Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 1, с. 52 – 57 © 2021 г. 10 января

Туннельные механизмы релаксации системы ян-теллеровских комплексов в кристалле CaF_2:Cr^{2+}

М. Н. Сарычев[a], А. С. Бондаревская[a], И. В. Жевстовских[a,b], В. А. Уланов[c,d], Г. С. Шакуров[d], А. В. Егранов[e,f], В. Т. Суриков[g], Н. С. Аверкиев[h], В. В. Гудков[a,i,1)]

[a] *Физико-технологический институт, Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, 620002 Екатеринбург, Россия*

[b] *Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения РАН, 620137 Екатеринбург, Россия*

[c] *Казанский государственный энергетический университет, 420066 Казань, Россия*

[d] *Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского ФИЦ Казанский научный центр РАН, 420029 Казань, Россия*

[e] *Институт геохимии им. А. П. Виноградова Сибирского отделения РАН, 664033 Иркутск, Россия*

[f] *Иркутский государственный университет, 664003 Иркутск, Россия*

[g] *Институт химии твердого тела Уральского отделения РАН, 620990 Екатеринбург, Россия*

[h] *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 С. Петербург, Россия*

[i] *Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск, Россия*

Поступила в редакцию 29 октября 2020 г.
После переработки 20 ноября 2020 г.
Принята к публикации 21 ноября 2020 г.

В работе представлены результаты исследований температурных зависимостей поглощения и скорости ультразвуковых волн на частотах 26–158 МГц в кристалле флюорита CaF_2 с замещением ионов кальция ян-теллеровскими центрами Cr^{2+}. В области низких температур обнаружена аномально большая скорость релаксации в системе ян-теллеровских комплексов, на два порядка превосходящая скорость релаксации в других ранее исследованных флюоритах CaF_2:Ni^{2+} и SrF_2:Cr^{2+}. Установлено, что глобальные минимумы адиабатического потенциала комплексов $Cr^{2+}F_8^-$ в кристалле CaF_2:Cr^{2+} также имеют орторомбическую симметрию, но разделены существенно более низкими потенциальными барьерами, чем в кристаллах CaF_2:Ni^{2+} и SrF_2:Cr^{2+}. Обнаружено, что в CaF_2:Cr^{2+}в области температур, где проявляется эффект Яна–Теллера в ультразвуковом эксперименте, доминирующими являются туннельные механизмы релаксации (прямые переходы и двухфононные), а не термическая активация. Определены параметры, характеризующие эти механизмы релаксации.

DOI: 10.31857/S1234567821010079

Эффект Яна–Теллера (ЭЯТ) [1] оказывает существенное влияние на структуру и физические свойства полиатомных систем. Его рассматривают (или находят аналогии при описании) в ходе исследований мультиферроиков [2–4], фуллеренов [5, 6], магнетиков [7], сверхпроводников [8], перовскитов [9, 10], двухслойных графенов [11] и других систем [12, 13]. В твердых телах ЭЯТ может проявляться в двух вариантах: в виде кооперативного эффекта, где ян-теллеровские (ЯТ) центры встроены в кристаллическую решетку, или наблюдаться в системе невзаимодействующих между собой ЯТ комплексов, образованных вакансиями или примесями малой концентрации. В последнем случае чаще всего изучаются кристаллы с замещением катионов $3d$ ионами. Исследование легированных кристаллов в основном ведутся оптическими или магниторезонансными методами [14–19]. С одной стороны, это обусловлено их практическим применением в оптоэлектронике и спинтронике, а с другой стороны – наличием производимых известными фирмами экспериментальных комплексов для таких исследований. Ультразвуковые исследования в диапазоне частот порядка 10^8 Гц и выше выполняются на единичных оригинальных установках, в связи с чем таких работ значительно меньше. В то же время они позволяют получать информацию об исследуемых объектах, недоступную другими методами. В последнее время были разработаны

1)e-mail: v.v.gudkov@urfu.ru

методы, которые позволяют на основе данных ультразвуковых экспериментов определять симметрийные свойства экстремумов нижнего листа адиабатического потенциала (АП) ЯТ комплексов, константы вибронной связи (линейные и квадратичные), положения экстремумов в системе симметрийных координат, а также исследовать динамические свойства ЯТ комплексов: времена релаксации и определяющие их механизмы релаксации в кубических [20, 21] и гексагональных кристаллах [22].

Одним из наиболее изучаемых $3d$ ионов является Cr^{2+}. В тетраэдрическом и кубическом окружении он обладает орбитальным термом $^5T_2(t_2{}^2e^2)$ (см. табл. 1 в [14]). Из данных по ЭПР глобальные минимумы АП центров Cr^{2+} в тетраэдрическом окружении имеют тетрагональную симметрию [23–26], а в кубическом окружении – орторомбическую или тетрагональную [17, 18, 27–31].

ЯТ центры Cr^{2+} с помощью ультразвукового метода изучались в матрицах ZnSe [32], CdSe [22] и SrF_2 [33, 34]. В этих кристаллах были определены параметры АП, значения констант вибронной связи, построены температурные зависимости времени релаксации. Кроме того, было установлено, что в области аномалий поглощения и скорости ультразвука, связанных с проявлением ЭЯТ, доминирующим механизмом релаксации является термическая активация. Также было показано, что при низких температурах включаются туннельные механизмы (прямые переходы и двухфононные), однако надежных количественных данных, характеризующих эти механизмы, получить не удавалось из-за их малого вклада вдали от ЯТ аномалий, т.е. в области $\omega\tau \gg 1$ (ω – круговая частота ультразвуковой волны, τ – время релаксации системы ЯТ комплексов).

Ввиду того, что процессы релаксации комплекса $Cr^{2+}F_8^-$ в матрице CaF_2 еще не были изучены, мы провели измерения температурных зависимостей коэффициента поглощения и фазовой скорости всех нормальных мод, распространяющихся в направлении [110], в кристалле CaF_2:Cr^{2+} с концентрацией примеси хрома $n = 4.74 \cdot 10^{-19}$ см$^{-3}$ на частотах 26–158 МГц.

Результаты измерений оказались неожиданными: аномалии, связанные с ЭЯТ в этом кристалле, проявились при значительно более низких температурах, чем в других исследованных флюоритах: SrF_2:Cr^{2+} [34] и CaF_2:Ni^{2+} [21]. Таким образом, появилась *уникальная возможность количественного изучения туннельных механизмов релаксации.* Правда, возникли и новые трудности: использованная ранее методика [20] построения температурной зависимости времени релаксации $\tau(T)$ оказалась неприменимой в силу неопределенности низкотемпературного предела поглощения и скорости ультразвука (из рис. 1 видно, что невозможно опреде-

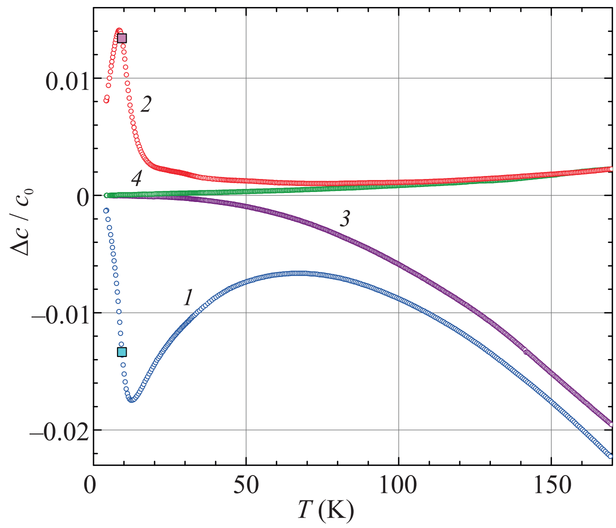

Рис. 1. (Цветной онлайн) Температурные зависимости действительной (кривые *1* и *3*) и мнимой (*2* и *4*) составляющих модуля упругости $c_L = (c_{11}+c_{12}+2c_{44})/2$, измеренные на частоте $\omega/2\pi = 54$ МГц. Кривые *1* и *2* относятся к легированному кристаллу CaF_2:Cr^{2+}, а *3* и *4* – к номинально чистому CaF_2. $\Delta c = c(T) - c_0$, $c_0 = c(T \to 0)$. Квадратные символы соответствуют значениям модуля при температуре $T = T_1$, при которой $\omega\tau = 1$

лить, к каким значениям придут кривые *1* и *2* при $T \to 0$). Эти значения необходимы для выделения релаксационных вкладов, с помощью которых рассчитывается температурная зависимость времени релаксации. В связи с этим был разработан новый подход к постановке ультразвукового эксперимента и обработке данных при изучении ЭЯТ, на основе которых было впервые проведено исследование туннельных механизмов релаксации ЯТ комплексов на примере кристалла флюорита CaF_2:Cr^{2+}.

Наше рассмотрение предполагает описание пространственной и временной зависимостей осциллирующих величин как $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$, при этом комплексный волновой вектор определен как $\mathbf{k} = (\omega/v - i\alpha)\mathbf{e}_k$. Дальнейшее обсуждение удобнее вести на языке динамических (зависящих от частоты) комплексных модулей упругости c, изменения которых связаны с изменениями фазовой скорости v и коэффициента поглощения α нормальных мод следующим образом [20]:

$$\frac{\Delta c}{c_0} = 2\left(\frac{\Delta v}{v_0} + i\frac{\Delta\alpha}{k_0}\right), \quad (1)$$

где $k_0 = \omega/v_0$, $v_0 = v(T_0)$, $\Delta v = v(T) - v_0$, $\Delta c = c(T) - c_0$, $c_0 = c(T_0)$, $\Delta\alpha = \alpha(T) - \alpha_0$, $\alpha_0 = \alpha(T_0)$, T_0 – некоторое фиксированное значение температуры. Вклад релаксационной природы в динамический модуль упругости, в нашем случае это ЯТ вклад Δc_{JT}, описывается с помощью изотермического модуля c^T_{JT} и фактора временной дисперсии $\omega\tau$:

$$\frac{\Delta c_{JT}}{c_0} = \frac{c^T_{JT}}{c_0}\left[\frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau^2)}\right]. \quad (2)$$

Нами были исследованы тетрагональный модуль упругости $c_E = (c_{11} - c_{12})/2$, тригональный $c_T = c_{44}$ и продольный $c_L = (c_{11} + c_{12} + 2c_{44})/2$. Эти модули в вышеприведенных формулах связаны с модами, распространяющимися вдоль кристаллографической оси [110]: поперечными, поляризованными вдоль осей [−110] и [001], и продольной, соответственно. Вклад ЯТ подсистемы в модули упругости проявляется в виде пика в мнимой части и минимума в действительной части в области температур $T \approx T_1$ (T_1 удовлетворяет условию $\omega\tau(T_1) = 1$). Отметим, что изотермические модули обратно пропорциональны температуре (см., например, [14]), поэтому положение пика релаксационного поглощения, строго говоря, не совпадает с T_1, но значение T_1 можно определить по максимуму функции $f(T) = \mathrm{Im}[\Delta c_{JT}(T)]\cdot T/c_0$ или нулю ее производной df/dT. С учетом этого выражение (2) можно представить в виде:

$$\frac{\Delta c_{JT}}{c_0} = 2\frac{\mathrm{Re}[\Delta c_{JT}(T_1)]}{c_0}\cdot\frac{T_1}{T}\cdot\frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} + i\cdot 2\frac{\mathrm{Im}[\Delta c_{JT}(T_1)]}{c_0}\cdot\frac{T_1}{T}\cdot\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (3)$$

Для выделения ЯТ (релаксационного) вклада в мнимую часть модуля упругости в предыдущих работах (см., например, [21]) предполагалось, что фоновый модуль (вклад от остальных механизмов, кроме ЭЯТ) можно представить в виде монотонной функции, совпадающей с измеренной при высоких ($T \gg T_1$) и низких ($T \ll T_1$) температурах. Очевидно, что такой подход может быть применен, если пик релаксационного поглощения хорошо разрешен. Но оказалось, что в кристалле CaF_2:Cr^{2+} низкотемпературный предел не был достигнут, и релаксационный пик поглощения не был полностью измерен при $T \ll T_1$. На рисунке 1 приведены температурные зависимости относительных изменений действительной и мнимой составляющих модуля c_L, полученные на частоте 54 МГц (кривые *1* и *2*). Качественно похожие зависимости получены для всех исследованных модулей. Выделение релаксационного вклада потребовало измерения действительной и мнимой составляющих модулей на номинально чистом кристалле CaF_2 (см. кривые *3* и *4* на рис. 1). Определение релаксационного вклада в мнимую составляющую модуля было выполнено в предположении, что при высоких температурах (в нашем случае выше 170 К) этот вклад стремится к нулю в силу малости $\omega\tau$ и пропорциональности изотермического модуля величине $1/T$, а вклад в действительную часть модуля получен из условия $\mathrm{Re}\,\Delta c_{JT}(T_1) = -\mathrm{Im}\,c_{JT}(T_1)$. Построение температурной зависимости времени релаксации с помощью выражения [20]

$$\tau = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{Im}\,\Delta c_{JT}(T_1)\cdot T_1}{\mathrm{Im}\,\Delta c_{JT}(T)\cdot T} \pm \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\left[\frac{\mathrm{Im}\,\Delta c_{JT}(T_1)\cdot T_1}{\mathrm{Im}\,\Delta c_{JT}(T)\cdot T}\right]^2 - 1} \quad (4)$$

показало, что кривые $\tau(T)$, определенные по формуле (4), в области температур ниже 10 К, полученные на разных модулях и разных частотах совпадали, как и должно быть, и не совпадали при более высоких температурах (рис. 2, кривые *1* и *2*). Более того, они оказались немонотонными функциями.

Существенное различие времен релаксации при температурах выше 10 К для частот 54 и 158 МГц (кривые *1* и *2* на рис. 2) может быть связано с наличием других подсистем, испытывающих релаксацию. Из рисунка 1 видно, что на зависимости мнимой части упругого модуля в кристалле CaF_2:Cr^{2+} (кривая *2*) в области температур около 20 К имеется “плечо”, обусловленное, по-видимому, еще одним или более релаксационными вкладами, в то время как выражение (4) получено в предположении наличия лишь одной релаксирующей подсистемы. Анализ состава исследуемого кристалла с помощью ELAN 9000 ICP-MS (Perkin-Elmer SCIEX) показал, что имеется только одна примесь, сопоставимая по концентрации с хромом, а именно, примесь железа (его концентрация оказалась $3.45 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$). Но изовалентное замещение кальция железом привело бы к $E \otimes e$ задаче ЭЯТ, т.е. тетрагональным искажениям комплекса, и как следствие, к отсутствию аномалий в тригональном модуле c_{44}. В наших экспериментах ЯТ аномалии наблюдаются во всех модулях. Таким образом, глобальные минимумы АП имеют орторомбическую

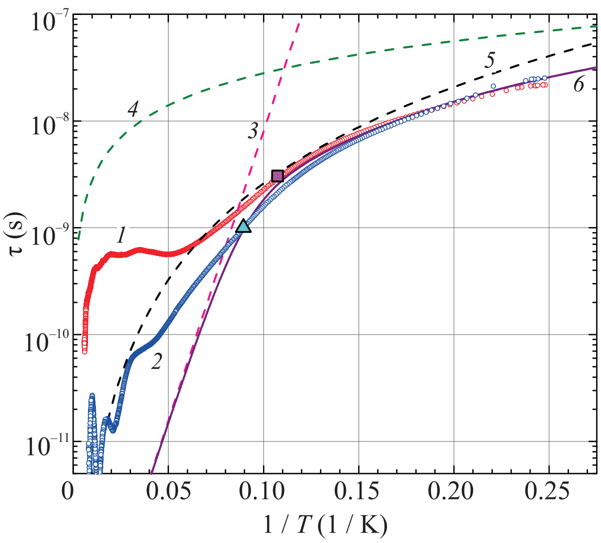

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость времени релаксации от обратной температуры. Кривые *1* и *2* рассчитаны по формуле (4) на основе экспериментальных данных о мнимых составляющих модуля упругости $c_L = (c_{11} + c_{12} + 2c_{44})/2$. Кривая *1* относится к частоте 54 МГц, а кривая *2* – к 158 МГц. Кривая *3* – время релаксации, рассчитанное по формуле $\tau_a = 0.3\cdot 10^{-13}\exp(125/T)$, кривая *4* – $\tau_t = 2.8\cdot 10^{-7}T^{-1}$, кривая *5* – $\tau_R = 2.6\times 10^{-6}T^{-3}$, кривая *6* – $\tau = (\tau_a^{-1} + \tau_t^{-1} + \tau_R^{-1})^{-1}$. Квадратный символ соответствует $\tau(T_1^{-1})$ для частоты 54 МГц, треугольный – для 158 МГц

симметрию, что возможно лишь в случае T терма. Возможно, наличие "плеча" на кривой *2* рис. 1 связано с присутствием ионов Cr^{3+} или вакансий, обладающих трехкратно вырожденными орбитальными состояниями, которые могут приводить к аномалиям в упругих модулях, обусловленным проявлением ЭЯТ. Поэтому требовалось определить истинную температурную зависимость времени релаксации системы ЯТ комплексов $Cr^{2+}F_8^-$ в матрице CaF_2.

С этой целью нами была промоделирована температурная зависимость времени релаксации с учетом трех механизмов: термической активации $\tau_a = \tau_0\cdot\exp(V_0/T)$, прямых $\tau_t = (BT)^{-1}$ и двухфононных $\tau_R = (B\Theta^2)^{-1}T^{-3}$ туннельных переходов. Рассмотрение этих механизмов было предложено Стурджем в первых работах по ультразвуковым исследованиям ЭЯТ [14]. Критерием правильности подбора параметров, входящих в выражения для разных механизмов времени релаксации, служило совпадение модельных, рассчитанных с использованием выражения (3), и экспериментальных температурных зависимостей действительных и мнимых составляющих всех измеренных модулей упругости в области температур ниже 10 K для всех измеренных частот: c_L (26, 54 и 158 МГц), c_{44} (39 МГц) и c_E (55 МГц). Таким образом, описание $\tau(T)$ должно быть не только качественным, но и количественно единым для всех 10 измеренных кривых. Пример модельных кривых для модуля c_L, полученных на частоте 54 МГц, приведен на рис. 3 (кривые *3* и *4*). В процессе модели-

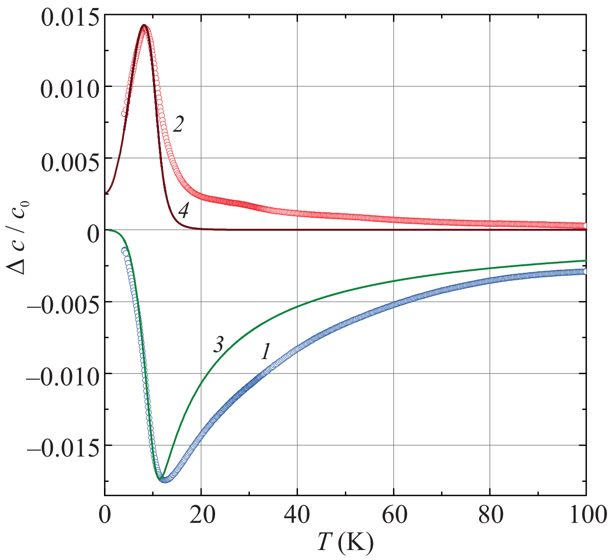

Рис. 3. (Цветной онлайн) Температурные зависимости релаксационного ЯТ вклада в действительную (1) и мнимую (2) составляющие модуля упругости $c_L = (c_{11} + c_{12} + 2c_{44})/2$, измеренные на частоте $\omega/2\pi = 54$ МГц. Кривые *3* и *4* представляют модельные зависимости, рассчитанные по формуле (3) с временем релаксации, показанным кривой *6* на рис. 2

рования активационный механизм всегда описывался временем релаксации $\tau_a = 3\cdot 10^{-14}\exp(125/T)$, а остальные параметры лежали в интервалах $B^{-1} = (2.9–3.3)\cdot 10^{-7}$ с K и $(B\Theta^2)^{-1} = (2.4–2.6)\cdot 10^{-6}$ с K^3. Погрешность определения параметров туннельных механизмов релаксации не превышала 10 %, что, безусловно, является хорошим результатом. Особенно, если иметь в виду, что в предыдущих исследованиях туннельные механизмы релаксации формировали лишь низкотемпературные крылья аномалий и их параметры не могли быть установлены с хорошей точностью в силу малости вклада в модули упругости. Оценка $V_0 = 125$ K обусловлена следующим: меньшее значение энергии активации V_0 привело бы к тому, что преобладающими механизмами релаксации стали бы туннельные не только в области низких температур, но и при $T \gg T_1$, что физически нереально, а при $V_0 > 125$ K ЯТ аномалии переместились бы в область более высоких температур, чем это наблюдается в эксперименте.

Таким образом, можно сделать следующее заключение. При исследовании распространения ультразвуковых волн на частотах 26–158 МГц в кристалле CaF_2:Cr^{2+} в области низких температур, где доминируют туннельные механизмы релаксации, впервые была обнаружена аномально большая, на два порядка превосходящая, скорость релаксации по сравнению со скоростью релаксации в других, ранее исследованных ЯТ комплексах. Разработан новый метод построения температурной зависимости времени релаксации для доминирующей подсистемы. Он основан на моделировании температурных зависимостей действительной и мнимой составляющих модулей упругости с учетом активационного и туннельных механизмов релаксации. Впервые были определены параметры, характеризующие времена релаксации ЯТ подсистемы, обусловленные прямыми туннельными переходами: $B^{-1} = (3.1 \pm 0.2) \times 10^{-7}$ с K и двухфононными переходами: $(B\Theta^2)^{-1} = (2.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$ с K^3. Туннельные механизмы релаксации в кристалле CaF_2:Cr^{2+} оказались доминирующими, поскольку энергия активации, определяющая потенциальный барьер, оказалась существенно меньше ($V_0 = 125$ K $= 87$ см$^{-1}$), чем в других флюоритах, где этот параметр был равен: 390 K $=$ 271 см$^{-1}$ для SrF_2:Cr^{2+} [34] и 570 K $=$ 396 см$^{-1}$ для CaF_2:Ni^{2+} [21].

В УрФУ работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 18-02-00332а), Центра превосходства “Радиационные и ядерные технологии” Уральского федерального университета и в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации # FEUZ-2020-0060. В Южно-Уральском государственном университете работа выполнялась при поддержке Правительства Российской Федерации, Акт 211, контракт # 02.A03.21.0011, проекта 5-100. Исследование в ИФМ УрО РАН было выполнено в рамках госзадания # АААА-А18-118020190098-5.

1. H. A. Jahn and E. Teller, Proc. Roy. Soc. A **161**, 220 (1937).
2. I. B. Bersuker, J. Phys.: Conf. Ser. **833**, 012001 (2017).
3. M. Acosta, N. Novak, V. Rojas, S. Patel, R. Vaish, J. Koruza, G. A. Rossetti, and J. Rödel, Appl. Phys. Rev. **4**, 041305 (2017).
4. M. D. Kaplan and G. O. Zimmerman, J. Phys.: Conf. Ser. **833**, 012007 (2017).
5. D. Liu, N. Iwahara, and L. F. Chibotaru, Phys. Rev. B **97**, 115412 (2019).
6. J. L. Dunn and E. Rashed, J. Phys.: Conf. Ser. **1148**, 012003 (2018).
7. Ю. С. Орлов, С. В. Николаев, С. Г. Овчинников, А. И. Нестеров, Письма в ЖЭТФ **112**, 268 (2020).
8. H. Koizumi, J. Phys.: Conf. Ser. **833**, 012016 (2017).
9. S. Merten, O. Shapoval, B. Damaschke, K. Samwer, and V. Moshnyaga, Sci. Rep. **9**, 2387 (2019).
10. V. Polinger and I. B. Bersuker, J. Phys.: Conf. Ser. **833**, 012012 (2017).
11. M. Angeli, E. Tosatti, and M. Fabrizio, Phys. Rev. X **9**, 041010 (2019).
12. А. В. Кузьмин, С. С. Хасанов, К. П. Мелетов, Р. П. Шибаева, ЖЭТФ **155**, 1037 (2019).
13. К. М. Красиков, А. Н. Азаревич, В. В. Глушков, А. Л. Хорошилов, А. В. Богач, Н. Ю. Шицевалова, В. Б. Филиппов, Н. Е. Случанко, Письма в ЖЭТФ **112**, 451 (2020).
14. M. D. Sturge, *The Jahn–Teller effect in solids*, in: *Solid State Physics*, ed. by F. Seitz, D. Turnbull, and H. Ehrenreich, Academic Press, N.Y., London (1968), v. 20, p. 91.
15. W. Ulrici, Phys. Status Solidi **84**, K155 (1977).
16. M. M. Zaripov, V. F. Tarasov, V. A. Ulanov, G. S. Shakurov, and M. L. Popov, Phys. Solid State **37**, 437 (1995).
17. P. B. Oliete, V. M. Orera, and P. J. Alonso, Phys. Rev. B **53**, 3047 (1996).
18. P. B. Oliete, V. M. Orera, and P. J. Alonso, Phys. Rev. B **54**, 12099 (1996).
19. S. K. Hoffmann, J. Goslar, S. Lijewski, and V. A. Ulanov, J. Chem. Phys. **127** 124705 (2007).
20. V. V. Gudkov, *Ultrasonic consequences of the Jahn-Teller effect*, in: H. Koppel, D. R. Yarkony, H. Barentzen (editors), *The Jahn-Teller Effect: Fundamentals and Implications for Physics and Chemistry*, Springer, Berlin, Heidelberg (2009), p. 743.
21. M. N. Sarychev, W. A. L. Hosseny, A. S. Bondarevskaya, I. V. Zhevstovskikh, A. V. Egranov, O. S. Grunskiy, V. T. Surikov, N. S. Averkiev, and V. V. Gudkov, J. Alloys Compd. **848**, 156167 (2020).
22. Н. С. Аверкиев, И. Б. Берсукер, В. В. Гудков, И. В. Жевстовских, М. Н. Сарычев, С. Жерлицын, С. Ясин, Ю. В. Коростелин, В. Т. Суриков, ЖЭТФ **156**, 87 (2019).
23. J. J. Krebs and G. H. Stauss, Phys. Rev. B **16**, 971 (1977).
24. G. H. Stauss, J. J. Krebbs, and R. L. Henry, Phys. Rev. B **16**, 974 (1977).
25. J. T. Vallin and G. T. Watkins, Phys. Rev. B **9**, 2051 (1974).
26. J. Dziesiaty, P. Peka, M. U. Lehr, A. Klimakow, S. Muller, and H.-J. Schulz, Z. Phys. Chem. (Munich) **201**, 63 (1997).
27. М. М. Зарипов, В. Ф. Тарасов, В. А. Уланов, Г. С. Шакуров, М. Л. Попов, ФТТ **37**, 806 (1995).

28. М. М. Зарипов, В. Ф. Тарасов, В. А. Уланов, Г. С. Шакуров, ФТТ **38**, 452 (1996).
29. М. М. Зарипов, В. Ф. Тарасов, В. А. Уланов, Г. С. Шакуров, ФТТ **344**, 1958 (2002).
30. P. B. Oliete, V. M. Orera, and P. J. Alonso, J. Phys.: Condens. Matter **8**, 6797 (1996).
31. P. B. Oliete, C. A. Bates, and J. L. Dunn, J. Phys.: Condens. Matter **11**, 2579 (1999).
32. V. V. Gudkov, I. B. Bersuker, I. V. Zhevstovskikh, Yu. V. Korostelin, and A. I. Landman, J. Phys.: Condens. Matter **23**, 115401 (2011).
33. N. S. Averkiev, I. B. Bersuker, V. V. Gudkov, I. V. Zhevstovskikh, M. N. Sarychev, S. Zherllitsyn, S. Yasin, G. S. Shakurov, V. A. Ulanov, and V. T. Surikov, *The Jahn-Teller effect in elastic moduli of cubic crystals: general theory and application to strontium fluorite doped with chromium ions*, in: *Fluorite: Structure, Chemistry and Applications*, ed. by M. van Asten, Nova Science Publishers, N.Y. (2019), ch. 2, p. 111.
34. I. V. Zhevstovskikh, I. B. Bersuker, V. V. Gudkov, N. S. Averkiev, M. N. Sarychev, S. Zherlitsyn, S. Yasin, G. S. Shakurov, V. A. Ulanov, and V. T. Surikov, J. Appl. Phys. **119**, 225108 (2016).