Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 1, с. 21 – 25

Эффект разделения киральностей в полуметаллах Рариты–Швингера–Вейля

З. В. Хайдуков[1)]

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Институт теоретической и экспериментальной физики Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 октября 2020 г.
После переработки 12 ноября 2020 г.
Принята к публикации 12 ноября 2020 г.

Исследован эффект разделения киральностей в случае фермионов со спином 3/2. Основное внимание уделено полуметаллам Рариты–Швингера–Вейля. Обсуждается связь полученного эффекта и аксиальной аномалии.

DOI: 10.31857/S1234567821010031

1. Введение. Эффектом разделения киральностей [1] называется возникновение аксиального тока в термодинамическом равновесии, направленного вдоль внешнего магнитного поля ($\mathbf{B}$). В случае безмассовых фермионов со спином $\frac{1}{2}$ этот ток задается выражением:

$$\mathbf{j}^5 = \frac{e^2\mu}{2\pi^2}\mathbf{B}S. \tag{1}$$

S – площадь образца, μ – химический потенциал. Значительное внимание к этому эффекту обусловлено возможностью его экспериментального наблюдения как в физике высоких энергий, так и в конденсированных средах.

Высказывалось утверждение, что коэффициент при произведении химического потенциала на магнитное поле не зависит от взаимодействия. В этом случае особое значение придавалось взаимосвязи эффекта разделения киральностей и аксиальной аномалии, которая защищена от перенормировок. Несмотря на численное подтверждение неперенормируемости при решеточном моделировании КХД [2], возможность такой защиты [3–7], а также ее точный механизм [8] являются предметом обширных дискуссий. Изучение эффекта разделения киральностей для фермионов со спином $\frac{3}{2}$ позволит привести новые аргументы, а также проверить старые на универсальность. Такие частицы могут иметь отношение как к физике высоких энергий (несмотря на все проблемы, уравнение Рариты–Швингера [9] может применяться при описании процессов, связанных с дельта-изобарами [10]), так и к физике твердого тела. Последняя наиболее интересна для нас, поскольку сравнительно недавно начались интенсивные экспериментальные исследования материалов, в спектре которых существуют возбуждения, обладающие большим квазиспином и топологическим зарядом CoSi, RhSi [11–13], AlPt [14]. И уже сейчас фермионы Рариты–Швингера–Вейля[2)] точно удалось идентифицировать в PdBiSe [15].

2. Полуметаллы Рариты–Швингера–Вейля в магнитном поле. Для описания квазичастиц в полуметаллах Рариты–Швингера–Вейля предлагается использовать низкоэнергетический гамильтониан вида [18, 19]:

$$H(p) = p_i(v_1 S_i + v_2 S_i^3), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Мы используем суммирование по повторяющимся индексам. Величины параметров v_1, v_2 зависят от конкретного материала [18]. Член, пропорциональный v_1, инвариантен относительно группы вращений трехмерного пространства. Член с v_2 явно нарушает эту группу до группы вращений куба. В этой работе мы специально вводим ограничение $v_2 = 0$, поскольку в этом случае мы можем отследить связь между аксиальной аномалией [19] и эффектом разделения киральностей.

Предполагается, что (2) действует на столбец из четырех компонент: $(\psi_{\frac{3}{2}}, \psi_{\frac{1}{2}}, \psi_{-\frac{1}{2}}, \psi_{-\frac{3}{2}})^T$, где индек-

[1)]e-mail: khaidukov.zv@phystech.edu

[2)]Название "фермионы Рариты–Швингера–Вейля" было впервые использовано в работе [16]. Авторы использовали его в качестве названия для гипотетических фермионов без релятивистской симметрии со спином $\frac{3}{2}$. Впоследствии это название стало общепринятым [17], а полуметаллы с такими квазичастицами стали называть "полуметаллами Рариты–Швингера–Вейля" по аналогии с полуметаллами Вейля.

сы снизу обозначают величину проекции спина на ось z. Матрицы S_i обыкновенно выбираются в виде [18]:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Введем магнитное поле в гамильтониан (2). Для этого необходимо сделать замену:

$$p_i \to p_i + A_i = -i\partial_i + A_i. \qquad (6)$$

Для однородного магнитного поля, направленного против оси z, выберем векторный потенциал в виде $A_x = By$. Такой выбор позволяет ввести операторы рождения и уничтожения при помощи:

$$a = \frac{-i\partial_x + By + \partial_y}{\sqrt{2B}}, \qquad (7)$$

$$a^+ = \frac{-i\partial_x + By - \partial_y}{\sqrt{2B}}, \left[a, a^+\right] = 1. \qquad (8)$$

Тогда (2) можно записать как:

$$\begin{gathered} H_{3/2} = v_f\sqrt{2B}(S_+ a + S_- a^+) + v_f p_z S_z, \\ S_+ = S_x + iS_y, \quad S_- = S_x - iS_y. \end{gathered} \qquad (9)$$

Вид гамильтониана (9) подсказывает, что пространственную часть волновых функций разумно искать в виде:

$$\psi(x,y,z) = \exp(ip_z z)\exp(ip_x x)\chi(y), \qquad (10)$$

$$\chi(y) = (\langle y|n\rangle, \langle y|m\rangle, \langle y|l\rangle, \langle y|k\rangle)^T,$$

$$a\langle y|n\rangle = \sqrt{n}\langle y|n-1\rangle, \qquad (11)$$

$$a^+\langle y|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle y|n+1\rangle, \qquad (12)$$

$$a\langle y|0\rangle = 0. \qquad (13)$$

В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, будут формироваться уровни Ландау. Сделаем замену:

$$p_x + By + \partial_y = \partial_y + B\left(y + \frac{p_x}{B}\right), \qquad (14)$$

$$y_0 = -\frac{p_x}{B}, \qquad (15)$$

в последнем уравнении y_0 играет роль центра орбиты.

3. Эффект разделения киральностей. Из вида гамильтониана (9) становится понятно, что получить точный закон дисперсии и аналитическое выражение для решений довольно трудно. Поэтому в некоторых моментах при решении нам придется прибегнуть к численным процедурам. Все вычисления мы будем проводить в пределе нулевых температур. Как мы покажем, за эффект в этом случае отвечают одномерные моды, поэтому мы фактически сведем задачу к расчету изменения фермионных чисел заполнения в присутствии химического потенциала (в полной аналогии с [20])[3)].

В случае сильных магнитных полей в импульсном пространстве модели существуют четыре точки, которые обладают нулевой энергией [19]. Для всех остальных решений в спектре возникает щель, поэтому их вклады сильно подавлены при малых температурах.

Стоит отдельно обсудить вопрос о возможности распространения аргументов Метлицкого и Житницкого [1] на случай фермионов со спином $\frac{3}{2}$. При рассмотрении в работе [1] гамильтониан для правых фермионов представлялся в виде:

$$H_R = H^{\perp} + p_z\sigma_z, \qquad (16)$$

$$H^{\perp} = (-i\partial_i + A_i)\sigma_i, i = x, y. \qquad (17)$$

Важнейшее свойство заключалось в антикоммутации гамильтониана с матрицей σ_z, это свойство позволяло точно вычислить аксиальный ток. Проще говоря, серия равенств $\{H^{\perp}, \sigma_z\} = 0, H^{\perp}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, $[H, (H^{\perp})^2] = 0$, $\sigma_z|\lambda\rangle = |-\lambda\rangle$ позволяла получить сокращение вкладов всех мод, кроме нулевой. Очевидно, что этот аргумент не работает в случае рассматриваемого нами гамильтониана, поскольку у нас, как минимум, не выполняется равенство $\{S_i, S_j\} = 2\delta_{ij}$.

На данном этапе мы сосредоточим наше внимание на бесщелевых модах в пределе нулевых температур. Для получения результата нам нужен закон дисперсии, а также вычисление среднего значения

[3)] Мы предполагаем выполнение условий, следующих из теоремы Нильсена–Ниномии [21]. Это означает, что сумма токов для правых и левых фермионов должна обращаться в нуль, но это ограничение не распространяется на их разность: $j = j_l + j_r = 0, j^5 = j^R - j^L$, второе равенство и определяет наше условие нормировки для тока, поскольку переход к полному "аксиальному" току подразумевает замену $\mu \to 2\mu$.

$\langle S_z \rangle = \psi_a^+ S_{ab}^z \psi_b$, которое будет усредняться по распределению Ферми. Для начала рассмотрим моду:

$$\psi(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_0 \langle y|0\rangle \end{pmatrix} e^{ip_z z} e^{ip_x x} e^{-i\epsilon t}. \qquad (18)$$

С учетом (9) получаем закон дисперсии $\epsilon = -\frac{3v_f}{2} p_z$, $c_0 = 1$. Последняя константа получается исходя из условия нормировки.

В пределе нулевых температур распределение Ферми сводится к $n_{f0}(\epsilon-\mu) = \frac{1-\theta(\epsilon-\mu)}{2}$, которое определяет предел интегрирования по импульсу. Для данной моды ток равняется[4)]:

$$J^z = v_f \sum_{deg} \int \frac{dp_z}{2\pi} \frac{3}{2} n_{f0}(\epsilon-\mu). \qquad (19)$$

Значение вырождения может быть оценено следующим образом [22]: рассмотрим образец площади $S = L_x L_y$, с одной стороны $p_x = \frac{2\pi n}{L_x}$, с другой центр орбиты $y_0 = -\frac{p_x}{B}$ должен лежать внутри образца: $0 < |y_0| < L_y$. Отсюда получаем оценку для числа вырожденных мод $n \leq \frac{BS}{2\pi}$.

При помощи соотношения:

$$\int dp_z n_{f0}(\frac{3}{2} v_f p_z - \mu) = \frac{2\mu}{3v_f},$$

мы получаем:

$$J^z = -\frac{\mu}{4\pi^2} BS, \mu = V_0. \qquad (20)$$

Вторую моду мы будем искать в форме:

$$\psi(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \langle y|0\rangle \\ c_1 \langle y|1\rangle \end{pmatrix} e^{ip_z z} e^{ip_x x} e^{-i\epsilon t}. \qquad (21)$$

С учетом (9), мы получаем соотношение:

$$\begin{pmatrix} -\frac{v_f p_z}{2} & \sqrt{6B} \\ \sqrt{6B} & -\frac{3v_f p_z}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Положим $\epsilon = 0$, в этой точке $v_f p_z = 2\sqrt{2B}$. Мы можем найти точное дисперсионное соотношение из уравнения (22):

$$\epsilon = -v_f p_z + \sqrt{\frac{(v_f p_z)^2}{4} + 6B}. \qquad (23)$$

[4)] Мы не рассматриваем возможный вклад в ток в отсутствии химического потенциала. Случай $\mu = 0$ может потребовать отдельного изучения.

В отличие от Вейлевских фермионов дисперсионное соотношение нелинейно. Выражение для тока приобретает вид:

$$J^z = v_f \sum_{deg} \int \frac{dp_z}{2\pi} n_{f0}(\epsilon-\mu) \Big(-\frac{c_0^2}{2} - \frac{3c_1^2}{2} \Big). \qquad (24)$$

Нам необходимо получить выражение для коэффициентов в (21) при условии $c_0^2 + c_1^2 = 1$. В результате довольно долгих, но совершенно очевидных вычислений, мы получаем коэффициенты:

$$c_1^2 = 1 - c_0^2, \; c_0^2 = \frac{1}{(\epsilon + \frac{v_f p_z}{2})^2 + 6B}. \qquad (25)$$

Находя решение уравнения $\epsilon(p_z) - \mu = 0$ через импульс и подставляя его в (24) с учетом (25), получим:

$$J^z = -BS \frac{1}{4\pi^2} \epsilon|_0^\mu. \qquad (26)$$

При вычислении интеграла мы получили первообразную, которая равна правой части (23), и просто подставили энергию вместо нее с учетом пределов интегрирования. В случае третьей моды решение находится совершенно аналогичным образом, поэтому мы опустим здесь выкладки. Больший интерес представляет оставшаяся четвертая мода, будем искать ее в виде:

$$\psi(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_0 \langle y|0\rangle \\ c_1 \langle y|1\rangle \\ c_2 \langle y|2\rangle \end{pmatrix} e^{ip_z z} e^{ip_x x} e^{-i\epsilon t}.$$

Можно показать, что в этом случае для единственной бесщелевой моды энергия обращается в нуль в точке $p_z = 0$. Выражение для тока принимает вид:

$$J^z = v_f \sum_{deg} \int \frac{dp_z}{2\pi} \Big(\frac{c_0^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{3c_1^2}{2} \Big) n_{f0}(\epsilon-\mu). \qquad (27)$$

Коэффициенты в выражении (27) равны:

$$c_0^2 = \frac{1}{B + \frac{(\epsilon + \frac{v_f p_z}{2})^2}{4} + \frac{(4B - (\epsilon^2 + \frac{v_f^2 p_z^2}{4}))^2}{24B}}, \qquad (28)$$

$$(\epsilon + \frac{v_f p_z}{2})^2 c_0^2 = 4Bc_1^2, c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1. \qquad (29)$$

Вычисление тока в этой ситуации представляет из себя весьма сложную задачу, которая может быть решена численно. Основной результат состоит в незначительном отличии тока без учета вырождения от $-\frac{\mu}{2\pi}$. Чтобы подтвердить свои утверждения, мы приводим результат численного вычисления на рис. 1.

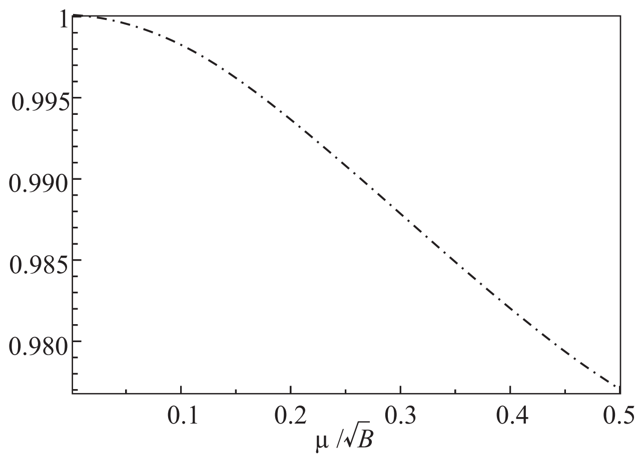

Рис. 1. Относительный коэффициент для эффекта разделения киральностей в зависимости от отношения $\frac{\mu}{\sqrt{B}}$

Путем сложения всех вкладов мы получаем, что полный ток приближенно равняется:

$$\mathbf{J} = \frac{\mu \mathbf{B}}{\pi^2} S. \tag{30}$$

4. Заключение и обсуждения. В этой работе мы исследовали эффект разделения киральностей для фермионов в полуметаллах Рариты–Швингера–Вейля. Было показано, что в сильных магнитных полях в пределе нулевых температур за счет бесщелевых мод, которые формируют уровни Ландау, возникает ток, приближенно равный $\frac{\mu}{\pi^2}\mathbf{B}S$. Примечательной особенностью рассматриваемого случая является нелинейность законов дисперсии для трех из четырех мод. Несмотря на это, можно показать, что только для четвертой моды выражение для тока без учета вырождения отличается от $-\frac{\mu}{2\pi}$. Для оставшейся моды численные расчеты показывают возможность малого отклонения. Механизм вычисления для уравнений вида $i\partial_t\psi = \sum_{i=1\dots3} S_i p_i \psi$, где S_i – спиновые матрицы для произвольного полуцелого спина, представляется очевидным. Будет интересно рассмотреть эффект с точки зрения квазиклассического кинетического уравнения с учетом монопольных зарядов в импульсном пространстве [23, 24], а также подтвердить его существование в решеточной регуляризации [25, 26]. Коэффициент в (30) фигурирует и в уравнении для аксиальной аномалии [19], но в этом нет ничего удивительного: именно бесщелевые возмущения ответственны за оба явления.

Важным вопросом является вопрос о влиянии дислокаций на эффект. Этот вопрос требует подробного изучения, но можно вспомнить, что в случае простых фермионов со спином $\frac{1}{2}$ эффект может быть реализован на статических модах, а это подсказывает, что влияние дислокаций может быть незначительным. Вопрос о кулоновском взаимодействии также весьма важен и требует детального изучения.

Весьма интригующей выглядит перспектива рассмотрения фермионов со спином $\frac{3}{2}$ с учетом релятивистской симметрии. Автор планирует опубликовать новые утверждения в этой области в ближайшее время.

Автор выражает благодарность М. А. Зубкову за очень плодотворные обсуждения.

Все разделы этой работы были поддержаны грантом Российского научного фонда # 16-12-10059.

1. M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **72**, 045011 (2005).
2. M. Puhr and P. V. Buividovich, Phys. Rev. Lett. **118**(19), 192003 (2017); arXiv: 1611.07263 [hep-lat].
3. E. V. Gorbar, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. C **80**, 032801 (2009); arXiv:0904.2164.
4. E. V. Gorbar, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. D **83**, 085003 (2011); arXiv:1101.4954.
5. E. V. Gorbar, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Lett. B **695**, 354 (2011); arXiv:1009.1656.
6. A. Jimenez-Alba and L. Melgar, JHEP **10**, 120 (2014); arXiv:1404.2434.
7. A. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **107**, 031601 (2011); arXiv:1105.0385.
8. Z. V. Khaidukov and M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **95**, 074502 (2017); arXiv: 1701.03368.
9. W. Rarita and J. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 61 (1941.
10. V. Pascalutsa, Phys. Rev. D **58**, 096002 (1998).
11. D. Takane, Z. Wang, S. Souma, K. Nakayama, T. Nakamura, H. Oinuma, Y. Nakata, H. Iwasawa, C. Cacho, T. Kim, K. Horiba, H. Kumigashira, T. Takahashi, Y. Ando, and T. Sato, Phys. Rev. Lett. **122**, 076402 (2019).
12. Z. Rao, H. Li, T. Zhang, S. Tian et al. (Collaboration), Nature **567**, 496 (2019).
13. D. S. Sanchez, I. Belopolski, T. A. Cochran et al. (Collaboration), Nature **567**, 500 (2019).
14. N. B. M. Schroter, D. Pei, M. G. Vergniory et al. (Collaboration), Nat. Phys. **15**, 759 (2019).
15. B. Q. Lv, Z.-L. Feng, J.-Z. Zhao, N. F. Q. Yuan, A. Zong, K. F. Luo, R. Yu, Y.-B. Huang, V. N. Strocov, A. Chikina, A. A. Soluyanov, N. Gedik, Y.-G. Shi, T. Qian, and H. Ding, Phys. Rev. B **99**, 241104 (2019).
16. L. Liang and Y. Yu, Phys. Rev. B **93**, 045113 (2016).
17. P. Tang, Q. Zhou, and Sh.-Ch. Zhang, Phys. Rev. Lett. **119**, 206402 (2017).
18. I. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **124**, 127602 (2020); arXiv:1907.05354.

19. M. Ezawa, Phys. Rev. B **95**, 205201 (2017).
20. A. Cortijo, D. Kharzeev, K. Landsteiner, and M. A. H. Vozmediano, Phys. Rev. B **94**, 241405 (2016); arXiv:1607.03491.
21. H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. B **130**, 389 (1983).
22. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford (1980), part I.
23. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
24. G. E. Volovik, Lecture Notes in Physics **870**, 343 (2013); arXiv:1111.4627 [hep-ph].
25. M. A. Zubkov, Ann. Physics **373**, 298 (2016); arXiv:1603.03665 [cond-mat.mes-hall].
26. M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **93**(10), 105036 (2016); arXiv:1605.08724 [hep-ph].