Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 8, стр. 421-424 25 октября 1991 г.

СПИНОРНЫЙ ПОДВИЖНОЙ РЕПЕР КАРТАНА, ЛОРЕНЦ-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФОРМУЛИРОВКИ СУПЕРСТРУН И κ-СИММЕТРИЯ

И.А.Бандос, А.А.Желтухин

Физико-технический институт АН УССР
310002 г. Харьков

Поступила в редакцию 28 августа 1991 г.

На основе гармонического обобщения диадного формализма Ньюмена-Пенроуза построены твистороподобные формулировки $D = 10$, $N = 2B$ и $D = 4$, $N = 1$ суперструн, в которых автоматически разрешается проблема построения ковариантных неприводимых генераторов κ-симметрии.

Проблема ковариантного квантования является одной из центральных в теории суперструн [1]. Недавно эта проблема была решена для нуль-супер-p-бран ($p = 0$ - безмассовая суперчастица, $p = 1$ - нуль суперструна, $p = 2$ - нуль-супермембрана) в четырехмерном пространстве-времени, используя новую лоренц-гармоническую формулировку их действия [2,3]. Ключевым моментом подхода [2,3] является использование диад Ньюмена-Пенроуза T_α, O_α [4] или эквивалентных им лоренцевых гармоник v_α^-, v_α^+ [5] в качестве вспомогательных переменных, дополнительных к координатам нуль-супер-p-бран. Лоренцевы гармоники являются спинорной реализацией подвижного репера Картана и проектирование на них грассмановых спинорных связей автоматически приводит к выделению ковариантных и неприводимых генераторов κ-симметрии. Поэтому мы считаем концептуально важным использование переменных спинорного репера для формулировки действия суперструн Грина-Шварца.

Здесь мы приводим такие формулировки с твистороподобным действием для $D = 10$, $N = 2B$ и $D = 4$, $N = 1$ суперструн, обобщая действие нуль-суперструн [2]. Обобщение состоит в учете ненулевого натяжения, а также в расширении представления [2] на случай $D = 10$.

Действие для $D = 10$, $N = 2B$ и $D = 4$, $N = 1$ суперструн можно записать единым образом, используя составленные из соответствующих спинорных лоренц-гармонических переменных (см. [5] для $D = 4$ и [6] для $D = 10$), светоподобные векторы $u_m^{(\pm 2)}$ [1)].

$$S_{D,N} \equiv \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\tau, \sigma) = S_{1,D,N} + S_{WZW,D,N}, \tag{1}$$

$$S_{1,D,N} = -\frac{1}{2} \int d\tau d\sigma [\rho^{(+2)\mu} \omega_\mu^m u_m^{(-2)} + \varphi^{(-2)\mu} \omega_\mu^m u_m^{(+2)} + \alpha' \epsilon_{\mu\nu} \rho^{(+2)\mu} \varphi^{(-2)\nu}].$$

Здесь $\mu = 0, 1$ - векторный индекс мирового листа; $\omega_\mu^m \equiv \partial_\mu x^m - i(\partial_\mu \theta^\alpha \sigma_{m\alpha\dot\alpha} \bar\theta^{\dot\alpha} - \theta^\alpha \sigma_{m\alpha\dot\alpha} \partial_\mu \bar\theta^{\dot\alpha})$ при $D = 4, N = 1 (m = 0, 1, 2, 3; \alpha = 1, 2; \dot\alpha = 1, 2$; $\sigma_{m\gamma\dot\gamma}$ - релятивистские матрицы Паули) и $\omega_\mu^m \equiv \partial_\mu X^m - i(\partial_\mu \Theta^{\alpha 1} \sigma_{m\alpha\beta} \Theta^{\beta 1} + \partial_\mu \Theta^{\alpha 2} \sigma_{m\alpha\beta} \Theta^{\beta 2})$ при $D = 10$, $N = 2B (m = 0, ..., 9$; $\alpha = 1, ..., 16$; $\sigma_{m\alpha\beta}$ -

[1)] Здесь и ниже в квадратных скобках над символом переменной указывается их вес w относительно преобразований калибровочной группы $SO(1,1)$, которая с одной стороны является подгруппой группы Лоренца $SO(1, D-1)$, а с другой стороны, в рамках предлагаемой формулировки суперструн, отождествляется со структурной группой мирового листа.

десятимерные σ-матрицы [7]. Координаты обычных $D = 10$, $N = 2B$ и $D = 4$, $N = 1$ суперпространств обозначены $z^M = (x^m, \theta^\alpha, \bar\theta^\alpha \equiv \overline{(\theta^\alpha)})$ и $z^M = (X^m, \Theta^{\alpha 1}, \Theta^{\alpha 2}) \equiv (X^m, \Theta^{\alpha 1})$ соответственно.

Векторы $u_m^{(\pm 2)}$, удовлетворяющие условиям светоподобия $u_m^{(-2)}u^{(-2)m} = 0 = u_m^{(+2)}u^{(+2)m}$ и ортонормированности $u_M^{(-2)}u^{(+2)m} = 2$ строятся из соответствующих спинорных лоренцевых гармоник [5,6] следующим образом

$$D = 4 : u^{(-2)m} \equiv u^{(+|-)m} = v^{\alpha -}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar v^{\dot\alpha +}, \quad u^{(+2)m} \equiv u^{(-|+)m} = v^{\alpha +}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar v^{\dot\alpha -}, \tag{2a}$$

$$D = 10 : u_m^{(-2)} = \frac{1}{8}u^-_{\alpha\mathring{A}}\tilde\sigma^{\alpha\beta}_m u^-_{\beta\mathring{A}}, \quad u_m^{(+2)} = \frac{1}{8}u^+_{\alpha A}\tilde\sigma^{\alpha\beta}_m u^+_{\beta A}. \tag{2b}$$

На уравнениях движения для реперных коэффициентов мировой поверхности $\delta S_{D,N}/\delta\rho^\mu = 0 = \delta S_{D,N}/\delta\varphi^\mu$ функционал $S_{D,N}$ воспроизводит действие [8] $\tilde S_{D,N} = \frac{1}{2\alpha'}\int d\tau d\sigma\ \epsilon^{\mu\nu}\ \omega^m_\mu\ \omega^n_\nu\ u_m^{(-2)}\ u_n^{(+2)}$ со вспомогательными векторами $n^0_m = \frac{1}{2}(u_m^{(+2)} + u_m^{(-2)}) \equiv u_m^{(0)}$, $n^1_m = \frac{1}{2}(u_m^{(+2)} - u_m^{(-2)}) \equiv u_m^{(9)}$, построенными из лоренцевых гармоник согласно (2). Поскольку формулировка [8] при $N = 0$ эквивалентна струне Намбу-Гото, это означает классическую эквивалентность лоренц-гармонических формулировок (1) соответствующим вариантам суперструны Грина-Шварца.

Используемые в (2a) лоренц-гармонические переменные [5] ограничены условиями нормировки (гармоничности) $\Xi^{(4)} \equiv v^{\alpha -}v^+_\alpha - 1 = 0$, $\Xi^{(4)} \equiv \overline{v_\alpha}\bar v^{\alpha +} - 1 = 0$. Эти условия с учетом инвариантности (1) относительно калибровочных преобразований из группы $[U(1)]^c = U_L(1) \times U_R(1) = SO(1,1) \times SO(2)$ позволяют отождествить пространство гармоник $\{v^\mp_\alpha,\ v^\pm_\alpha\}$ с фактор пространством $SL(2,C)/[U(1)]^c = SO(1,3)/SO(1,1) \times SO(2)$. Вместе с компонентами ρ^τ и φ^τ четыре независимые комбинации гармоник $v^\mp_\alpha$ параметризуют шесть независимых компонент светоподобных векторов $P_m \pm \frac{1}{\alpha}\ \omega_{\sigma m} + \ldots \equiv L_\pm$, представляющих связи в теории суперструны.

Аналогично в (2b) $U^a_\alpha \equiv (u^+_{\alpha A}, u^-_{\alpha\mathring{A}})$ (где $A = 1,\ldots,8$; $\mathring{A} = 1,\ldots,8$ – (s) и (c) - спинорные индексы $SO(8)$-группы) - лоренц-гармонические переменные для $D = 10$ [6]. Они удовлетворяют 1261 условиям гармоничности: $U^a_\alpha\tilde\sigma^{\alpha\beta}_{m_1\ldots m_5}U^b_\beta\sigma^{(n)}_{ab} = 0$ и $\frac{1}{128}u^-_{\alpha\mathring{A}}\tilde\sigma^{\alpha\beta}_m u^-_{\beta\mathring{A}}\ u^+_{\gamma A}\tilde\sigma^{m\gamma\delta}u^+_{\delta A} = 1$, накладывающим лишь $210 + 1 = 211$ ограничений на лоренцевы гармоники [6]. В силу инвариантности (1) относительно $SO(1,1) \times SO(8)$ калибровочной группы из 256 компонент U^a_α независимыми являются лишь $16 (= 256 - 211 - 28 - 1)$, что позволяет рассматривать их как координаты однородного пространства $SO(1,9)/SO(1,1) \times SO(8)$. Вместе с ρ^τ и φ^τ 16 степеней свободы гармоник U^a_α параметризуют 18 независимых компонент двух светоподобных векторов $L_\pm$. Посредством $S_{WZW,D,N}$ в (1) обозначен член Весса-Зумино-Виттена [1]. Для $D = 4$, $N = 1$ суперструны он имеет вид

$$S_{WZW,4,1} = \frac{1}{i\alpha'}\int d\tau d\sigma \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu x^m(\partial_\nu\theta^\alpha\sigma_{m\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} - \theta^\alpha\sigma_{m\alpha\dot\alpha}\partial_\nu\bar\theta^{\dot\alpha}), \tag{3a}$$

а для $D = 10$, $N = 2B$ суперструны соответственно -

$$S_{WZW,10,2B} = \frac{1}{i\alpha'}\int d\tau d\sigma\epsilon^{\mu\nu}[\omega^m_\mu\partial_\nu\Theta^{\alpha 1}\sigma_{m\alpha\beta}\Theta^{\beta 1} + \partial_\mu\Theta^{\alpha 1}\sigma_{m\alpha\beta}\Theta^{\beta 1}\partial_\nu\Theta^{\gamma 2}\sigma^m_{\gamma\delta}\Theta^{\delta 2}]. \tag{3b}$$

Благодаря его включению действие (1) обладает κ-симметрией, генераторами которой служат неприводимые связи первого рода

$$D=4: \mathcal{D}^-(\sigma) \equiv v^{\alpha -}\mathcal{D}_\alpha(\sigma) - \frac{4i}{\alpha'\rho^{(-1+)\tau}}\partial_\sigma\bar\theta^{\dot\alpha}\bar v^+_{\dot\alpha}\bar\nabla^{(-210)} + \frac{4i}{\alpha'}\partial_\sigma\bar\theta^{\dot\alpha}\bar v^-_{\dot\alpha}P^{(+1-)}_{(\rho)\tau},$$

$$\bar{\mathcal{D}}^+(\sigma) \equiv \overline{(\mathcal{D}^-(\sigma))},\quad (\mathcal{D}_\alpha(\sigma) \equiv -\pi_\alpha + i\{\mathcal{P}_m + \frac{1}{\alpha'}\omega_{\sigma m}\}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}) \tag{4a}$$

$$D=10: \mathcal{D}^{1-}_A(\sigma) \equiv u^{\alpha -}_A\mathcal{D}^1_\alpha - \frac{16i}{\alpha'\rho^{(+2)\tau}}\gamma^{(i)}_{A\mathring{A}}u^-_{\beta\mathring{A}}\partial_\sigma\Theta^{\beta 1}\nabla^{(+2)i} + \frac{4i}{\alpha'}u^+_{\beta A}\partial_\sigma\Theta^{\beta 1}P^{(-2)}_{(\rho)\tau},$$

$$\mathcal{D}^{2+}_{\mathring{A}}(\sigma) \equiv u^{\alpha +}_{\mathring{A}}\mathcal{D}^2_\alpha - \frac{16i}{\alpha'\varphi^{(-2)\tau}}\tilde\gamma^{(i)}_{\mathring{A}A}u^-_{\beta A}\partial_\sigma\Theta^{\beta 2}\nabla^{(-2)i} - \frac{4i}{\alpha'}u^-_{\beta\mathring{A}}\partial_\sigma\Theta^{\beta 2}P^{(+2)}_{(\varphi)\tau},$$

$$(D^1_\alpha \equiv -\pi^1_\alpha + i\{\mathcal{P}_m - (-1)^1\frac{1}{\alpha'}(\partial_\sigma X_m - i\partial_\mu\Theta^{\gamma 1}\,{}_{\eta\gamma\delta}\Theta^{\delta 1})\}\sigma^m_{\alpha\beta}\Theta^{\beta 1}). \tag{4b}$$

В (4b) $(u^{-\alpha}_A,\ u^{+\alpha}_{\mathring{A}}) \equiv U^{1\alpha}_a$ компоненты матрицы обратной к $U^a_\alpha \equiv (u^+_{\alpha A}, u^-_{\alpha\mathring{A}})$ [6]. Поскольку в отличие от $D=4$ случая компоненты $u^{-\alpha}_A, u^{+\alpha}_{\mathring{A}}$ не удается просто и ковариантно выразить через $u^+_{\alpha A}$ и $u^-_{\alpha\mathring{A}}$, их следует считать самостоятельными гармониками, но в число условий гармоничности включить дополнительно 256 условий обратимости матриц u^a_α и $u^{-1\alpha}_a$: $(U^{-1\alpha}_a\ \ U^b_\alpha = \delta^b_a)$. Плотности импульсов $\mathcal{P}_M \equiv -(-1)^M\partial\mathcal{L}/\partial z^M$ канонически сопряженных к координатам пространства мишеней[2)] обозначены соответственно $\mathcal{P}_M \equiv (\mathcal{P}_m, \pi_\alpha, \bar\pi_{\dot\alpha}, P^\pm_\alpha, \bar P^\mp_{\dot\alpha}, P^{(+|-)}_{(\rho)\mu}, P^{(-|+)}_{(\varphi)\mu})$ и $\mathcal{P}_M \equiv (\mathcal{P}_m, \pi^1_\alpha, P^{\alpha -}_A, P^{\alpha +}_{\mathring{A}}, P^+_{\alpha A}, P^-_{\alpha\mathring{A}}, P^{(-2)}_{(\rho)\mu}, P^{(+2)}_{(\varphi)\mu})$; $\bar\nabla^{(-210)} \equiv \bar v^{\dot\alpha -}\bar P^-_{\dot\alpha}$, $\nabla^{(-2)i} \equiv u^-_{\alpha\mathring{A}}\gamma^i_{A\mathring{A}}P^{\alpha -}_A - u^{-\alpha}_A\gamma^i_{A\mathring{A}}P_{\alpha\mathring{A}}$, $\nabla^{(+2)i} \equiv u^+_{\alpha A}\gamma^i_{A\mathring{A}}P^{\alpha +}_{\mathring{A}} - u^{+\alpha}_{\mathring{A}}\tilde\gamma^i_{\mathring{A}A}P^+_{\alpha A}$, $\tilde\gamma^i_{\mathring{A}A} = (\gamma^i_{A\mathring{A}})$, $\gamma^i_{A\mathring{A}} - D=8$ σ-матрицы [1]).

Подчеркнем что в отличие от суперструн безмассовая суперчастица [5] и нуль-супер-p-браны [2] описываются лишь одним светоподобным вектором плотности импульса $\mathcal{P}_M$, а их действие характеризуется более высокими калибровочными симметриями $SO(1,1)\times SO(2)\times K_2$ $(D=4)$ и $SO(1,1)\times SO(8)\times K_8$ $(D=10)$, где K_2 и K_8 - лоренцевы бусты, генерируемые операторами (см. [5,6]) $\nabla^{(0|-2)}+\ldots \equiv v^{\alpha -}P^-_\alpha+\ldots$ $(D=4)$ и $\nabla^{(-2)i}+\ldots \equiv u^-_{\alpha\mathring{A}}\tilde\gamma^i_{\mathring{A}A}P^{\hat\alpha -}_A - u^{-\hat\alpha}_A\gamma^i_{A\mathring{A}}P^-_{\alpha\mathring{A}}+\ldots(D=10)$. Вследствие этого гармоники $v^\pm_\alpha$ и $u^+_{\alpha A}, u^-_{\alpha\mathring{A}}$ мгут рассматриваться как координаты однородных пространств $SO(1,3)/SO(1,1)\times SO(2)\times K_2$ $(D=4)$ и $SO(1,9)/SO(1,1)\times SO(8)\times K_8$ $(D=10)$ и вместе с ρ^τ их число - 2 $(D=4)$ или 8 $(D=10)$ в точности равно числу независимых компонент светоподобного вектора $\mathcal{P}_m$. Поэтому требование бустовой симметрии, накладываемое в [6,9] при определении лоренцевых гармоник, допустимо лишь для описания безмассовых суперчастиц [5] и нуль-супер-p-бран 2, но не суперструн.

Процедура ковариантного БРСТ-БФВ квантования формулировок (1), аналогичного квантованию нуль-супер-p-бран [2,3], изучается в настоящее время.

1. Green M.B., Schwarz J.H., Witten E. Superstring Theory. 1987, 1, Cambridge; University Press.

2) $[z^M(\sigma), \mathcal{P}_N(\sigma')]_p = -\delta^M_N\delta(\sigma-\sigma'); z^M M \equiv (x^m, \theta^\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha}, v^\mp_\alpha, \bar v^\pm_{\dot\alpha}\rho^{(-1+)\mu}, \varphi^{(+1-)\mu}$ для $D=4, N=1$ и $z^M \equiv (X^m, \theta^{\alpha 1}, u^+_{\alpha A}, u^-_{\alpha\mathring{A}}, u^{-\alpha}_A, u^{+\alpha}_{\mathring{A}}, \rho^{(+2)\mu}, \varphi^{(-2)\mu})$ для $D=10, N=2B$.

2. Bandos I.A., Zheltukhin A.A. Труды *IX* Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Дубна, 1990, с.225; Бандос И.А., Желтухин А.А. Письма в ЖЭТФ, 1990, 51, 547.

3. Бандос И.А., Желтухин А.А. Письма в ЖЭТФ, 1991, 53, 7; Phys. Lett.B , 1991, 264.

4. Newmann E.T., Penrose R., J.Math Phys., 1962, 3, 566.

5. Бандос И.А. ЯФ, 1990, 51, 1429; Письма в ЖЭТФ, 1990, 52, 837.

6. Deldus F., Galperin A., Sokatchev E. Imperial College Preprint IMPERIAL/to/90-91/26, PAR-LPTHE/91-40. London-Paris. 1991. (May).

7. Nissimov E., Pacheva S., Solomon S. Nucl. Phys. B, 1988, 296, 469: 297, 349: 299, 183; 1989, 317, 344.

8. Волков Д.В., Желтухин А.А. Укр. физ. журн. 1985, 30, 809.

9. Galperin A., Yjwe P., Stelle K. Imperial College Preprint IMPERIAL/to/90-91/London 1991.