Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 1, с. 26 – 32

Неупругие взаимодействия солитонов в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика

В. А. Делев[1)]

Институт физики молекул и кристаллов – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450075 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 29 октября 2020 г.
После переработки 14 ноября 2020 г.
Принята к публикации 19 ноября 2020 г.

Впервые исследуются неупругие взаимодействия солитонов в линейном дефекте, возникающем в одномерной электроконвективной структуре закрученного на $\pi/2$ нематического жидкого кристалла. Линейные дефекты в закрученных нематиках характеризуются достаточно протяженным полем деформации и ориентируются нормально доменам Вильямса. Гидродинамические потоки в них, наряду с тангенциальной компонентой скорости, имеют и аксиальную составляющую, направление которой противоположно в соседних доменах. При увеличении приложенного напряжения условие неразрывности потока анизотропной жидкости в закрученных нематиках не позволяет линейному дефекту распадаться на отдельные дислокации в отличие от случая планарной ориентации, что приводит к возникновению доменных зиг-заг осцилляций в ядре дефекта. При этом границами зиг и заг областей являются дислокации с топологическими зарядами $S = \pm1$. Установлено, что при периодическом взаимодействии дислокаций (кинков) с противоположными топологическими зарядами $S = \pm1$ образуется бризер. Обнаружено, что столкновение кинка и бризера в линейном дефекте является неупругим, так как приводит к распаду последнего на кинк-антикинковую пару. Показано, что такого рода взаимодействия дислокаций с топологическими зарядами $S = \pm1$ качественно хорошо описываются возмущенным уравнением синус-Гордона.

DOI: 10.31857/S1234567821010043

1. Образование и разрушение надмолекулярного порядка в неравновесных системах, как правило, сопровождается появлением дефектов [1]. Поэтому изучение роли дефектов при структурообразовании и возникновении турбулентности является одной из важных задач физики конденсированного состояния. С другой стороны, возможность управления не только количеством дефектов, но и их взаимодействием при изменении внешнего воздействия, позволяет использовать экспериментальные данные для верификации, например, (1+1)-мерных моделей. В этом отношении дефекты, возникающие в электроконвективных структурах нематических жидких кристаллов (НЖК), являются уникальными объектами для экспериментального изучения их динамических характеристик. Важную роль при этом играет исходная ориентация поля директора **n**, характеризующего преимущественное направление молекул в пространстве, так как именно она задает симметрию электроконвективных структур и их дефектов [2–4]. Таким образом, динамика дефектов в электроконвективных структурах существенным образом зависит не только от амплитуды приложенного напряжения, но и от исходной конфигурации поля директора **n**.

Изучению дефектов в жидких кристаллах как на микроскопическом (молекулярном), так и на макроскопическом (период структуры) масштабе посвящен ряд работ [5–15]. Результаты этих работ свидетельствуют о важной роли дефектов при усложнении пространственно-временной динамики электроконвективных структур с увеличением приложенного напряжения. В частности, установлено, что наиболее общими механизмами при формировании двумерных структур являются процессы рождения и аннигиляции дислокаций.

Типичными элементарными дефектами электроконвективных структур в НЖК являются дислокации с топологическими зарядами $S = \pm1$. Дефект с топологическим зарядом $S = \pm1$ соответствует скачку фазы на $\pm2\pi$ в структуре доменов Вильямса, т.е. его сингулярность определяется лишним (или недостающим) пространственным периодом при обходе замкнутого контура вокруг его ядра [12]. Поведение

[1)]e-mail: delev@anrb.ru

дислокаций в приближении слабой надкритичности хорошо описывается уравнением Гинзбурга–Ландау [10–12].

Другой подход при описании динамики дислокаций в жидких кристаллах [16, 17] основан на глубокой аналогии свойств и поведения дефектов с моделью Френкеля–Конторовой [18, 19]. Если в стандартной модели пренебречь эффектами дискретности, то получится хорошо известное уравнение синус-Гордона (УСГ).

В работе [12] показано, что при определенной скорости увеличения приложенного напряжения в планарных слоях НЖК дислокации могут быть источниками образования в пространстве новых локализованных квазистационарных состояний с более низкой симметрией. Как правило, такие состояния зарождаются вблизи ядра дислокации и распространяются вдоль линии, нормальной к доменам Вильямса. При этом возникающий линейный дефект имеет такой же топологический заряд, что и исходная дислокация. Кроме того, локализованное протяженное состояние может возникать спонтанно, в результате развития модуляционной неустойчивости, как простой сдвиг доменов на половину пространственного периода π. Такое искажение доменной структуры получило название линии скачка фазы [12].

При быстром увеличении приложенного напряжения в электроконвективных структурах НЖК с исходной планарной ориентацией указанные типы линейных образований не устойчивы и распадаются на отдельные дислокации. При этом линейные дефекты распадаются на нечетное число (не менее трех) дислокаций, а линии скачка фазы – на четное число (не менее двух) дислокаций с противоположными топологическими зарядами $S = \pm 1$. В обоих случаях суммарный топологический заряд сохраняется [12].

Подобные линейные локализованные образования наблюдаются и в электроконвективных структурах, закрученных на $\pi/2$ НЖК (рис. 1) [20–22]. Однако из-за особенностей гидродинамических течений в доменах закрученных НЖК линейные локализованные образования в них являются достаточно устойчивыми [21]. При определенных условиях такие линейные образования могут располагаться достаточно регулярно. Тогда суперпозиция доменов Вильямса и нормальных к ним линейных образований приводит к формированию квазистационарной двумерной структуры, называемой решеткой дефектов [20, 21].

Гидродинамические потоки в доменах закрученного нематика, наряду с тангенциальной компонен-

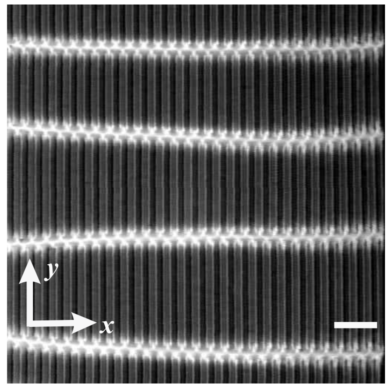

Рис. 1. Линейные локализованные стационарные образования в закрученном нематике при $U = 5.6$ В и $f = 30$ Гц. Масштаб 100 мкм

той скорости v_τ, имеют и аксиальную составляющую v_a, направление которой противоположно в соседних доменах. Непрерывность гидродинамического потока обеспечивается его замыканием как через ядро линейного дефекта, так и замыканием с потоком в соседнем домене (т.е. направление потока изменяется на 180°). Это условие, по-видимому, и отвечает за устойчивость линейных дефектов в закрученных НЖК при увеличении приложенного напряжения. В данном случае линейные дефекты не распадаются на отдельные дислокации, а начинают осциллировать. При этом домены Вильямса остаются стационарными до определенной величины приложенного напряжения.

В зависимости от длины и типа локализованных образований в закрученных НЖК наблюдается различная динамика дислокаций, которая качественно хорошо описывается в рамках модели синус-Гордона. В частности, в линии скачка фазы длиной $L = 8\lambda$ (λ – поперечный размер домена) наблюдается периодическое рождение и аннигиляция двух дислокаций с топологическими зарядами $S = \pm 1$, динамика которых описывается решением УСГ в виде локализованного бризера [23]. В другом случае, когда длина линейного дефекта составляет $L = 14\lambda$, после возникновения в нем осцилляций, генерация пары дислокаций наблюдается на одном краю дефекта, а их аннигиляция на другом [24]. В работе [25] было показано, что в достаточно протяженном дефекте $L \sim 60\lambda$ столкновение дислокаций при определенных условиях можно рассматривать как кинк-антикинк взаимодействие УСГ, при этом динамика ансамбля дислокаций за один осцилляционный период качественно хорошо описывается мультикинковым решением УСГ [26].

В данной работе исследуется динамика неупругих взаимодействий дислокаций (кинков) за несколько осцилляционных периодов линейного дефекта ($T = 15$) (здесь $T = 1.2$ с – осцилляционный период линейного дефекта).

Неупругие взаимодействия солитонов возникают, в частности, при наличии диссипативных возмущений. Столкновения солитонов в слабо возмущенном УСГ вначале были изучены теоретически Кившарем и Маломедом [27]. Неупругие столкновения кинка и бризера наблюдаются также в цепочке Френкеля–Конторовой из-за эффекта дискретности системы [28]. В случае двухсолитонных столкновений дискретность приводит к распаду бризера на кинк-антикинковую пару в результате его столкновения с другим кинком или бризером, а также к слиянию кинк-антикинковой пары в бризер.

Более интересные эффекты возможны для многосолитонных столкновений. Многочастичные эффекты столкновения солитонов становятся возможными при условии, что во взаимодействии принимают участие по крайней мере три солитона, и их столкновение происходит почти в одной точке. Для случая трех кинков вероятность этого события очень мала. Однако, если один из сталкивающихся солитонов является бризером, который состоит из двух связанных кинков, неупругое столкновение с кинком или другим бризером становится вполне возможным [19].

В данной работе экспериментально обнаружено, что взаимодействие кинка и бризера в линейном дефекте ($L \sim 60\lambda$) приводит к распаду последнего на кинк-антикинковую пару, что свидетельствует об их неупругом столкновении. При этом динамика дислокаций демонстрирует нетривиальное перемежаемое поведение. При столкновении дислокаций с противоположными топологическими зарядами образуется бризер, время жизни которого составляет $t \simeq 13T$. Столкновения же бризера с другими дислокациями (кинками) приводят к его распаду на кинк-антикинковую пару, затем вновь образуется бризер и т.д.

Таким образом, установлено, что в линейном дефекте, возникающем в электроконвективной структуре закрученного НЖК, наблюдаются неупругие взаимодействия солитонов. Показано, что их динамика качественно хорошо описывается возмущенным УСГ.

2. В качестве НЖК использовался 4-n-метоксибензилиден-n-бутиланилин (МББА), который помещался в ЖК-ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из SnO_2. Поверхность подложек с электродами покрывалась слоем ориентанта полиимида AL1254 (JSR Corp. Japan), который затем натирался в одном направлении для создания однородной планарной ориентации директора $\mathbf{n}$. Толщина ЖК-ячейки размером 16×12 мм задавалась майларовыми прокладками $d \simeq 20$ мкм. После ее заполнения нематиком и формирования однородной планарной ориентации верхняя подложка медленно поворачивалась относительно нижней по часовой стрелке на угол $\pi/2$, так, что во всем слое НЖК возникала однородно закрученная ориентация директора $\mathbf{n}$. К ЖК-слою прикладывалось переменное напряжение U с частотой $f_U = 30$ Гц. Пороговое напряжение возникновения доменов Вильямса составляло $U_c = 5.6$ В. При этом их ось ориентирована перпендикулярно директору $\mathbf{n}$ в середине слоя НЖК и составляет углы $-45°$ и $45°$ соответственно с ориентацией директора на верхней и нижней подложках. Направления гидродинамических потоков в доменах определялись путем анализа движений пробных частиц диаметром $2 \div 3$ мкм, добавленных в НЖК. Доменные структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп Axiolab (Zeiss, Germany), а их изображения регистрировались видеокамерой VX44 (PCO Inc., Germany) с разрешением 720×576 пикселей и оцифровывались внешней платой Pinnacle 700-USB (USA).

3. Динамика дислокаций исследовалась с использованием техники амплитудной демодуляции исходных изображений полученных видеорядов [29].

Изображение электроконвективной структуры в НЖК представляет собой пространственно периодические модуляции интенсивности прошедшего через ячейку с НЖК света. Эти модуляции соответствуют локальным изменениям оптической анизотропии $\langle \Delta n(t) \rangle$ под действием внешнего электрического поля. В пороге электроконвекции в слое НЖК возбуждаются гидродинамические вихревые движения в виде валов (или роллов). Вихревое движение ориентирует НЖК особенно сильно в области максимального градиента скорости, т.е. в центре вихрей. В результате цилиндрические вихри играют роль линз, фокусирующих свет в светлые линии [30]. В итоге формируется изображение в виде темных и светлых полос – доменов Вильямса (рис. 1).

Таким образом, распределение интенсивности $I(x, y)$ в исходном изображении структуры имеет явно выраженную пространственную периодичность в плоскости $(x{-}y)$ ЖК-образца. Вертикальные полосы соответствуют стационарным доменам Вильямса, а протяженный линейный дефект представляется горизонтальной полосой, образованной скачком фазы на π (рис. 1).

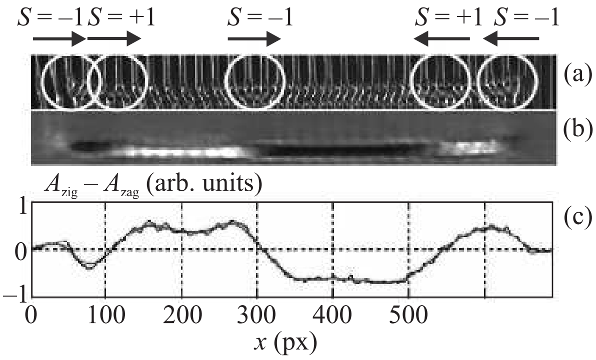

Рис. 2. (a) – Исходное изображение доменной структуры с линейным осциллирующим дефектом и движущимися в нем дислокациями с $S = \pm 1$ при $U = 7.6$ В и $f = 30$ Гц. (b) – Полутоновое изображение структуры без доменов. (c) – График разности амплитуд $A_{\rm zig}(x,t) - A_{\rm zag}(x,t)$

Рассмотрим применение метода амплитудной демодуляции к исходному изображению линейного осциллирующего дефекта (рис. 2). Выше порога устойчивости в ядре дефекта возникают зиг-заг осцилляции (рис. 2a). Границами между зиг и заг областями являются дислокации с топологическими зарядами $S = \pm 1$. Поскольку волновые векторы вертикальных и наклонных зиг и заг доменов явно различаются, то, используя двумерное преобразование Фурье, можно достаточно легко разделить их вклад в результирующее изображение структуры. Затем маской вырезается рефлекс зиг или заг моды и уже от него делается обратное преобразование Фурье. Это позволяет избавиться от исходного изображения периодической структуры доменов (рис. 2a) и получить пространственное распределение амплитуды этой периодичности (рис. 2b). Амплитуда характеризует размах интенсивности между темной и светлой полосами в изображении. Равенство нулю амплитуды указывает на отсутствие периодической структуры. В данном случае нас интересуют амплитуды наклонных зиг и заг доменов $A_{\rm zig}(x,y)$ и $A_{\rm zag}(x,y)$ в ядре линейного дефекта. Наиболее удобным для изучения динамики дислокаций оказалось использование графика разности амплитуд $A_{\rm zig}(x,t) - A_{\rm zag}(x,t)$ (рис. 2c), полученного после оцифровки и усреднения изображения на рис. 2b. Пересечение графика $A_{\rm zig}(x,t) - A_{\rm zag}(x,t)$ с нулевой горизонтальной осью соответствует локализации дислокаций.

4. Динамика дислокаций в линейном дефекте с суммарным топологическим зарядом $S = -1$ за время $t = 15T$, где $T = 1.2$ с – полный осцилляционный период линейного дефекта, представлена на рис. 3.

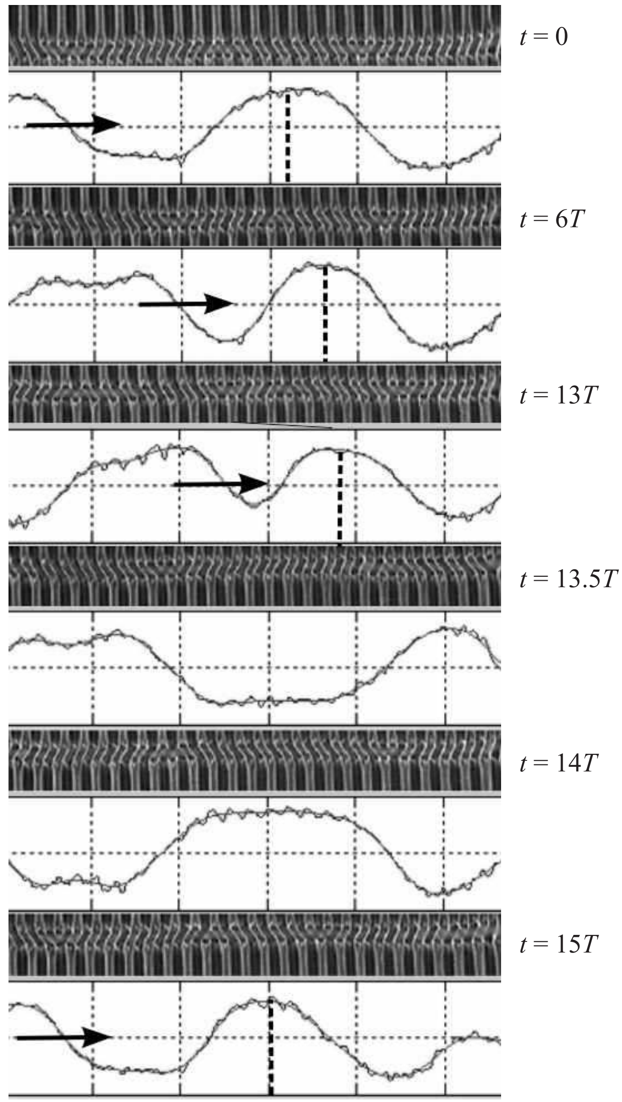

Рис. 3. Распад бризера на кинк-антикинковую пару при столкновении с дислокациями, движущимися слева, за время $t_{br} = 13T$, где $T = 1.2$ с – полный осцилляционный период линейного дефекта. Для каждого периода показаны исходное изображение и под ним график разности амплитуд $A_{\rm zig}(x,t) - A_{\rm zag}(x,t)$

Как было показано в работе [26], за один осцилляционный период аннигиляция дислокаций происходит два раза. При столкновении дислокаций с $S = -1$ и $S = +1$ образуется зиг-состояние, а взаимодействие дислокаций с $S = +1$ и $S = -1$ дает заг-состояние. В динамике такое периодическое столкновение дислокаций можно рассматривать как локализованный на яме бризер УСГ [31].

Покадровый анализ видеоряда продолжительностью $t = 15T$ показал, что время жизни бризера составляет $t_{br} = 13T$. При этом его центр смещается вправо примерно на 60 пикселей (рис. 3). Дислокации с зарядом $S = -1$ (антикинки), движущиеся слева, за каждый осцилляционный период линейного дефекта проходят расстояние на 4–5 пикселей больше, чем за предыдущий период. Это означает, что при приближении к точке взаимодействия скорость дислокаций увеличивается. После 13-го осцилляционного периода столкновение дислокации с бризером приводит к его распаду на пару дислокаций с $S = -1$ и $S = +1$. Затем вновь образуется бризер, при этом его центр скачком перемещается влево примерно в исходное положение. Этот эффект можно рассматривать как своеобразный "пиннинг" (захват) бризера потенциальной ямой. Более наглядно данный процесс изображен на рис. 4.

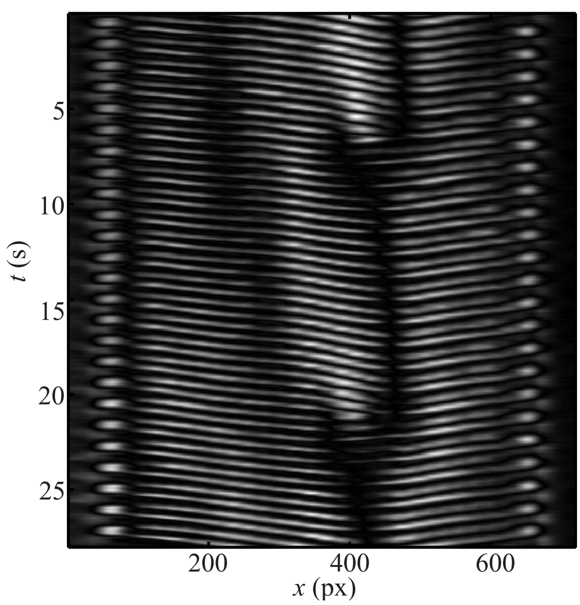

Рис. 4. Пространственно-временное распределение амплитуды колебаний $A(x,t) = A_{\mathrm{zig}}(x,t) - A_{\mathrm{zag}}(x,t)$

Таким образом, исследование эволюционной динамики дислокаций за время $t = 15T$ показало, что их взаимодействие носит нетривиальный характер, которое можно расценивать как неупругие. При столкновении дислокаций с противоположными топологическими зарядами образуется бризер, время жизни которого составляет $t = 13T$. При взаимодействии бризера с дислокациями (кинками) последний распадается на кинк-антикинковую пару, затем вновь образуется бризер.

5. Получение невозмущенного УСГ, описывающего когерентную зиг-заг динамику доменов в ядре бризерного дефекта, показано в работах [22, 23]. Поскольку размер элементарной ячейки электроконвективной структуры в закрученном на $\pi/2$ НЖК определяется как $T = 2\lambda$, что связано с антипараллельностью аксиальных компонент скорости потока в соседних доменах, то в качестве узла доменной решетки рассматривается центр "двойного домена" вдоль направления x. УСГ получается из гамильтониана модели Френкеля–Конторовой после перехода к континуальному приближению:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} + \sin\eta = 0, \tag{1}$$

где $\eta = \pi u/\lambda$ – нормированная функция смещения двойного домена от его равновесного положения вдоль направления x; $\xi = x/(2\lambda\sqrt{\tilde{k}})$ – нормированная координата, $\tilde{k} = (\lambda/\pi)^2(k'/V_0')$, k' – константа взаимодействия соседних доменов, V_0' – энергия, приходящаяся на единицу длины сдвоенного домена; $\tau = (\pi/\lambda)\sqrt{V_0'/m'}t$ – нормированное время, $m' = m/l$ – удельная масса двойного домена, l – длина двойного домена.

Для описания распада бризера на кинк-антикинковую пару при неупругом взаимодействии с кинком будем рассматривать УСГ, возмущенное диссипативным членом $-\gamma u_t$ [27, 32]:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = -\gamma u_t, \tag{2}$$

где γ – малый положительный параметр.

Решение невозмущенного уравнения (2) (т.е. с $\gamma = 0$), которое соответствует слабосвязанному бризеру, имеет вид [32]:

$$u_{br} = 4\tan^{-1}[\cos(\zeta t - \phi)/(\zeta\cosh x)], \tag{3}$$

где ϕ является начальной фазой внутренних колебаний бризера, малая величина ζ характеризует пару собственных значений спектрального параметра Λ, соответствующего бризеру [32]:

$$\Lambda_{1,2} = i/2 \pm \zeta/2. \tag{4}$$

Далее рассмотрим столкновение бризера с кинком, движущимся со скоростью V, $1 - V^2 \ll 1$. Тогда согласно [27, 32] в первом приближении по малому параметру $(1 - V^2)$ волновое поле можно представить в виде суммы обычного кинка и бризера:

$$u(x,\, t) \simeq u_k(x,\, t) + u_{br}(x,\, t), \tag{5}$$

$$u_k = 4\tan^{-1}\exp\sigma(x - Vt)/\sqrt{1 - V^2}, \tag{6}$$

где $\sigma = \pm1$ – топологический заряд кинка, а V – его скорость.

Как показано в [27, 32], под действием этого столкновения может произойти распад бризера на

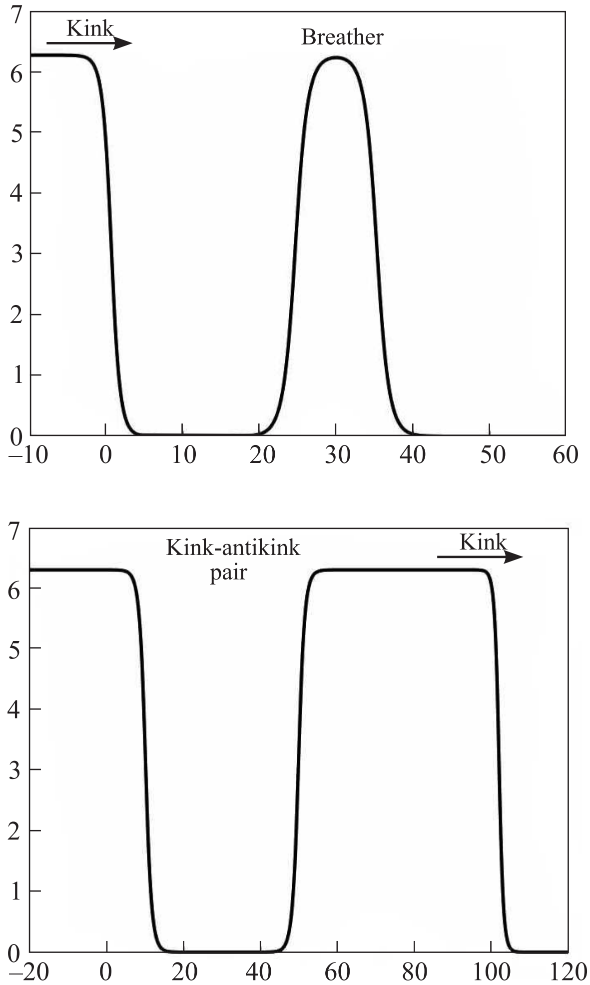

Рис. 5. Численная иллюстрация зависимости $u(x, t)$ от x, демонстрирующая распад бризера на кинк-антикинковую пару при столкновении с кинком, имеющим топологический заряд $\sigma = -1$ при наличии диссипативного возмущения $-\gamma u_t$

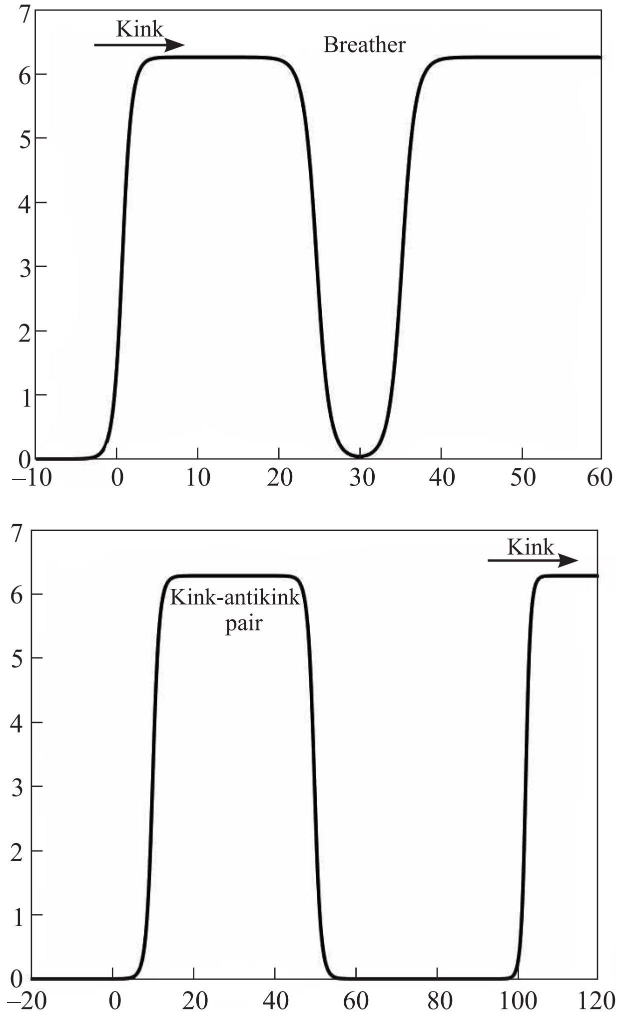

Рис. 6. Численная иллюстрация зависимости $u(x, t)$ от x, демонстрирующая распад бризера на кинк-антикинковую пару при столкновении с кинком, имеющим топологический заряд $\sigma = +1$ при наличии диссипативного возмущения $-\gamma u_t$

кинк-антикинковую пару при условии $\Delta(\zeta^2) < 0$. Пороговая величина ζ, т.е. максимальное значение, при котором процесс распада бризера становится возможным, соответствует $\zeta_{thr} = \sqrt{2\pi\gamma F(T_0)}$, где $F(T_0) = \int_0^\infty \cosh t/[\cosh^2 t + (T_0 + t)^2]dt$. В частности, $F(0) \approx 1.35$.

Если $\zeta < \zeta_{thr}$, то при столкновении бризер распадается на кинк-антикинковую пару. Решение, которое описывает кинк-антикинковую пару с малой относительной скоростью W, имеет вид [27]:

$$u = 4\tan^{-1}(W^{-1}(\delta \exp(-1/2Wt) - \delta^{-1}\exp(1/2Wt))/\cosh x), \quad (7)$$

где δ – некоторая константа.

Численная иллюстрация распада бризера на кинк-антикинковую пару показана на рис. 5 и на рис. 6.

Необходимо отметить, что случай, изображенный на рис. 6, когда кинк с топологическим зарядом $\sigma = +1$ сталкивается с бризером, соответствует экспериментальной реализации линейного дефекта с суммарным топологическим зарядом $S = +1$.

Сравнение теоретических зависимостей на рис. 5 с экспериментальными кривыми на рис. 3 при $t = 0$ и $t = 14T$ показывает хорошую качественную корреляцию полученных результатов. В численных расчетах использовалось экспериментально полученное значение безразмерной скорости движения дислокаций $V \approx 0.99$ (отношение абсолютной скорости движения дислокаций в начале осцилляционного периода линейного дефекта к максимальной скорости их движения в конце осцилляционного периода).

Заметим, что простейшим неупругим взаимодействием, вызванным возмущением, является также слияние свободного кинка и антикинка в бризер [33]. Экспериментально это соответствует столкновению двух дислокаций с противоположными топологическими зарядами, что также продемонстрировано в данной работе. Основной характеристикой этого процесса служит максимальная (пороговая) величина относительной скорости столкновения кинков, при которой возможно их слияние [27].

6. Таким образом, в данной работе исследованы неупругие солитонные взаимодействия в линейном дефекте электроконвективной структуры закрученного на $\pi/2$ НЖК. Установлено, что столкновение кинка и бризера при определенных условиях приводит к распаду бризера на кинк-антикинковую пару, что свидетельствует о неупругом взаимодействии. Показано, что динамика неупругих взаимодействий солитонов в линейном дефекте качественно хорошо описывается УСГ, возмущенным диссипативным членом.

В экспериментальных исследованиях использовалось оборудование Центра коллективного пользования “Спектр” ИФМК УФИЦ РАН и Регионального центра коллективного пользования “Агидель”.

Работа выполнена в рамках госзадания # АААА-А19-119022290052-9.

Автор благодарит Э. С. Батыршина за техническую помощь в работе.

1. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
2. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах*, Наука, М. (1981).
3. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon, Oxford (1994).
4. *Pattern Formation in Liquid Crystals*, ed. by A. Buka and L. Kramer, Springer-Verlag, N.Y. (1996).
5. M. Kleman, *Points, Lines and Walls in Liquid Crystals, Magnetic Systems and Various Ordered Media*, John Wiley & Sons, Chichester (1983).
6. A. Joets and R. Ribotta, J. Phys. (Paris) **47**, 595 (1986).
7. M.B. Курик, О.Д. Лаврентович, УФН **154**, 381 (1988).
8. S. Kai, N. Chizumi, and M. Kohno, J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 3541 (1989).
9. S. Nasuno, S. Takeuchi, and Y. Sawada, Phys. Rev. A **40**, 3457 (1989).
10. S. Rasenat, V. Steinberg, and I. Rehberg, Phys. Rev. A **42**, 5998 (1990).
11. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, J. Stat. Phys. **64**, 1007 (1991).
12. A. Joets and R. Ribotta, J. Stat. Phys. **64**, 981 (1991).
13. *Defects in Liquid Crystals: Computer Simulations, Theory and Experiments*, ed. by O. D. Lavrentovich, P. Pasini, C. Zannoni, and S. Zumer, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands (2001).
14. П. В. Долганов, В. М. Жилин, В. К. Долганов, Е. И. Кац, Письма в ЖЭТФ **89**, 181 (2009).
15. О. А. Скалдин, Ю. И. Тимиров, Письма в ЖЭТФ **90**, 699 (2009).
16. M. Lowe and J. P. Gollub, Phys. Rev. A. **31**, 3893 (1985).
17. *Solitons in Liquid Crystals*, ed. by L. Lam and J. Prost, Springer Science & Business Media, N.Y. (1992).
18. Т. А. Конторова, Я. И. Френкель, ЖЭТФ **8**(89), 1340 (1938).
19. O. M. Braun and Yu. S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications*, Springer, Berlin (2004).
20. V. A. Delev, P. Toth, and A. P. Krekhov, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **351**, 179 (2000).
21. S. Tatsumi, M. Sano, and A. G. Rossberg, Phys. Rev. E **73**, 011704 (2006).
22. А. Н. Чувыров, О. А. Скалдин, В. А. Делев, Ю. А. Лебедев, Э. С. Батыршин, ЖЭТФ **130**, 1072 (2006).
23. О. А. Скалдин, В. А. Делев, Е. С. Шиховцева, Э. С. Батыршин, Ю. А. Лебедев, Письма в ЖЭТФ **93**, 431 (2011).
24. О. А. Скалдин, В. А. Делев, Е. С. Шиховцева, Ю. А. Лебедев, Э. С. Батыршин, Письма в ЖЭТФ **100**, 181 (2014).
25. В. А. Делев, О. А. Скалдин, Э. С. Батыршин, В. Н. Назаров, Е. Г. Екомасов, Письма в ЖЭТФ **109**, 84 (2019).
26. В. А. Делев, В. Н. Назаров, О. А. Скалдин, Э. С. Батыршин, Е. Г. Екомасов, Письма в ЖЭТФ **110**, 607 (2019).
27. Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).
28. S. V. Dmitriev, T. Shigenari, A. A. Vasiliev, and A. E. Miroshnichenko, Phys. Lett. A **246**, 129 (1998).
29. M. Dennin, D. S. Cannell, and G. Ahlers, Phys. Rev. E **57**, 638 (1998).
30. Л. М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*, Наука, М. (1978).
31. *The Sine-Gordon Model and Its Applications. From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics*, ed. by J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, and F. Williams, Springer, Heidelberg, N.Y., Dordrecht, London (2014).
32. B. A. Malomed, Physica D **15**, 385 (1985).
33. D. J. Kaup and A. C. Newell, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **361**, 413 (1978).