ν_o (сверху) и диапазона частот нормальных мод $\Delta\omega$ при оптимальной частоте решетки (снизу) от параметра $\alpha = \frac{\omega_z^2}{\omega_r^2}$. Радиальная частота была фиксирована и составляла $\omega_r = 2\pi \times 650$ кГц, в то время как аксиальная частота ω_z варьировалась в пределах от $2\pi \times 50$ кГц до $2\pi \times 200$ кГц

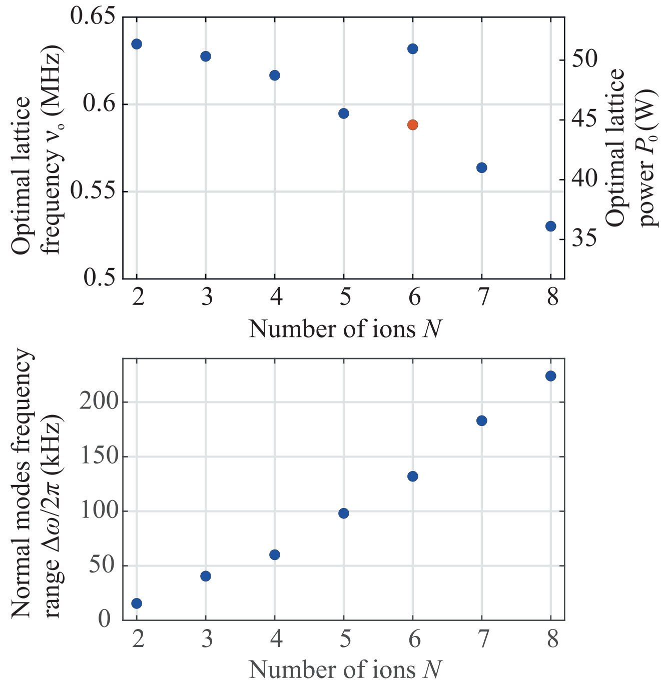

Рис. 3. (Цветной онлайн) Графики зависимости оптимальной частоты оптической решетки ν_0 (сверху) и диапазона частот нормальных мод при оптимальной частоте $\Delta\omega$ (снизу) от числа ионов N. Параметры ловушки составили $\omega_z = 2\pi \times 100$ кГц и $\omega_r = 2\pi \times 650$ кГц. Аномальное значение частоты ν_0 при $N = 6$ связано с совпадением равновесных положений комбинированной ловушки с пучностями оптической решетки. Данный эффект приводит к смещению оптимальной частоты решетки. Красной точкой показано значение частоты ν_0 при измененной длине волны лазера $\lambda_L = 500$ нм, когда этот эффект более не наблюдается

из 8 ионов. Вкупе с данными из предыдущего графика можно сделать вывод, что EIT-охлаждение с использованием оптической решетки может быть эффективно использовано для длинных ионных цепочек при условии использования достаточно низкого значения параметра α, что одновременно требуется для сохранения линейной конфигурации кристалла. Аномальное значение оптимальной частоты решетки ν_0 для кристалла из 6 ионов на рис. 3 (0.632 МГц вместо ожидаемых 0.57 МГц) не является вычислительной ошибкой, а связано с тем, что при данном наборе параметров системы (параметры ловушки и длина волны решетки) равновесные положения крайних ионов в цепочке располагаются слишком близко к пучностям решетки, что меняет динамику изменения конфигурации ионного кристалла при увеличении оптической мощности. Это приводит к изменению модового спектра кристалла при приложении решетки и изменению оптимальной мощности решетки. Небольшое изменение длины волны решетки устраняет это аномальное поведение мод.

4. Заключение. Исследована возможность увеличения эффективности EIT-охлаждения линейных ионных кристаллов путем наложения на ловушку оптической решетки. Проведены численные симуляции колебательного спектра линейных цепочек из ионов $^{171}Yb^+$ при разном количестве частиц (вплоть до 8), а также параметрах ловушки и решетки. Показано, что при экспериментально достижимых оптических мощностях в решетке и параметрах ловушки возможно сужение диапазона частот, занимаемого нормальными модами, в несколько раз, что позволяет значительно увеличить эффективность охлаждения. При этом происходит увеличение аксиальных частот колебаний частиц до значений, соответствующих радиальным частотам, без выхода кристалла из линейной конфигурации, что особенно важно для длинных цепочек частиц (40–100), где низкие аксиальные частоты обычно не позволяют даже реализовать режим Лэмба–Дике. Это, а также тот факт, что мощность оптического поля, требуемая для сужения спектра колебательных мод, падает с ростом длины кристалла, показывают, что EIT-охлаждение с использованием комбинированных радиочастотно-оптических ловушек является перспективным инструментом для работы с большими линейными ионными кристаллами. Этот результат является важным для целого ряда задач, таких как масштабирование ионных квантовых вычислителей и создание многоионных оптических часов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта # 19-12-00274.

Мы также благодарим О. Ю. Лахманскую за полезные обсуждения.

1. C. D. Bruzewicz, J. Chiaverini, R. McConnell, and J. M. Sage, Appl. Phys. Rev. **6**, 021314 (2019).
2. M. Saffman, National Science Review **6**, 24 (2019).
3. F. Arute, K. Arya, R. Babbush et al. (Collaboration), Nature **574**, 505 (2019).
4. J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z. X. Gong, and C. Monroe, Nature **551**, 601 (2017).
5. H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletic, and M. D. Lukin, Nature **551**, 579 (2017).
6. P. Micke, T. Leopold, S. A. King, E. Benkler, L. J. Spieß, L. Schmöger, M. Schwarz, J. R. Crespo López-Urrutia, and P. O. Schmidt, Nature **578**, 60 (2020).
7. T. Rosenband, D. B. Hume, P. O. Schmidt et al. (Collaboration), Science **319**, 1808 (2008).
8. P. Wang, C. Y. Luan, M. Qiao, M. Um, J. Zhang, Y. Wang, X. Yuan, M. Gu, J. Zhang, and K. Kim, **1**, 1 (2020).
9. J. M. Robinson, E. Oelker, W. R. Milner, W. Zhang, T. Legero, D. G. Matei, F. Riehle, U. Sterr, and J. Ye, Optica **6**, 240 (2019).
10. J. P. Gaebler, T. R. Tan, Y. Lin, Y. Wan, R. Bowler, A. C. Keith, S. Glancy, K. Coakley, E. Knill, D. Leibfried, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **117**, 1 (2016).
11. T. P. Harty, D. T. Allcock, C. J. Ballance, L. Guidoni, H. A. Janacek, N. M. Linke, D. N. Stacey, and D. M. Lucas, Phys. Rev. Lett. **113**, 2 (2014).
12. P. O. Schmidt, T. Rosenband, C. Langer, W. M. Itano, J. C. Bergquist, and D. J. Wineland, Science (New York, N.Y.) **309**, 749 (2005).
13. P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, C. E. Tanner, R. N. Watts, and C. I. Westbrook, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2084 (1989).
14. J. I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
15. A. Sørensen and K. Mølmer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1971 (1999).
16. C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland, and P. Gould, Phys. Rev. Lett. **75**, 4011 (1995).
17. G. Morigi, J. Eschner, and C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **85**, 4458 (2000).
18. M. Roghani and H. Helm, Phys. Rev. A **77**, 43418 (2008).
19. I. Semerikov, I. Zalivako, A. Borisenko, K. Khabarova, and N. Kolachevsky, Journal of Russian Laser Research **39**, 568 (2018).
20. J. Evers and C. H. Keitel, EPL (Europhysics Letters) **68**, 370 (2004).
21. D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
22. R. Lechner, C. Maier, C. Hempel, P. Jurcevic, B. P. Lanyon, T. Monz, M. Brownnutt, R. Blatt, and C. F. Roos, Phys. Rev. A **93**, 1 (2016).
23. L. Feng, W. Tan, A. De, A. Menon, A. Chu, G. Pagano, and C. Monroe, Phys. Rev. Lett. **125**, 053001 (2020).
24. T. Lauprêtre, R. B. Linnet, I. D. Leroux, H. Landa, A. Dantan, and M. Drewsen, Phys. Rev. A **99** (2019).
25. K. Wright, K. Beck, S. Debnath et al. (Collaboration), Nature Commun. **10**, 1 (2019).
26. Y. Wang, M. Um, J. Zhang, S. An, M. Lyu, J. N. Zhang, L. M. Duan, D. Yum, and K. Kim, Nature Photon. **11**, 646 (2017).
27. N. Huntemann, M. Okhapkin, B. Lipphardt, S. Weyers, C. Tamm, and E. Peik, Phys. Rev. Lett. **108**, 090801 (2012).
28. R. C. Thompson, Contemp. Phys. **56**, 63 (2015).
29. D. G. Enzer, M. M. Schauer, J. J. Gomez, M. S. Gulley, M. H. Holzscheiter, P. G. Kwiat, S. K. Lamoreaux, C. G. Peterson, V. D. Sandberg, D. Tupa, A. G. White, R. J. Hughes, and D. F. James, Phys. Rev. Lett. **85**, 2466 (2000).
30. D. F. V. James, Appl. Phys. B **66**, 181 (1998).
31. E. Bentine, C. J. Foot, and D. Trypogeorgos, Comput. Phys. Commun. **253**, 107187 (2020).
32. A. Roy, S. De, B. Arora, and B. K. Sahoo, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **50**, 205201 (2017).