Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 8, с. 539 – 545 © 2021 г. 25 апреля

О неустойчивостях заполненного вихря в двухкомпонентном Бозе-конденсате

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 16 марта 2021 г.
После переработки 18 марта 2021 г.
Принята к публикации 18 марта 2021 г.

Численно исследуется двухкомпонентный Бозе-конденсат холодных атомов с достаточно сильным перекрестным отталкиванием, которое приводит к пространственному разделению компонент. Рассмотрены конфигурации с кратным квантованным вихрем в одной из компонент, причем сердцевина вихря заполнена второй компонентой. Эффективный радиус сердцевины может намного превышать ширину переходной области между компонентами, и тогда имеется аналогия с заполненным цилиндрическим вихрем в классической гидродинамике двух несмешивающихся идеальных жидкостей. Эта аналогия позволяет проанализировать продольную "сосисочную" неустойчивость и обусловленную "тангенциальным разрывом" поперечную неустойчивость заполненного вихря в конденсате, а также устойчивый режим в параметрическом промежутке между ними. Численно обнаружены долгоживущие когерентные структуры, формирующиеся в некоторых случаях на нелинейных стадиях обеих неустойчивостей.

DOI: 10.31857/S1234567821080085

В теории Бозе-Эйнштейновских конденсатов холодных атомов заметное внимание привлекли к себе многокомпонентные модели. Например, речь может идти об одновременном наличии двух газов из разных химических элементов, либо из атомов одного и того же элемента, но в двух различных внутренних квантовых состояниях [1–5]. Стационарные конфигурации, неустойчивости и нелинейная динамика таких систем оказываются весьма богатыми [6–17], даже в сравнении со всем тем многообразием свойств и режимов, которые были обнаружены в однокомпонентных конденсатах [18, 19] (где, кстати сказать, уже одни только квантованные вихри составили отдельное направление исследований [20–28]).

В частности, очень интересными когерентными структурами являются заполненные вихри, когда имеется квантованный вихрь кратности Q в одной из компонент конденсата, и при этом сердцевина данного вихря представляет собой потенциальную яму для другой ("светлой") компоненты [29–31]. Равновесный профиль ямы определяется самосогласованным образом и может очень сильно отличаться от профиля "пустого" вихря в однокомпонентном конденсате. Главное различие – существенно бóльшая ширина кора. Линейная устойчивость таких трехмерных конфигураций исследовалась в работе [31], где был обнаружен ряд неустойчивых мод и приведены численные примеры переходов в нелинейные режимы. Кроме того, заполненные вихри с достаточно большими значениями $Q \sim 10\ldots30$ в захваченных конденсатах моделировались численно с целью демонстрации квантовой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в конечных системах [12, 13]. Но, вообще говоря, проблема изучена пока далеко не всесторонне. Целью данной работы является упрощенное по сравнению с [31] рассмотрение двух главных неустойчивостей – продольной неустойчивости "сосисочного" типа [32], а также поперечной неустойчивости (типа Кельвина–Гельмгольца). Будет показано, что обе неустойчивости управляются одним параметром, и что при умеренных значениях $Q \lesssim 5$ имеется устойчивая область между ними.

Начнем с замечаний общего характера. Обезразмеренные уравнения движения для волновых функций $A(\mathbf{r},t)$ и $B(\mathbf{r},t)$ имеют вид связанных уравнений Гросса–Питаевского [1, 3]:

$$i\dot{A} = -\frac{1}{2}\nabla^2 A + \left(V_1 + g_{11}|A|^2 + g_{12}|B|^2\right) A, \qquad (1)$$

$$i\dot{B} = -\frac{1}{2\nu}\nabla^2 B + \left(V_2 + g_{12}|A|^2 + g_{22}|B|^2\right) B, \qquad (2)$$

где $\nu = M_2/M_1$ – отношение масс атомов, $V_\alpha(\mathbf{r},t)$ – внешние потенциалы, $g_{\alpha\beta}$ – симметричная матрица нелинейных взаимодействий. Нас здесь будет интересовать случай положительных $g_{\alpha\beta}$. Без ограничения общности можно положить $g_{11} = \kappa$, $g_{22} = 1/\kappa$, так что $g_{11}g_{22} = 1$ и в динамической системе (1)–(2)

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

имеется всего три существенных безразмерных параметра (если не считать внешние потенциалы): ν, κ и $g = g_{12} - 1$. Ясно, однако, что за относительную простоту данной модели, применимой только в пределе нулевой температуры, приходится расплачиваться отказом от рассмотрения любых эффектов, обусловленных конечностью температуры. Для сравнения, уравнения движения намного более сложны (да и термодинамика играет первостепенную роль), например, в ^{3}He [33], где также возможны заполненные вихри (более сложной структуры, чем рассматриваемые здесь; см. [34]).

При условии преобладания перекрестного отталкивания $g > 0$ компоненты конденсата стремятся пространственно разделиться [6, 7] (поэтому g можно назвать параметром сегрегации). Например, в отсутствие внешних сил в равновесии образуется переходный слой, представляющий собой стационарное одномерное решение системы уравнений (1)–(2)

$$A = a(x)\exp(-i\mu\sqrt{g_{11}}t), \quad B = b(x)\exp(-i\mu\sqrt{g_{22}}t),$$

с действительными функциями $a(x)$ и $b(x)$. С этим слоем связана некоторая дополнительная энергия – эффективное поверхностное натяжение [7, 11]

$$\sigma = \min\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[a'^2/2 + b'^2/(2\nu) + ga^2b^2 + \\ + (\sqrt{g_{11}}a^2 + \sqrt{g_{22}}b^2 - \mu)^2/2\Big]dx. \quad (3)$$

Согласно принципу Мопертюи из классической механики, эту же величину можно представить в виде

$$\sigma = \min\int_{(a_1,0)}^{(0,b_2)}\sqrt{[(da)^2 + (db)^2/\nu]}\times \\ \times\sqrt{2ga^2b^2 + (\sqrt{g_{11}}a^2 + \sqrt{g_{22}}b^2 - \mu)^2}, \quad (4)$$

где интеграл берется по произвольной кривой [в плоскости (a, b)], начинающейся в точке $a_1 = \mu^{1/2}g_{11}^{-1/4}$, $b_1 = 0$, и заканчивающейся в точке $a_2 = 0$, $b_2 = \mu^{1/2}g_{22}^{-1/4}$. Нетрудно видеть, что параметр μ может быть полностью вынесен наружу в виде множителя $\mu^{3/2}$ путем замены $(a, b) = \sqrt{\mu}(\alpha, \beta)$. В случае малых значений $g \ll 1$ оптимальная траектория проходит вблизи эллипса $\sqrt{g_{11}}\alpha^2 + \sqrt{g_{22}}\beta^2 = 1$, а само значение σ оказывается порядка $\mu^{3/2}\sqrt{g}$ (более точное выражение имеется в [11]). Ширину переходного слоя между двумя компонентами можно оценить как $w \sim 1/\sqrt{g\mu}$.

Наличие поверхностного натяжения делает крупномасштабную динамику поверхности раздела в сегрегированном бинарном конденсате во многом подобной динамике пузырей в классической механике несмешивающихся идеальных жидкостей [15–17]. При этом течение потенциально внутри каждой из компонент, а вся завихренность поля скорости сосредоточена на разделяющей поверхности. В этом смысле граница пузыря представляет собой вихревой лист, в некоторых случаях напоминающий вихревые листы в ^{3}He-A [35]. Аналогия с классической гидродинамикой работает, однако, далеко не всегда – например, равновесные состояния вращающихся бинарных конденсатов имеют сложную “мелкую” структуру [9, 10, 14].

Перейдем к рассмотрению заполненных вихрей. Пусть, для определенности, A будет вихревой компонентой, B – светлой компонентой. В зависимости от количества светлой компоненты, вихрь может находиться в различных режимах. Если количество светлой компоненты настолько мало, что радиус R сердцевины вихря мало отличается от толщины переходного слоя w, то в динамическом смысле вихрь продолжает оставаться эффективно одномерным объектом. Разумеется, инерция заполненного вихря, как и его увеличенная толщина, заметно модифицируют динамику по сравнению с пустым вихрем, приводя в ряде случаев к появлению неустойчивостей (о таком режиме речь пойдет в другой работе).

Здесь же будут рассмотрены те эффекты, которые проявляются при $R \gg w$, когда в системе возбуждаются степени свободы, связанные с отличием формы поперечного сечения от равновесной циркулярной. Вместо одномерного объекта – вихревой нити, мы в этой ситуации имеем, по сути, двумерную поверхность искаженного цилиндра, которая разделяет два конденсата. Типичные скорости движения при этом существенно меньше скорости звука. Поэтому имеется аналогия с заполненным цилиндрическим вихрем в классической гидродинамике двух несмешивающихся идеальных жидкостей (с постоянными плотностями $\rho_{\rm in} = \nu\mu/\sqrt{g_{22}}$ и $\rho_{\rm out} = \mu/\sqrt{g_{11}}$, поверхностным натяжением σ и циркуляцией $\Gamma = 2\pi\tilde{\Gamma}$). В стационарном состоянии внутренняя жидкость покоится, а внешняя имеет азимутальную скорость $v_\phi = \tilde{\Gamma}/\sqrt{x^2 + y^2}$.

Для подобного классического заполненного вихря известны два типа неустойчивостей, в зависимости от величины параметра $\Xi = \sigma R/(\rho_{\rm out}\tilde{\Gamma}^2)$. Во-первых, при $\Xi > 1$ развивается трехмерная продольная неустойчивость “сосисочного” типа [32]. Ее происхождение легко понять, записав эффективную потенциальную энергию $\mathcal{U}$ осесимметричных движений (сумму поверхностной энергии и кинетической энергии азимутального течения во внешней области) в терминах канонической переменной

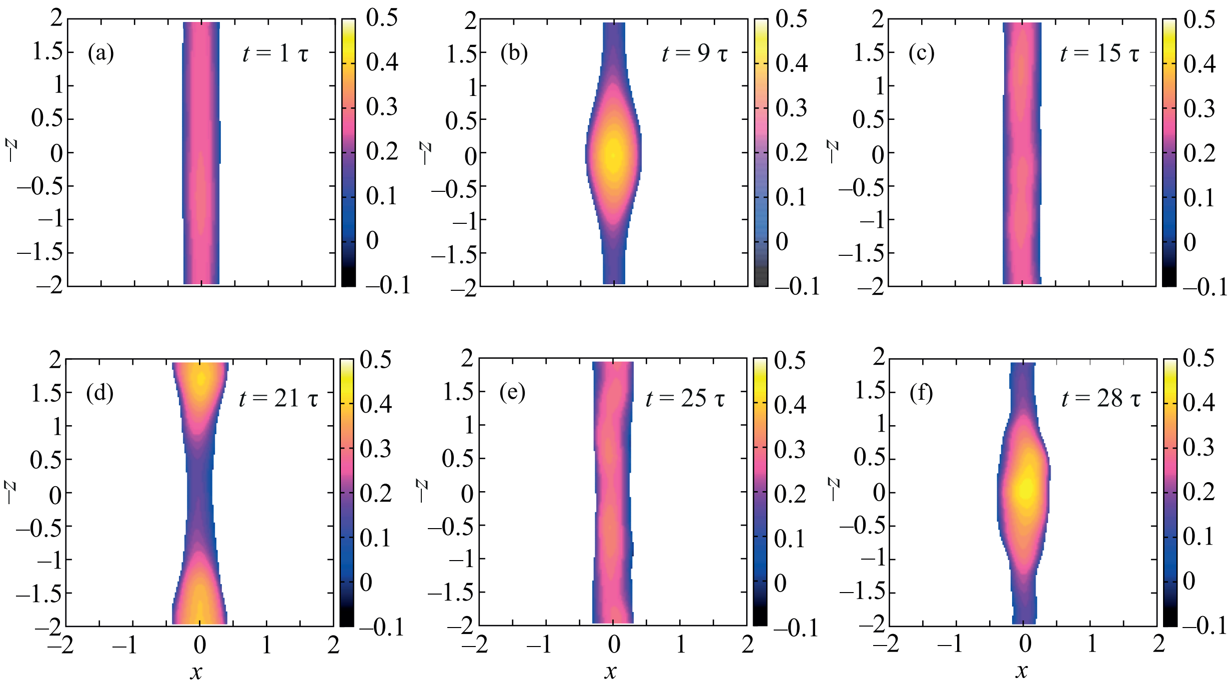

Рис. 1. (Цветной онлайн) Пример развития "сосисочной" неустойчивости заполненного вихря и возврата к слабовозмущенному состоянию. Цветом показана y-координата условной границы раздела. Значения параметров: $Q = 1$, $g = 0.05$, $N_2/N_1 = 1.7/25.8$. Искажения постепенно накапливаются, но в замедляющемся темпе

$S(z) = r^2(z)/2$, пропорциональной площади поперечного сечения:

$$\mathcal{U}\{S(z)\} = \pi \int \Big[2\sigma\sqrt{2S + S'^2} - \rho_{\rm out}\tilde{\Gamma}^2 \ln(\sqrt{2S}/R)\Big] dz. \tag{5}$$

Именно при $\Xi > 1$ данный функционал в квадратичном по отклонениям $s = (S - R^2/2)$ приближении имеет отрицательный коэффициент на достаточно малых волновых числах k_z.

Во-вторых, поскольку имеется тангенциальный разрыв скорости течения на границе вихря, то в игру может вступить неустойчивость типа Кельвина–Гельмгольца. Рассмотрение линеаризованных консервативных уравнений, описывающих чисто двумерные малые возмущения поперечного сечения классического заполненного вихря, приводит без особого труда к закону дисперсии для азимутальных мод в виде

$$\omega_m = \frac{\tilde{\Gamma}}{R^2(1+\rho)}\Big\{m + \\ + \sqrt{(1+\rho)|m| - \rho m^2 + (1+\rho)\Xi|m|(m^2-1)}\Big\}, \tag{6}$$

где $\rho = \rho_{\rm in}/\rho_{\rm out}$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. При достаточно малых $\Xi < \Xi_{\rm c}(\rho)$ выражение под корнем может принимать отрицательные значения. При этом оказываются неустойчивыми несколько мод с номерами $1 < m_{\min} \le |m| \le m_{\max}$. Например, при равных плотностях $\Xi_{\rm c}(1) = 1/15$, причем мода с $m = 2$ остается устойчивой.

Из сравнения условий обеих неустойчивостей видно, что имеется также "окно устойчивости" $\Xi_{\rm c}(\rho) < \Xi < 1$.

Во избежание недоразумений надо отметить, что вышеприведенный закон дисперсии и следующее из него условие устойчивости консервативного вихря отличаются от таковых для диссипативного заполненного вихря, рассмотренного в работе [34]. Диссипативный вихрь для устойчивости обязан находиться вблизи строгого минимума свободной энергии и динамика его содержит элементы "градиентного спуска", тогда как наш вихрь описывается гамильтоновой динамикой при значении интеграла энергии, не соответствующем статическому минимуму.

Аналогия между бинарным конденсатом и двухжидкостной классической системой подсказывает, что похожие неустойчивые и устойчивые режимы должны существовать и для кратного вихря в конденсате, в зависимости от параметра $\sigma R/(\rho_{\rm out}Q^2) \sim \sim \sqrt{g\mu}R/Q^2$. Разумеется, полного соответствия ожидать не приходится, хотя бы ввиду конечной толщины переходного слоя.

Чтобы подтвердить эти соображения, автором было проведено численное моделирование системы эволюционных уравнений (1)–(2) при значениях па-

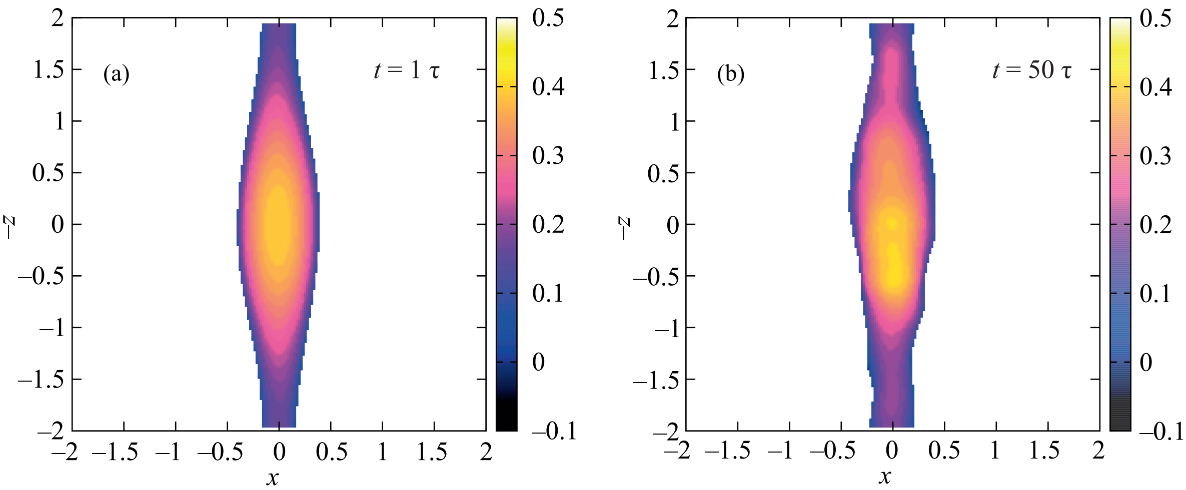

Рис. 2. (Цветной онлайн) Пример приблизительно стационарной "сосисочной" структуры. Значения параметров: $Q = 1$, $g = 0.05$, $N_2/N_1 = 1.9/25.6$

раметров $\nu = 1$, $g_{11} = g_{22} = 1$ и нескольких малых значениях $g = 0.01, 0.02, 0.05, 0.10$. Был использован Фурье-метод расщепленного шага по времени (*Split-Step Fourier Method*) и периодические граничные условия по пространственным координатам. Точность вычислений контролировалась сохранением интеграла энергии и двух интегралов "числа частиц" N_1 и N_2 вплоть до 5-го десятичного знака.

Поскольку в численном эксперименте иметь дело с однородным конденсатом довольно трудно из-за дальнодействующей природы вихрей, здесь вводился внешний квадратичный потенциал $V_1 = V_2 = (x^2 + y^2)/2$. Это приводило к практической поперечной ограниченности конденсата размером $R_\perp = \sqrt{2\mu}$ и сводило на нет взаимодействие с поперечной границей вычислительной области. Достаточно большой химический потенциал $\mu = 40$ обеспечивал необходимые условия $w \ll R \ll R_\perp$. Сам равновесный радиус вихря R задавался непрямым образом через соотношения "чисел частиц" N_1 и N_2 с помощью специальной численной процедуры, дающей примерно равновесный начальный профиль вихря с небольшими возмущениями формы поверхности раздела. Типичными значениями были $R \sim 2$.

Чтобы не иметь дела с большими числами, на рис. 1–5 произведено перемасштабирование координат к $R_\perp \to \sqrt{3} \approx 1.7$. Вычислительная область при этом представляет собой куб со стороной $2\pi/1.6 \approx 4$. Для масштаба по времени использовано число $\tau = 2\mu/(3 \cdot 2.56) \approx 10$. Волновые функции также удобно перемасштабировать: $(A, B) = \sqrt{\mu}(\psi, \psi_b)$. Это дает равновесный профиль суммарной плотности $(|\psi|^2 + |\psi_b|^2) \approx [1 - (x^2 - y^2)/3]$.

На рисунке 1 приведен пример развития не слишком сильной "сосисочной" неустойчивости. В силу инерционности процесса, "пузырь" на вихре собирается и распадается несколько раз. В других симуляциях, с бо́льшим значением g, пузырь был почти сферическим и затем обычно уходил от оси системы с последующим разрушением на границе конденсата. Этот случай здесь не показан.

Если начальную конфигурацию задать сразу с утолщением на вихре (и с приблизительно нулевой полоидальной скоростью), то такой пузырь может в течение довольно долгого времени сохранять свою идентичность, оставаясь в относительно неизменной форме, близкой к экстремали функционала (5) при дополнительном ограничении $\int S dz = \text{const}$. Впрочем, трехмерные искажения все-таки постепенно накапливаются. На рисунке 2 показан соответствующий пример.

На рисунке 3 проиллюстрировано развитие поперечной неустойчивости. В данном примере наиболее неустойчивой оказалась мода с $m = 2$, что расходится с предсказанием классической модели. Причиной этого, по всей видимости, является не слишком большое отношение R/w (в этом случае, наряду с поверхностным натяжением, включается также изгибная энергия поверхности раздела). Здесь самое существенное отличие от предыдущего примера – использование достаточно большого заряда вихря $Q = 5$ с целью уменьшения параметра $\sqrt{g\mu}R/Q^2$. Сечение вихря сначала из круглого становится эллиптическим, затем снова приблизительно круглым, после чего опять вытягивается и потом приобретает неправильную форму. На конечной стадии запол-

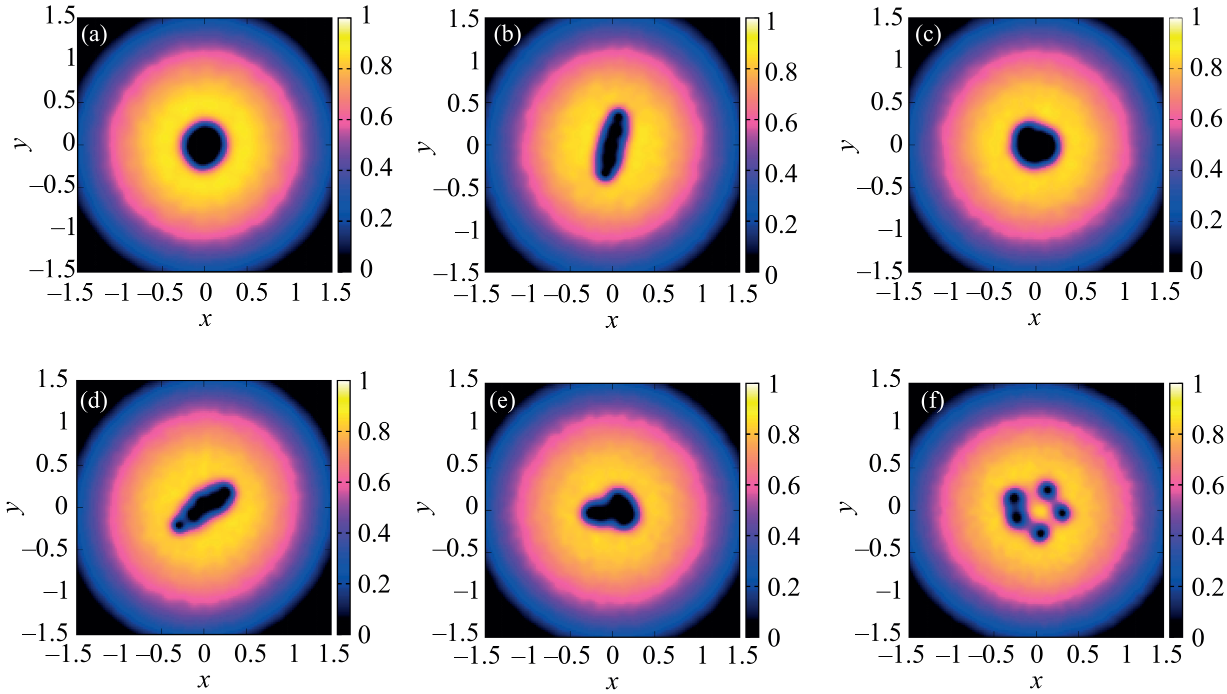

Рис. 3. (Цветной онлайн) Пример развития поперечной неустойчивости заполненного вихря. Цветом показана перемасштабированная плотность вихревой компоненты в сечении $z = 0$ в моменты времени: (a) – $t = 1\tau$; (b) – $t = 6\tau$; (c) – $t = 9\tau$; (d) – $t = 12\tau$; (e) – $t = 16\tau$; (f) – $t = 28\tau$. Значения параметров: $Q = 5$, $g = 0.05$, $N_2/N_1 = 1.0/24.8$

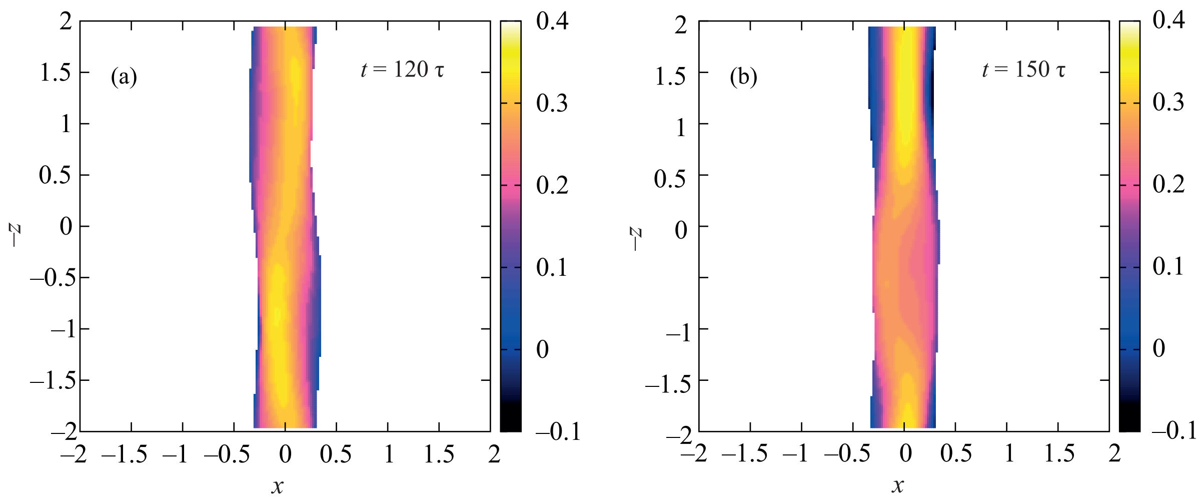

Рис. 4. (Цветной онлайн) Когерентные структуры на нелинейной стадии поперечной неустойчивости. Значения параметров: $Q = 5$, $g = 0.05$, $N_2/N_1 = 1.4/24.6$

ненный кратный вихрь превращается в пучок одинарных заполненных вихрей. Для сравнения, в (не представленном здесь) случае с $Q = 4$ и примерно таким же радиусом R динамика оставалась устойчивой. Однако при уменьшении параметра сегрегации до значения $g = 0.01$ и меньшем заполнении кора $N_2/N_1 \approx 0.7/25.7$ неустойчивость развивалась по качественно похожему сценарию также и с $Q = 4$.

Интересно отметить, что именно кратные заполненные вихри попадают в зону устойчивости, тогда как в однокомпонентном конденсате кратные вихри неустойчивы.

Что существенно, при меньшем уровне надкритичности поперечная неустойчивость может приводить к спонтанному формированию долгоживущих трехмерных когерентных структур. На рисунках 4 и 5 приведены результаты численного эксперимента,

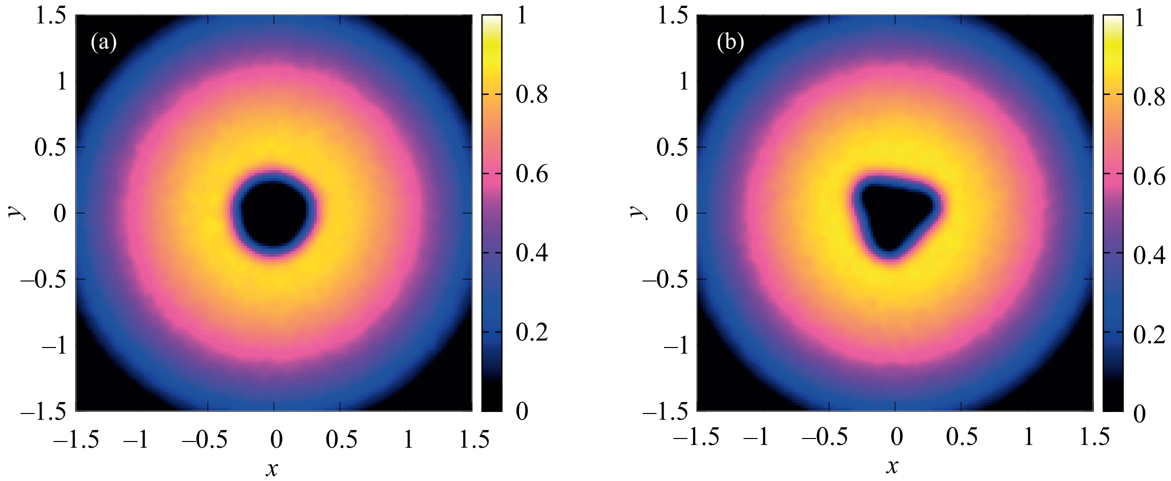

Рис. 5. (Цветной онлайн) Поперечные сечения вихря в плоскости $z = 0$, соответствующие моментам времени, представленным на рис. 4: (a) – $t = 120\tau$; (b) – $t = 150\tau$

в котором было увеличено заполнение вихря светлой компонентой по сравнению с рис. 3. Критический параметр при этом увеличился и приблизился к краю неустойчивой зоны, хотя и остался в ней. Наиболее неустойчивой оказалась мода с $m = 3$, в результате чего сечение вихря на большей его части стало представлять собой округлый треугольник. Параметры этого сечения (угол поворота за вычетом однородного равномерного вращения и отклонение от круглой формы) зависели от времени и продольной координаты. Можно отметить отдаленную аналогию подобных вихрей с неосесимметричными вихрями в сверхтекучем ^{3}He-B [36].

Таким образом, в данной работе предложен критический параметр, который качественно определяет устойчивые и неустойчивые режимы в динамике сильно заполненного квантового вихря в бинарном сегрегированном Бозе-конденсате. Приведены численные примеры для неустойчивых режимов, в том числе с долгоживущими трехмерными когерентными структурами.

1. T.-L. Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996).
2. P. S. Julienne, F. H. Mies, E. Tiesinga, and C. J. Williams, Phys. Rev. Lett. **78**, 1880 (1996).
3. H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998).
4. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).
5. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).
6. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).
7. E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998).
8. S. T. Chui, V. N. Ryzhov, and E. E. Tareyeva, JETP Lett. **75**, 233 (2002) [Pis'ma v ZhETF **75**, 279 (2002)].
9. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **91**, 150406 (2003).
10. K. Kasamatsu and M. Tsubota, Phys. Rev. A **79**, 023606 (2009).
11. B. van Schaeybroeck, Phys. Rev. A **78**, 023624 (2008).
12. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).
13. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).
14. P. Mason and A. Aftalion, Phys. Rev. A **84**, 033611 (2011).
15. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).
16. S. Gautam and D. Angom, Phys. Rev. A **81**, 053616 (2010).
17. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. A **85**, 013602 (2012).
18. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
19. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford (2003).
20. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **62**, 063617 (2000).
21. A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
22. A. Aftalion and I. Danaila, Phys. Rev. A **68**, 023603 (2003).
23. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, Phys. Rev. A **74**, 041603(R) (2006).
24. В. А. Миронов, Л. А. Смирнов, Письма в ЖЭТФ **95**, 627 (2012).

25. S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaime, R. N. Bisset, C. F. Barenghi, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, Phys. Rev. X **7**, 021031 (2017).
26. C. Ticknor, W. Wang, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **98**, 033609 (2018).
27. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **108**, 638 (2018).
28. C. Ticknor, V. P. Ruban, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **99**, 063604 (2019).
29. K. J. H. Law, P. G. Kevrekidis, and L. S. Tuckerman, Phys. Rev. Lett. **105**, 160405 (2010); Erratum: Phys. Rev. Lett. **106**, 199903 (2011).
30. M. Pola, J. Stockhofe, P. Schmelcher, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **86**, 053601 (2012).
31. S. Hayashi, M. Tsubota, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **87**, 063628 (2013).
32. J. Ponstein, Appl. Sci. Res. A **8**, 425 (1959).
33. M. M. Salomaa and G. E. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987).
34. Г. Е. Воловик, Т. Ш. Мисирпашаев, Письма в ЖЭТФ **51**, 475 (1990).
35. Г. Е. Воловик, Успехи физических наук **185**, 970 (2015).
36. Y. Kondo, J. S. Korhonen, M. Krusius, V. V. Dmitriev, Y. M. Mukharsky, E. B. Sonin, and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **67**, 81 (1991).