Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 8, стр. 473 — 476 25 октября 1991 г.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДАЛГЕБРЫ ЛИ В $\bar{X}_\infty = \bar{A}_\infty$ (СООТВЕТСТВЕННО $\bar{B}_\infty, \bar{C}_\infty, \bar{D}_\infty$) И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕРШИННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

М.И.Голенищева-Кутузова, Д.Р.Лебедев[1)]

[1)]*Институт теоретической и экспериментальной физики*
117259, Москва
Институт радиотехники, электроники и автоматики
117454, Москва

Поступила в редакцию 19 сентября 1991 г.

Вводятся бесконечномерные тригонометрические подалгебры Ли в $\bar{X}_\infty = \bar{A}_\infty$ (соответственно $\bar{B}_\infty, \bar{C}_\infty, \bar{D}_\infty$), являющиеся естественным обобщениями известной тригонометрической синус-алгебры. Приводятся явные формулы вложения в $\bar{X}_\infty$, а также строится неприводимое представление серий $\bar{A}_\hbar$ и $\bar{B}_\hbar$ в терминах вершинных операторов.

1. Алгебры Каца-Муди ($A - D$-серии) вкладываются в бесконечномерные матричные алгебры Ли $\bar{X}_\infty = \bar{A}_\infty(\bar{B}_\infty, \bar{C}_\infty, \bar{D}_\infty)$ и могут рассматриваться как "периодические" редукции из $\bar{X}_\infty$ [1,2]. На языке теории интегрируемых уравнений такому вложению отвечает следующее: алгебрам Ли $\bar{X}_\infty$ соответствуют обобщенные двумеризованные цепочки Тоды, а $A - D$-серии двумеризованных цепочек являются их периодическими редукциями [3]. Пример "непериодического" вложения в $\bar{A}_\infty$ доставляет тригонометрическая синус-алгебра Ли [4]. Это вложение было открыто в [5] (и переоткрыто позднее в [6] с другой точки зрения. К сожалению, мы были проинформированы о работе [5] А.Н.Кирилловым только после опубликования нашей статьи [6]). Любопытно отметить, что в теории интегрируемых уравнений известен пример "непериодической редукции из $\bar{A}_\infty$ обобщенной двумеризованной цепочки Тоды в специальные интегрируемые уравнения [7]. Это обстоятельство явилось основным мотивом для определения и исследования общих классов "тригонометрических" Z-градуированных подалгебр в $\bar{X}_\infty$, обобщающих синус-алгебру Ли.

Отметим, что наши алгебры являются примерами широкого класса континуальных контраградиентных алгебр Ли, введенных в [8]. Мы бы хотели указать, что похожие алгебры возникали в калибровочных теориях высших спинов [9] и было бы полезно проследить эту связь явно.

2. Тригонометрическими алгебрами серии $A_\hbar$, $\hbar = (\hbar_1, ..., \hbar_k)$ будем называть алгебры Ли с образующими $A_{\alpha,m}$ и c, где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ - целочисленный вектор k-мерной плоскости $(\alpha, m) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} \backslash (0, ..., 0)$ и коммутационными соотношениями:

$$[A_{\alpha,m}, A_{\beta,l}] = 2i \sin[m(\hbar, \beta) - l(\hbar, \alpha)] A_{\alpha+\beta, m+l} + m\delta_{\alpha+\beta,\bar{0}}\delta_{m+l,0}c, \tag{1}$$

где c - центральный элемент, а $(\hbar, \alpha) = \hbar_1\alpha_1 + ... + \hbar_k\alpha_k$. Алгебру Ли (1) можно реализовать как скрещенное произведение алгебры функций на k-мерном торе $T^k = \{\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_k) | \varphi_k \mathrm{mod} 2\pi\}$ на оператор сдвига $U = e^{2(\hbar_1 \partial/\partial\varphi_1 + ... + \hbar_k \partial/\partial\varphi_k)}$. Пусть $q = (q_1, ..., q_k)$, где $q_l = e^{i\hbar_l}$ и пусть $q^\alpha = q_1^{\alpha_1}...q_k^{\alpha_k}$. Тогда образующие $A_{\alpha,m} = q^{m\alpha} e^{i(\alpha,\varphi)} U^m$ удовлетворяют (1) при $c = 0$. Мы будем обозначать алгебру Ли (1) с $c = 0$ через $A_\hbar$, тогда $\bar{A}_\hbar$ будет одномерным центральным расширением $A_\hbar$.

3. Следуя [10], выберем в $\bar{A}_\hbar$ подалгебру Гейзенберга $\vec{a}S = \{A_{\bar{0},m} | m \in \mathbb{Z}\backslash 0\}$ и максимальную коммутативную подалгебру (подалгебру Картана) $H = \{A_{\alpha,0} | \alpha \in \mathbb{Z}^k\backslash\bar{0}\}$. Определим поля $X_\alpha(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} A_{\alpha,l} z^{-l}$, где $\alpha \in \mathbb{Z}^k\backslash\bar{0}$ и z - комплексная переменная. В $\vec{S}$ и полях $X_\alpha(z)$ содержатся все образующие алгебры $A_\hbar$. Легко проверить, что выполняются следующие соотношения:

$$[A_{\bar{0},m}, X_\alpha(z)] = 2i\sin(m(\hbar,\alpha))z^m X_\alpha(z), \quad m \in \mathbb{Z}\backslash 0. \tag{2}$$

Алгебра Гейзенберга $\vec{S}$ имеет стандартное неприводимое представление в пространстве $V = C[x_1, x_2, ...]$:

$$\pi_0(A_{\bar{0},m}) = \partial/\partial x_m; \;\; \pi_0(A_{0,-m}) = mx_m; \;\; \pi_0(c) = 1, \;\; m > 0.$$

Уравнения (2), в которых $A_{\bar{0},m}$ представлены операторами $\partial/\partial x_m$, mx_m имеют единственное решение (с точностью до умножения на константы a_α) в классе дифференциальных операторов, действующих на пространстве V [10]:

$$\hat{X}_\alpha(z) = a_\alpha \exp(2i\sum_{m\geq 1} z^m \sin(m(\hbar,\alpha))x_m)\exp(2i\sum_{m\geq 1}\frac{z^{-m}}{m}\sin(m(\hbar,\alpha))\partial/\partial x_m. \tag{3}$$

Введем образующие $\hat{X}_{\alpha,l} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz z^{l-1}\hat{X}_\alpha(z)$, где интегрирование проводится по контуру Г, охватывающему точку 0. Тогда соответствие:

$$\pi(A_{\alpha,l}) = \hat{X}_{\alpha,l}, \quad \alpha \neq \bar{0};$$

$$\pi(A_{0,l}) = \partial/\partial x_l; \;\; \pi(A_{0,-l}) = lx_l, \;\; \pi(c) = 1, \;\; l > 0$$

задает неприводимое представление старшего веса $\Lambda \in H^*$, где $\Lambda(A_{\alpha,0}) = a_\alpha$, в пространстве V с вакуумным вектором $|0>= 1$. Константы a_α определяются однозначно с точностью до фазового множителя $\exp(\lambda,\alpha)$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ и равны $a_\alpha = q^\alpha/(q^\alpha - q^{-\alpha})$. Доказательство этого факта можно получить аналогично [6].

4. Нетрудно заметить, что вершинные операторы (3) получаются из вершинного оператора $\mathbb{Z}(u,v)$ [1], реализующего базисное представление алгебры Ли $\bar{A}_\infty = \hat{Gl}(\infty)$, с помощью редукции $u = zq^\alpha$, $v = zq^{-\alpha}$. Это мотивирует следующее утверждение, проверяемое непосредственно. Пусть $E_{i,j}$, $i,j \in Z$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $\hat{Gl}(\infty)$: $[E_{i,j}, E_{k,l}] = E_{i,l}\delta_{j,k} - E_{k,j}\delta_{k,l} + \psi(E_{i,j}, E_{k,l})c$, где 2-коцикл ψ на алгебре Ли $Gl(\infty)$ определяется условиями:

$$\begin{aligned} &\psi(E_{i,j}, E_{j,i}) = 1 = -\psi(E_{ji}, E_{ij}), \;\; \text{если } i \leq 0, \;\; j \geq 1 \\ &\psi(E_{i,j}, E_{k,l}) = 0 \;\; \text{в остальных случаях.} \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда явные формулы вложения $\bar{A}_\hbar$ в $\bar{A}_\infty$ имеют вид:

$$A_{\alpha,m} = q^{m\alpha}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{2n\alpha}E_{n,n+m} + \delta_{m,0}a_\alpha c, \tag{5}$$

где $a_\alpha = q^\alpha/(q^\alpha - q^{-\alpha})$. Заметим, что (5) является "максимальным" обобщением соответствующей формулы вложения из [5,6].

5. Напомним [2], что подалгебры B_∞, C_∞ и D_∞ определяются как подалгебры в A_∞, сохраняющие соответственно билинейные формы:

$< e_i, \ e_j >= (-1)^i \delta_{i,-j}$ в случае B_∞,

$< e_i, \ e_j >= (-1)^i \delta_{i,1-j}$ в случае C_∞,

$< e_i, \ e_j >= \delta_{i,1-j}$ в случае D_∞.

Одномерное центральное расширение этих алгебр задается 2-коциклом $r\psi$, где ψ определяется по (4), а $r = 1/2$ для $\bar{B}_\infty$ и $\bar{D}_\infty$ и $r = 1$ для $\bar{C}_\infty$ [2]. Тогда естественно определить тригонометрические алгебры серий $\bar{B}_\hbar$, $\bar{C}_\hbar$ и $\bar{D}_\hbar$, как одномерные центральные расширения при помощи коцикла $r\psi$ пересечений $A_\hbar$ с B_∞, C_∞ и D_∞. Прямые вычисления приводят к следующему списку результатов.

В $B_\hbar$, $C_\hbar$ и $D_\hbar$ алгебрах Ли можно выбрать тригонометрический базис:

$$B_{\alpha,m} = A_{\alpha,m} - (-1)^m A_{-\alpha,m} \qquad \text{в } B_\hbar$$

$$C_{\alpha,m} = A_{\alpha,m} - (-1)^m q^{2\alpha} A_{-\alpha,m} \quad \text{в } C_\hbar$$

$$D_{\alpha,m} = A_{\alpha,m} - q^{2\alpha} A_{-\alpha,m} \qquad \text{в } D_\hbar$$

Эти подалгебры описываются как неподвижные точки автоморфизмов второго порядка:

для $B_\hbar$ $\quad \tau_1(A_{\alpha,m}) = -(-1)^m A_{-\alpha,m}$

для $C_\hbar$ $\quad \tau_2(A_{\alpha,m}) = -(-1)^m q^{2\alpha} A_{-\alpha,m}$

для $D_\hbar$ $\quad \tau_3(A_{\alpha,m}) = -q^{2\alpha} A_{-\alpha,m}$.

Коммутационные соотношения, определяющие $\bar{B}_\hbar$, $\bar{C}_\hbar$ и $\bar{D}_\hbar$ вычисляются непосредственно и здесь не приводятся.

Формулы вложения $\bar{B}_\hbar$ в B_∞ :

$$B_{\alpha,m} = q^{m\alpha} \sum_{n\in \mathbb{Z}}{}' q^{2n\alpha}(E_{n,n+m} - (-1)^m E_{-n-m,-n}) + \delta_{m,0} b_\alpha c, \tag{6}$$

где $b_\alpha = 1/2(q^\alpha + q^{-\alpha})/(q^\alpha - q^{-\alpha})$. Формула вложения $\bar{C}_\hbar$ в $\bar{C}_\infty$:

$$C_{\alpha,m} = q^{m\alpha} \sum_{n\in \mathbb{Z}}{}' q^{2n\alpha}(E_{n,n+m} - (-1)^m E_{1-n-m,1-n}) + 2\delta_{m,0} a_\alpha c. \tag{7}$$

Формула вложения $\bar{D}_\hbar$ в $\bar{D}_\infty$:

$$D_{\alpha,m} = q^{m\alpha} \sum_{n\in \mathbb{Z}}{}' q^{2n\alpha}(E_{n,n+m} - E_{1-n-m,1-n}) + \delta_{m,0} a_\alpha c. \tag{8}$$

Формулы (5)-(8) позволяют построить представление алгебр Ли $A_\hbar - D_\hbar$ в пространстве $C^\infty(S^1)$ - комплекснозначных функций на окружности $S^1 = \{\varphi_1 \mathrm{mod} 2\pi\}$:

$$A_{\alpha,m} \to q^{-m\alpha} e^{-im\varphi_1} e^{-2(\hbar,\alpha)\partial/\partial\varphi_1}.$$

Отметим, что в случае серии $\bar{B}_\hbar$ можно также построить базисное представление в терминах вершинных операторов. Соответствующие операторы получаются из $\frac{1}{2}\frac{u-v}{u+v}(\Gamma_B(u,v) - 1)$ (см. [2] стр.228) с помощью анзаца $u = zq^\alpha$, $v = -zq^{-\alpha}$.

6. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть $\hbar = \hbar_1$ и $\hbar_1 \notin \pi \mathbb{Q}$, тогда $\bar{A}_{\hbar_1}$ изоморфна синус-алгебре [1], являющейся квантованием по Вейлю алгебры $C^\infty(T^2)$ - функций на двумерном торе $T^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \mathrm{mod} 2\pi\}$ со скобкой Пуассона. Тогда подалгебры $B_{\hbar_1}$ и $C_{\hbar_1}$ в классическом пределе дают подалгебру в $C^\infty(T^2)$, состоящую из функций, обладающих дополнительной симметрией $f(\varphi_1 + \pi, -\varphi_2) = -f(\varphi_1, \varphi_2)$. Алгебра $D_{\hbar_1}$ является квантованием пуассоновой подалгебры в $C^\infty(T^2)$ с дополнительным условием $f(\varphi_1, -\varphi_2) = -f(\varphi_1, \varphi_2)$.

б) Пусть $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$, $\hbar_1 \notin \pi \mathbb{Q}$. Рассмотрим вначале серию $\bar{A}_\hbar$. В силу (5), образующие $A_{\alpha,m}$ удовлетворяют дополнительным соотношениям $A_{n_1+rN,n_2,m} = (-1)^{mr} A_{n_1,n_2,m}$, $r \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\bar{A}_{N,\hbar_1}$ факторалгебу по этим соотношениям. В пределе $\hbar_1 \to 0$ эта алгебра совпадает с алгеброй Ли Каца-Муди серии $\bar{A}^{(1)}_{N-1}$. Поэтому $\bar{A}_{N,\hbar_1}$ можно рассматривать как квантовую деформацию $\bar{A}^{(1)}_{N-1}$.

Аналогично определенные алгебры Ли $\bar{B}_{N,\hbar_1}$, $\bar{C}_{N,\hbar_1}$ и $\bar{D}_{N,\hbar_1}$ имеют следующие пределы при $\hbar_1 \to 0:$ $\bar{B}_{N,\hbar_1}$ при $N = 4l$ переходит в $\bar{D}^{(1)}_{2l}$; $\bar{C}_{N,\hbar_1}$ при $N = 2l$ переходит в $\bar{C}^{(1)}_l$. $\bar{D}_{N,\hbar_1}$ при $N = 2l$ переходит в $\bar{D}^{(1)}_l$, а при $N = 2l+1$ в $\bar{B}^{(1)}_l$.

Авторы благодарят О.Огиевецкого и Е.Хоппе за конструктивные замечания, М.Васильева и С.Костейна за полезные обсуждения. Один из авторов (Д.Л.) выражает благодарность Штефану Тайзону и Институту Теоретической Физики университета Карлсруэ за организацию финансовой поддержки.

---

1. Jimbo M., Miwa T. Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras. Preprint, RIMS, 439, 1983.
2. Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebras, Cambridge: Univ. Press, 1985.
3. Ueno K., Takasaki K. Advanced Studies in Pure Math., 1984, 4, 1.
4. Fairlie D., Fletcher P., Zachos C. Phys. Lett. B, 1989, 218, 203.
5. Floratos E.G. Phys. Lett. B, 1989, 232, 467.
6. Голенищева-Кутузова М.И., Лебедев Д.Р. Письма в ЖЭТФ, 1990, 52, 1164.
7. Lebedev D., Orlov A., Pakuliak S., Zabrodin A. Preprint Bonn-HE-91-05.
8. Saveliev M.V., Vershik A.M. Phys. Lett. A, 1990, 143, 121; Comm. Math. Phys., 1989, 126, 367.
9. Konstein S.E., Vasiliev M.A. Nucl. Phys. B, 1989, 312, 402.
10. Lepowsky J., Wilson R. Comm. Math. Phys., 1978, 62, 43; Kac V. et al. Adv. Math., 1981, 42, 83.