Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 3, с. 212 – 217 © 2021 г. 10 февраля

Гибридная атомарно-оптическая квантовая гирометрия

В. А. Томилин[1]*, Л. В. Ильичев*

Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 15 ноября 2020 г.
После переработки 17 декабря 2020 г.
Принята к публикации 21 декабря 2020 г.

Предложена и исследована "гибридная" атомарно-оптическая схема интерферометра-гироскопа. Ее основой служит кольцевая конфигурация атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна (BEC), нарушенная в некотором участке дополнительным потенциальным барьером или ямой. Этот дефект кольцевой конфигурации создается пучком нерезонансного излучения, дисперсионно взаимодействующего с попадающими в его область атомами. Пучок распространяется по одному из путей интерферометра Маха–Цандера. Вращение системы отсчета гирометра из-за наличия дефекта кольцевой структуры модифицирует состояние конденсата, а тот, в свою очередь, меняет условия интерференции излучения, взаимодействующего с атомами. В отличие от известных нам идей использования BEC в гирометрии, предусматривающих разрушение конденсата для непосредственного наблюдения его интерференции, предлагаемая схема в идеале функционирует без потери атомов конденсатом. Для реалистичных условий сделаны оценки эффективности схемы.

DOI: 10.31857/S1234567821030101

Введение. С развитием технологии создания и контроля атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна (Bose–Einstein condensate – BEC) [1] появилась возможность его использования в перспективных схемах квантовых гироскопов. В работе [2] предсказана прецессия конденсата с изначально приготовленным вихрем в результате вращения удерживающего потенциала. Вращение может приводить к наклону полос в картине интерференции фрагментов единого конденсата [3]. Взаимодействие между атомами в конденсате может оказаться не мешающим фактором, а основой достижения гейзенберговского предела в точности детектирования слабого вращения [4]. Достижение этого предела составляет главную цель квантовой метрологии [5]. В работе [6] исследуется возможность достижения гейзенберговского предела в BEC-гирометре за счет естественной многочастичной зацепленности в конденсате. Возможность создания суперпозиции встречных движений конденсата в кольцевом удерживающем потенциале также может оказаться перспективной в квантовой гирометрии [7]. В [8] проведен сравнительный анализ различных экзотических состояний конденсата для повышения точности гирометра. Обзор эффектов, связанных с коллективными возбуждениями бозе-конденсата в трехмерной и квази-двумерной геометрии, приведен в [9].

Во всех известных нам схемах атомарной квантовой гирометрии присутствует прямая регистрация интерференции волн материи. Если в схеме фигурирует атомарный конденсат, это предполагает его разрушение и потерю атомов. Весьма желательно иметь альтернативную схему квантового гирометра, использующую макроскопическую пространственную когерентность атомарного конденсата, но не разрушающую его в процессе регистрации вращения (термин "гирометр" будет использоваться как синоним "гироскопа"). Такая схема предлагается в настоящей работе. Вращение системы отсчета гирометра модифицирует состояние конденсата, а тот, в свою очередь, меняет условия интерференции излучения, нерезонансно взаимодействующего с атомами. Роль излучения при этом оказывается двоякой: оно не только позволяет определить угловую скорость вращения через модификацию картины интерференции, но и обеспечивает чувствительность конденсата к факту вращения через трансформацию удерживающего его потенциала.

Модель. Схема гибридного гирометра приведена на рис. 1. В одном из плеч оптического интерферометра Маха–Цандера (Mach–Zehnder interferometer – MZI) размещен кольцевой резонатор, внутренний пучок которого пересекает торообразную ловушку с атомарным конденсатом. Присутствие резонатора помогает построению пучка нужной конфигурации и интенсивности. Способ формирования ловушки (на-

[1]e-mail: 8342tomilin@mail.ru

пример, средствами SLM-технологии [10]) не отражен в приведенной схеме. Будем пренебрегать радиусом образующей окружности тора по сравнению с расстоянием от ее центра до оси вращения, т.е. эффективно полагать его одномерным кольцом радиуса R. Атомарные бозе-конденсаты в одномерных и квазиодномерных потенциалах являются весьма популярной моделью при изучении свехтекучести в малоразмерных системах [11–15]. Кроме того, мотивация к изучению одномерных моделей продиктована также прогрессом в направлении их экспериментальной реализации [16–18]. Важно, что пучок резонатора вносит дополнительный вклад в потенциал ловушки [19]. В результате кольцо оказывается нарушенным потенциальным барьером или ямой. Этот дефект, как будет показано далее, делает состояние конденсата чувствительным к вращению системы отсчета всей установки[2)]. В схеме на рис. 1 плоскость

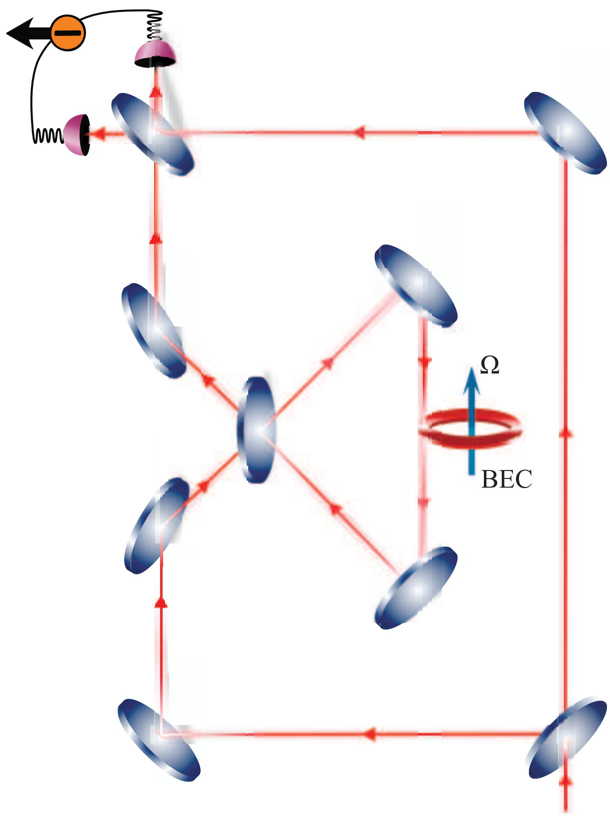

Рис. 1. (Цветной онлайн) Принципиальная схема атомно-оптического гирометра

[2)] Детектором вращения оказывается BEC. Этим предлагаемая схема отличается от идеи гибридного гирометра [20], где регистрирующим элементом является оптическая петля Саньяка. Ансамбль атомов входит в конструкцию делителя/объединителя оптических пучков.

интерферометра и кольца с конденсатом ортогональны. Когда направление вектора $\mathbf{\Omega}$ угловой скорости вращения нормально плоскости кольца, ожидаемый эффект максимален. Конденсат в настоящей работе полагается идеальным и описывается в терминах единой для всех атомов волновой функции частицы в кольце с дополнительным локализованным потенциалом. Он имеет конечный размер. Будет, однако, показано, что хорошим приближением может служить более простая модель с точечным сингулярным потенциалом. Уравнение для волновой функции стационарного состояния запишем в безразмерном виде:

$$\Psi''(\varphi) - 2\imath\xi\Psi'(\varphi) + \mathcal{E}\Psi(\varphi) = 0. \tag{1}$$

Здесь φ – угловая координата на одномерном кольце; $\mathcal{E}$ – обезразмеренная энергия, а параметр $\xi = mR^2\Omega/\hbar$ учитывает вращение. Уравнение (1) записано во вращающейся системе отсчета. Известно, что в этом случае к гамильтониану атома на кольце добавляется слагаемое $-\hat{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{\Omega}$, где $\hat{\mathbf{M}}$ – оператор углового момента [21]. Это породило второй член в левой части (1). Сингулярный потенциал локализован в точке $\varphi = 0$. Он непосредственно не входит в (1), где предполагается, что $0 < \varphi < 2\pi$. Наличие сингулярного потенциала следует учесть в рамках известного приема [22], полагая непрерывность волновой функции в нуле: $\lim_{\varepsilon\to+0}\Psi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0}\Psi(2\pi-\varepsilon) \doteq \Psi(0)$, и заданную величину скачка ее первой производной: $\lim_{\varepsilon\to+0}(\Psi'(\varepsilon) - \Psi'(2\pi-\varepsilon)) = u\Psi(0)$. В последнее соотношение входит параметр u, характеризующий величину потенциала ($u > 0$ в случае барьера и $u < 0$ в случае ямы).

Изменение числа атомов в области потенциала, определяющее сдвиг выходного сигнала MZI из-за вращения, пропорционально разности

$$\Delta(\xi, u) \doteq |\Psi(0)|^2\Big|_{\xi\neq 0} - |\Psi(0)|^2\Big|_{\xi=0}. \tag{2}$$

Фундаментальной системой решений (1) являются плоские волны

$$\Psi(\varphi) = \Psi_+ e^{\imath\kappa_+\varphi} + \Psi_- e^{\imath\kappa_-\varphi} \tag{3}$$

с волновыми векторами

$$\kappa_\pm = \xi \pm \sqrt{\mathcal{E} + \xi^2}. \tag{4}$$

Возможны два режима, соответствующие положительному или отрицательному знаку подкоренного выражения: $\mathcal{E} > -\xi^2$ или $\mathcal{E} < -\xi^2$. Второй имеет место при достаточно глубокой яме.

Приведенные далее выражения записаны для случая $\mathcal{E} > -\xi^2$. Переход ко второму случаю осуществляется формальной заменой $\sqrt{\mathcal{E}+\xi^2} \to \to \imath\sqrt{-\mathcal{E}-\xi^2}$. Из условий в точке $\varphi = 0$ возникает уравнение на $\mathcal{E}$:

$$u \sin 2\pi\sqrt{\mathcal{E}+\xi^2} = 2\sqrt{\mathcal{E}+\xi^2}\big(\cos 2\pi\xi - \cos 2\pi\sqrt{\mathcal{E}+\xi^2}\big). \tag{5}$$

Нас интересует энергия основного состояния атомов. Зависимость этой энергии от величины потенциального барьера (ямы) приведена на рис. 2. Расчет

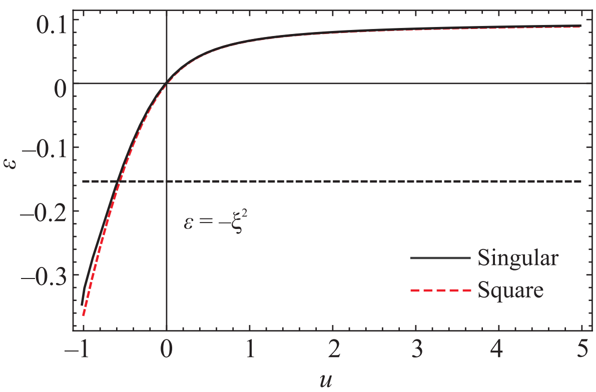

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость энергии основного состояния от параметра потенциала u при $\xi = 0.392$ в случае сингулярного (сплошная линия) и прямоугольного (пунктир) потенциалов. В последнем случае угловой размер области потенциала $2\delta = 0.1$ и его величина $U = u/2\delta$

выполнен для атома ^{87}Rb, $R = 0.2$ см и угловой скорости $\Omega = 0.727\cdot 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$ вращения Земли вокруг своей оси. Параметр ξ оказывается равным 0.392. Выделенная на рис. 2 точка $\mathcal{E} = -\xi^2$ соответствует пограничному значению между режимами и имеет место при

$$u_* = \frac{1}{\pi}\cdot\big(\cos 2\pi\xi - 1\big). \tag{6}$$

Для вычисления $|\Psi(0)|^2$ необходимо знание $\mathcal{E}$ и нормировки волновой функции. Универсальное (справедливое для всех режимов) выражение в терминах $\kappa_\pm$ имеет вид

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{1-\cos 2\pi(\kappa_+ - \kappa_-)}{2\pi} \times \\ \times \Bigg[(1-\cos 2\pi\kappa_-)\cdot\Big(1+\frac{\sin 2\pi\kappa_+}{2\pi(\kappa_+ - \kappa_-)}\Big) + \\ + (1-\cos 2\pi\kappa_+)\cdot\Big(1+\frac{\sin 2\pi\kappa_-}{2\pi(\kappa_- - \kappa_+)}\Big)\Bigg]^{-1}. \tag{7}$$

Целесообразно искать экстремальное значение величины $\Delta(\xi, u)$ из (2) как функции u для получения наибольшего сдвига на выходе MZI. Такой оптимум действительно существует и при выбранном значении ξ располагается вблизи $u \sim -1$ (см. рис. 3). Тот факт, что оптимум имеет место для ямы, согласуется с простыми физическими соображениями[3)]. Проход кривой на рис. 3 через начальную точку осей демонстрирует отмеченное во Введении появление чувствительности конденсата к вращению только при ненулевом значении u.

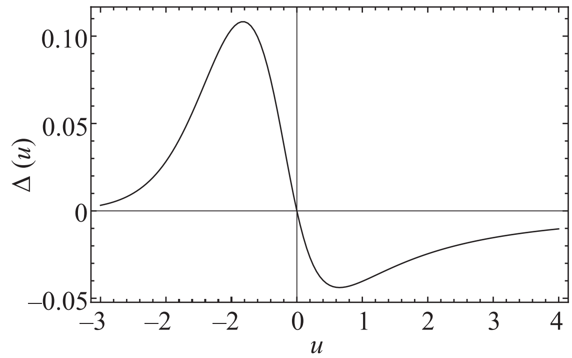

Рис. 3. Разность плотностей $\Delta(\xi, u)$ в месте разрыва кольцевой конфигурации как функция от u при $\xi = 0.392$

Модель сингулярного потенциала является идеализацией случая распределенного потенциала. Его простейший вариант – прямоугольный потенциал величины U на интервале $-\delta < \varphi < \delta$. Теперь вместо (2) необходимо знать величину

$$\tilde{\Delta}(\xi, U, \delta) = \frac{1}{2\delta}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\Big[|\Psi(\varphi)|^2\Big|_{\xi\neq 0} - |\Psi(\varphi)|^2\Big|_{\xi=0}\Big]d\varphi. \tag{8}$$

Задача сводится к сшивке решений уравнения Шредингера внутри и снаружи области потенциала. Условие непрерывности волновой функции и ее первой производной на границах области потенциала дает

$$\big(2(\xi^2+\mathcal{E}) - U\big)\cdot\frac{\sin[2(\delta-\pi)\sqrt{\xi^2+\mathcal{E}}]}{\sqrt{\xi^2+\mathcal{E}}} \times \\ \times \frac{\sin[2\delta\sqrt{\xi^2+\mathcal{E}-U}]}{\sqrt{\xi^2+\mathcal{E}-U}} = 2\cos 2\pi\xi - \\ - 2\cos[2(\delta-\pi)\sqrt{\xi^2+\mathcal{E}}]\cdot\cos[2\delta\sqrt{\xi^2+\mathcal{E}-U}]. \tag{9}$$

Вычисление интересующей нас вероятности (8) не представляет принципиальной сложности, однако

[3)] Если оптимум есть, то он, скорее всего, должен отвечать яме, притягивающей атомы; однако, глубина этой ямы не может быть слишком большой, поскольку тогда основная часть атомов окажется локализованной, и утратится чувствительность к вращению. Характерным масштабом глубины ямы является, очевидно, u_*, поскольку эта величина, согласно (6), отделяет режим глубокой ямы от неглубокой.

приводит к весьма громоздким выражениям. Когда ширина рассматриваемого потенциала достаточно мала, $0 < \delta \ll 1$, соотношение (9) можно привести к виду

$$\delta\big(U - 2(\xi^2 + \mathcal{E})\big) \cdot \sin 2\pi\sqrt{\xi^2 + \mathcal{E}} = \\ = \sqrt{\xi^2 + \mathcal{E}} \cdot \big(\cos 2\pi\xi - \cos 2\pi\sqrt{\xi^2 + \mathcal{E}}\big). \quad (10)$$

Если предположить, что $\xi^2 + \mathcal{E} \ll U$ для основного уровня энергии, то полученное уравнение оказывается идентичным уравнению (5) для случая сингулярного потенциала при условии $2\delta U = u$. Обоснованность сделанных приближений можно проверить, сравнив энергии основных состояний в случае сингулярного и прямоугольного потенциалов, рассчитанные согласно выражениям (5) и (9) соответственно, при соблюдении упомянутого условия (рис. 2). Как видно, практически полное совпадение графиков гарантирует возможность использовать более простые соотношения, полученные для сингулярного потенциала для анализа достаточно узкого потенциала прямоугольной формы. Это позволяет полагать

$$\tilde{\Delta}(\xi, \frac{u}{2\delta}, \delta) = \Delta(\xi, u). \quad (11)$$

В приведенных ниже оценках $2\delta = 0.1$, и используется модель с сингулярным потенциалом.

Обсуждение. Интерферометр должен обнаружить фазовый сдвиг, вносимый кольцевым резонатором, чья мода взаимодействует с конденсатом. Точнее, должна быть зарегистрирована реакция этого фазового сдвига на вращение. Рассмотрим условия этой регистрации. В отсутствие конденсата амплитуда моды резонатора $\alpha_{\rm int}$ связана с α_0, амплитудой волны, падающей на зеркало входа-выхода резонатора, соотношением

$$\alpha_{\rm int} = \frac{\sqrt{T}\alpha_0}{1 - \sqrt{1-T}e^{\imath\phi}}, \quad (12)$$

где T – коэффициент пропускания зеркала, $\phi = 2\pi l/\lambda$ (l – длина резонатора, λ – длина волны излучения). Для амплитуды волны α_1 между резонатором и выходным делителем пучка MZI имеем

$$\alpha_1 = \frac{e^{\imath\phi} - \sqrt{1-T}}{1 - \sqrt{1-T}e^{\imath\phi}}\alpha_0. \quad (13)$$

Видно, что помимо набега фазы из-за тривиального удлинения пути пучка при его распространении в резонаторе (к этому все сведется при $T = 1$, т.е. при убранном зеркале входа-выхода резонатора), амплитуда α_1 относительно α_0 несет дополнительную фазу

$$\Theta(\phi) = 2\arg\left(1 - \sqrt{1-T}e^{-\imath\phi}\right). \quad (14)$$

Рассмотрим модификацию $\alpha_{\rm int}$ из-за взаимодействия резонаторной моды с конденсатом. Для простоты будем далее полагать $\exp(\imath 2\pi l/\lambda) = 1$. В модели фотонной моды резонатора, возбуждаемой классическим гармоническим источником и контролируемой спонтанной потерей фотонов со скоростью ν, дисперсионное взаимодействие с конденсатом сводится к замене $\nu \mapsto \nu + \imath\mu$, где $\mu = NU/\hbar$ и N – число атомов в области пучка резонатора [23–25]. Частота ν связана с коэффициентом отражения зеркала входа-выхода резонатора:

$$\sqrt{1-T} = e^{-\nu l/c}. \quad (15)$$

Предполагая универсальность преобразования $\nu \mapsto$ $\mapsto \nu + \imath\mu$, мы приходим к соотношению (13) с $\phi = -\mu l/c$.

Интерферометр должен быть способен зарегистрировать разницу $\Theta(\phi_\xi) - \Theta(\phi_0)$ (эффект вращения можно включать и выключить выбором ориентации нормали к плоскости кольцевой ловушки с конденсатом относительно $\mathbf{\Omega}$). При

$$\mu \lesssim \nu \ll \frac{c}{l} \quad (16)$$

из (14) и (15) следует $\Theta \simeq -2NU/\hbar\nu$. Часть параметров можно конкретизировать. При оптимальном значении $u \simeq -1$ и $\delta = 0.05$ необходимая интенсивность поля резонаторной моды такова, что $|U| \sim 5\hbar^2/2mR^2$. Для конденсата атомов ^{87}Rb и выбранного значения R получаем $|U|/\hbar \sim 0.4 \cdot 10^{-3}\,{\rm c}^{-1}$. Вычисления дают для атомов в области потенциала $N \sim 10^{-1}N_{\rm tot}$. Будем ориентироваться на $N_{\rm tot} \sim 10^6$. Такое число атомов в конденсате уверенно достигается в современных экспериментах. Левое условие (16) оказывается выполненным при $\nu \gtrsim 10^2\,{\rm c}^{-1}$. Верхнюю границу ν (помимо правого неравенства в (16), требующего достаточную малость коэффициента пропускания T) можно оценить из условия надежной регистрации вращения. Если $\Theta_{\rm min}$ – минимальная обнаружимая разность фаз, необходимо $\Theta_{\rm min} \lesssim |U|N\Delta/\hbar\nu$. Из рисунка 3 следует $\Delta \simeq 0.1$. Получаем $\nu \lesssim 4/\Theta_{\rm min}\,{\rm c}^{-1}$. Множество допустимых значений ν не является пустым при $\Theta_{min} \lesssim 0.04$.

Отметим используемые приближения. Как уже подчеркивалось, отброшено межатомное взаимодействие в конденсате. Усложнив модель, его можно учесть в рамках подхода Гросса–Питаевского. Серьезным упрощением является подход к конденсату как к чисто динамической (изолированной) системе. Несмотря на то, что непосредственно наблюдаемой является оптическая интерференция, атомарный конденсат через взаимодействие с излучением приобретает черты открытой квантовой системы.

Возникает обмен информации конденсата с окружением. Конденсат не теряет атомы, как в других схемах гирометров на волнах материи, но его макроскопическая пространственная когерентность модифицируется и в общем случае деградирует, т.е. оказывается ресурсом. В приведенном выше рассмотрении важную роль играет комбинация интегральных величин (8). В терминах одноатомной волновой функции это разница вероятностей того, что атом окажется внутри области потенциала с вращением и без него. В произведении с N_{tot} получается разность соответствующих средних чисел атомов в этой области. Для описания процесса декогеренции следует заменить эти средние на операторы. А именно, последовательное введение операторов $\hat{b}$ и $\hat{b}^{\dagger}$, уничтожающих и рождающих атом в области потенциала, позволяет не только построить оператор числа атомов в этой области, но и описать их миграцию внутри кольца и модификацию этой миграции при вращении. Примечательно, что как амплитуда моды резонатора, так и амплитуды пучков на выходе интерферометра приобретают через фазовый сдвиг, пропорциональный $\hat{b}^{\dagger}\hat{b}$, операторную природу по отношению к состоянию конденсата. В других отношениях оптические поля остаются классическими. Такой подход использован в [26–28]. Более последовательная модель должна изначально формулироваться в терминах квантованного светового поля, как это сделано в [25].

Заметим, что поскольку величина потенциала U пропорциональна $|\alpha_{\text{int}}|^2$, соотношение (12) с $\phi = -NUl/c\hbar$ формально является неявным уравнением на $|\alpha_{\text{int}}|$. В определение ϕ входит также число N, которое, в свою очередь, определяется из решения уравнения Шредингера с потенциалом U. Поэтому, строго говоря, вся модель гирометра предполагает поиск согласованного решения. Однако, при условии (16) это обстоятельство можно не принимать во внимание.

Отмеченная выше необходимость построения кинетической модели с картиной миграции атомов конденсата диктуется также потребностью исследовать параметры стабильности гибридного гирометра (рассчитать девиацию Аллана). В рамках представленной модели гирометра можно сделать только простейшие оценки его точности и чувствительности. Наиболее интересным в физическом плане источником шума являются флуктуации числа атомов в пучке. Среднее число атомов, как указывалось, $N \sim 0.1N_{\text{tot}}$, т.е. под действием потенциала область пучка на окружности эффективно увеличилась с $2\delta = 0.1$ до 0.2π радиан. Предполагая пуассонову статистику числа атомов в области, для используемых значений Δ и N_{tot} имеем $SNR \sim 30$ (отношение индуцированного вращением сдвига картины интерференции к шуму). Величина $|\partial\Delta/\partial\Omega|$, взятая для используемых в работе параметров, дает относительную ошибку измерения угловой скорости вращения Земли: $\delta\Omega/\Omega \simeq 0.08$. В контексте обсуждения точности и чувствительности различных схем гирометрии на основе BEC следует упомянуть работу [29]. В ней экспериментально исследована возможность достижения чувствительности системы к вращению за счет интерференции звуковых волн, распространяющихся в противоположных направлениях в тороидальном конденсате. Как и в настоящей работе, схема [29] не предполагает потерю атомов конденсата при измерении вращения. Наиболее корректно сравнивать оценки, полученные из математических моделей обеих схем. Относительная ошибка при измерении угловых скоростей вращения $\sim 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$ (как и в нашей работе), полученная в модели [29], составляет ~ 1. В эксперименте ошибка оказалась еще больше. Однако, более объективное сравнение достоинств и недостатков двух схем гирометрии следует проводить при близких радиусах ловушек и близких числах атомов в конденсате (обе эти величины в упомянутой работе на два порядка меньше, чем в нашей).

Заключение. Предложена схема оптико-атомарного гирометра. Чувствительным к вращению элементом схемы служит тороидальная структура атомарного конденсата, нарушенная дополнительным оптическим потенциалом. Потенциал создается полем моды кольцевого резонатора. Система "резонатор + конденсат" помещена в интерферометр Маха–Цандера. Интерферометр служит для извлечения информации о реакции конденсата на вращение – об изменении числа атомов в области дополнительного потенциала через изменение вносимого ими фазового сдвига. Природа конденсата как протяженной когерентной квантовой системы явлена в использовании волнового уравнения (1) для описания реакции атомов на вращение. Оценки показывают возможность обнаружения суточного вращения Земли при диаметре тороидальной структуры конденсата всего 0.4 см.

Авторы признательны Д. В. Бражникову и О. Н. Прудникову за полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках Государственного задания (проект АААА-А17-117052210003-4, внутренний номер ФАСО 0319-2016-0002) в Институте автоматики и электрометрии СО РАН. Участие Л. В. Ильичева поддержано Российским научным фондом (грант 20-12-00081).

1. Л. П. Питаевский, УФН **176**, 345 (2006).
2. S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **86**, 4725 (2001).
3. O. I. Tolstikhin, T. Morishita, and S. Watanabe, Phys. Rev. A **72**, 051603R (2005).
4. S. Ragole and J. M. Taylor, Phys. Rev. Lett. **117**, 203002 (2016).
5. V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, Science **306**, 1330 (2004).
6. Ch. Luo, J. Huang, X. Zhang, and Ch. Lee, Phys. Rev. A **95**, 023608 (2017).
7. G. Pelegr, J. Mompart, and V. Ahufinger, New J. Phys. **20**, 103001 (2018).
8. L. Shao, W. Li, and X. Wang, arXiv:2006.05794v1[quant-ph] (2020).
9. М. Ю. Каган, А. В. Турлапов, УФН **189**, 225 (2019).
10. D. McGloin, G. C. Spalding, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, Opt. Express **11**, 158 (2003).
11. M. Cazalilla, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, 1 (2004).
12. R. Cittro, A. Minguzzi, and F. W. J. Hekking, Phys. Rev. B **79**, 172505 (2009).
13. N. Didier, A. Minguzzi, and J. Hekking, Phys. Rev. A **79**, 063633 (2009).
14. D. W. Hallwood, T. Ernt, and J. Brand, Phys. Rev. A **82**, 063623 (2010).
15. S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski, N. Murray, C. W. Clark, C. J. Lobb, W. D. Phillips, M. Edwards, and G. K. Campbell, Nature **506**, 200 (2014).
16. A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
17. S. Gupta, K. W. Murch, K. L. Moore, T. P. Purdy, and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. Lett. **95**, 143201 (2005).
18. C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, and M. G. Boshier, Phys. Rev. Lett. **111**, 205301 (2013).
19. R. Grimm, M. Weidemuller, and Y. B. Ovchinnikov, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).
20. Y. Wu, J. Guo, X. Feng, L. Q. Chen, Ch.-H. Yuan, and W. Zhang, arXiv:2009.06166v1[quant-ph] (2020).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика,* Физматлит, М. (2004).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматлит, М. (2004).
23. L. V. Il'ichev, Письма в ЖЭТФ **106**, 14 (2017).
24. Л. В. Ильичев, П. Л. Чаповский, Квантовая электроника **47**, 463 (2017).
25. T. S. Yakovleva, A. M. Rostom, V. A. Tomilin, and L. V. Il'ichov, Opt. Commun. **436**, 52 (2019).
26. Л. В. Ильичев, П. Л. Чаповский, Письма в ЖЭТФ **102**, 18 (2015).
27. V. A. Tomilin and L. V. Il'ichov, Annalen der Physik **528**, 619 (2016).
28. В. А. Томилин, Л. В. Ильичев, Квантовая электроника **50**, 537 (2020).
29. G. E. Marti, R. Olf, and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. A **91**, 013602 (2015).