Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 9, с. 612 – 619 © 2021 г. 10 мая

Ультразвуковой диссипативный солитон в неравновесном парамагнитном кристалле

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 191991 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 апреля 2021 г.
После переработки 5 апреля 2021 г.
Принята к публикации 5 апреля 2021 г.

Исследовано распространение ультразвукового импульса гигагерцового диапазона в низкотемпературном кристалле, содержащем парамагнитные ионы с инверсной населенностью зеемановских подуровней резонансного спин-фононного перехода. В приближении быстрой фазовой релаксации для локальной относительной деформации импульса получено интегро-дифференциальное параболическое уравнение с нелинейным автономным источником и необратимыми потерями. Найдено и детально проанализировано точное аналитическое решение этого уравнения в виде диссипативного солитона с несимметричным временным профилем. Скорость солитона близка к линейной групповой скорости ультразвука. Показано, что такой солитон может сформироваться только при условии, что помимо потерь, обусловленных фазовой релаксацией спин-фононных переходов, присутствуют необратимые потери, которые вызваны процессами, не связанными со спин-фононными переходами.

DOI: 10.31857/S1234567821090081

1. Введение. Развитие нелинейной оптики и физической акустики во многом идет параллельными курсами. Обнаружение нелинейных эффектов в оптике стимулировало поиск соответствующих акустических аналогов [1]. Это касается многих нелинейных и когерентных явлений, включая динамику солитонов оптической и акустической природы [2]. Так, через несколько лет после обнаружения резонансного оптического явления самоиндуцированной прозрачности (СИП) [3] был всесторонне исследован его акустический аналог (АСИП) в парамагнитных кристаллах [4–6]. Явление АСИП для ультразвуковых импульсов гигагерцового диапазона экспериментально наблюдалось в парамагнитном кристалле при температурах жидкого гелия. В работах [7–9] были продемонстрированы как сходства, так и отличия между солитонами СИП и АСИП.

В последнее время большой интерес вызывают исследования оптических диссипативных солитонов [10–19]. Вызвано это как фундаментальными, так и прикладными аспектами.

Для формирования диссипативных солитонов необходимо наличие нелинейного автономного источника энергии и ее диссипации [11]. Взаимная компенсация притока энергии и ее диссипации способна привести к образованию устойчивой локализованной структуры – диссипативного солитона. Следствием такого механизма является то, что состояние среды после прохождения в ней диссипативного солитона испытывает необратимые изменения [20–23]. Это существенно отличает диссипативные солитоны от консервативных, возвращающих среду к исходному состоянию [3–5, 8, 9]. В отличие от консервативных солитонов диссипативные солитоны не обладают свободными параметрами, определяемыми условиями на входе в нелинейную среду. Из-за диссипации необратимо теряется точная память о входных условиях. Как правило, существуют широкие области входных параметров, приводящих к формированию одних и тех же диссипативных солитонов. Таким образом, зависимость от входных условий является достаточно грубой. Ситуация здесь аналогична предельному циклу в теории автоколебаний, который может формироваться из начальных условий, принадлежащих широким областям фазового пространства.

Устойчивость диссипативных солитонов по отношению к изменениям входных условий наталкивает на мысль о возможности использования данных солитонов в системах передачи, обработки и записи ин-

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

формации [11, 16]. Кроме того, они могут оказаться полезными в управлении механическим движением различных микро- и нанообъектов [24–26].

Отмеченная выше оптико-акустическая аналогия дает основания полагать, что исследования акустических диссипативных солитонов могут оказаться столь же важными и плодотворными, как и работы, связанные с диссипативными солитононами оптической природы. Определенный оптимизм в данном направлении вселяют современные разработки по измерению локальных характеристик высокочастотного ультразвука в поликристаллических средах [27].

Необходимый для формирования диссипативных солитонов приток энергии в ультразвуковой сигнал может быть обеспечен за счет индуцированных спин-фононных переходов с инверсной населенностью зеемановских подуровней парамагнитных ионов. На этом принципе базируется идея создания фононного мазера – генератора когерентного ультразвука микроволновых частот [28–31].

Настоящая работа посвящена исследованию возможности формирования диссипативных акустических солитонов в твердом теле, содержащем примесные парамагнитные ионы, которые резонансно взаимодействуют с когерентными колебаниями кристаллической решетки.

2. Основные уравнения. Направим оси декартовой системы координат вдоль осей симметрии четвертого порядка кубического кристалла. Пусть ультразвуковой импульс продольной упругой деформации с несущей частотой ω распространяется вдоль одной из осей четвертого порядка, совпадающей с осью x. Вдоль другой оси z четвертого порядка приложено внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$, вызывающее зеемановские расщепления квантовых состояний примесных парамагнитных ионов. Будем считать, что парамагнитные ионы обладают эффективным спином $S = 1$. Известно, что ионы с таким спином наиболее эффективно взаимодействуют с колебаниями кристалла [30]. В качестве примеров можно привести ионы Fe^{2+} или Ni^{2+} в матрице кубического кристалла MgO [4]. Данное спин-фононное взаимодействие осуществляется благодаря механизму Фохта [2]. Акустические волны деформации создают в кристалле градиенты внутреннего электрического поля. За счет этого возникают электрические квадрупольные переходы между квантовыми зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов.

Для описания самосогласованной динамики поля деформации и состояний парамагнитных ионов используем полуклассический подход. В этом случае поле описывается классическими уравнениями теории упругости, а эффективные спины парамагнитных ионов – уравнениями квантовой механики.

Гамильтониан эффективного спина $S = 1$, помещенного в магнитное поле $\mathbf{B}$ и взаимодействующего с полем упругой продольной деформации, представим следующим образом [4]:

$$\hat{H}_s = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{1}$$

где

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{S}_z, \quad \hat{V} = G\hat{S}_x^2\frac{\partial u_x}{\partial x}, \tag{2}$$

$\omega_0 = 2g\mu_B B/\hbar$ – характерная частота зеемановского расщепления, μ_B – магнетон Бора, g – фактор Ланде, $\hbar$ – постоянная Планка, G – постоянная спин-фононного взаимодействия, u_x – компонента вектора $\mathbf{u}$ смещения кристаллической решетки из положения равновесия в месте расположения парамагнитного иона; спиновые матрицы имеют вид [31]

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Дополним спиновый гамильтониан классическим гамильтонианом для поля продольной деформации

$$H_a = \int\left[\frac{p_x^2}{2\rho} + \frac{\rho a^2}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2\right]d^3\mathbf{r}, \tag{4}$$

где ρ – средняя объемная плотность кристалла, p_x – продольная компонента плотности импульса поля деформации, a – линейная скорость продольного ультразвука.

Интегрирование в (4) ведется по объему всего кристалла.

Элементы $\rho_{\mu\nu}$ матрицы плотности $\hat{\rho}$ эффективного спина подчиняются уравнению фон Неймана $i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}_s, \hat{\rho}\right] - i\hbar\hat{\Gamma}_r\hat{\rho}$, где $\hat{\Gamma}_r$ – оператор необратимой релаксации. Характерное время T_1 релаксации населенностей квантовых уровней эффективного спина обычно на несколько порядков превышает характерные длительности τ_p задействованных в экспериментах ультразвуковых импульсов [4]. Поэтому везде ниже будем пренебрегать релаксацией диагональных элементов матрицы плотности. Тогда из уравнения фон Неймана, а также из (1)–(3) придем к выводу, что спин-фононные переходы $1 \leftrightarrow 2$ и $2 \leftrightarrow 3$, при которых изменение ΔS_z проекции эффективного спина на направление магнитного поля равно ± 1, в выбранной геометрии запрещены.

Для квантового перехода $1 \leftrightarrow 3$, при котором $\Delta S_z = \pm 2$, имеем систему уравнений

$$\frac{\partial \rho_{13}}{\partial t} = \left(i\omega_0 - \frac{1}{T_2}\right)\rho_{13} - 2i\Omega W, \tag{5}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -i\Omega(\rho_{13} - \rho_{13}^*), \tag{6}$$

где $W = (\rho_{33} - \rho_{11})/2$, T_2 – время необратимой фазовой релаксации рассматриваемого перехода,

$$\Omega = \frac{G\varepsilon}{2\hbar}, \tag{7}$$

$\varepsilon \equiv \partial u_x/\partial x$ – локальная относительная деформация, создаваемая ультразвуковым импульсом.

Согласно полуклассическому подходу, для поля упругой деформации используем классические уравнения Гамильтона [32]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_x}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta u_x}\left(H_a + \langle\hat{V}\rangle\right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta p_x}\left(H_a + \langle\hat{V}\rangle\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь квантово-статистическое среднее гамильтониана спин-фононного взаимодействия

$$\langle\hat{V}\rangle \equiv \int\int_{-\infty}^{+\infty} ng(\Delta)\mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{V})d\Delta d^3\mathbf{r}, \tag{9}$$

n – концентрация парамагнитных ионов, $g(\Delta)$ – функция распределения (контур) неоднородного уширения для перехода $1 \leftrightarrow 3$ по отстройке $\Delta = \omega_0 - \omega_0^{(0)}$ от центральной частоты $\omega_0^{(0)}$ данного контура.

Контур неоднородного уширения спин-фононных квантовых переходов, удовлетворяющий условию нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta)d\Delta = 1$, обычно имеет вид лоренциана

$$g(\Delta) = \frac{1}{\pi}\frac{T_2^*}{1 + (T_2^*\Delta)^2}, \tag{10}$$

где T_2^* – характерное время обратимой фазовой релаксации, определяющее ширину данного контура.

Из (2) и (3) с учетом того, что $\mathrm{Sp}\hat{\rho} = 1$, находим $\mathrm{Sp}\left(\hat{\rho}\hat{V}\right) = \frac{G}{2}\frac{\partial u_x}{\partial x}(\rho_{13} + \rho_{31} + 1 + \rho_{22})$, где населенность второго уровня остается неизменной: $\rho_{22} = \mathrm{const}$.

Отсюда, а также из (8), (2), (4), (9) и (7) приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} - 2qa\frac{\partial^3\Omega}{\partial t^3} = \\ = \frac{G^2 n}{4\hbar\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta)(\rho_{13} + \rho_{13}^*)d\Delta. \tag{11}$$

В левой части (11) добавлено последнее слагаемое, описывающее затухание ультразвука при его взаимодействии с тепловыми колебаниями кристаллической решетки, дефектами, микронеоднородностями и т.п. (собственное затухание) [33, 34], где q – эмпирический коэффициент собственного затухания.

Теперь преобразуем самосогласованную систему (5), (6), (11), представив волновую Ω и ρ_{13} материальную ρ_{13} переменные в виде

$$\Omega = \frac{\psi}{2}e^{i\omega(t - x/a)} + \text{c.c.}, \quad \rho_{13} = Re^{i\omega(t - x/a)}, \tag{12}$$

где ψ и R – огибающие, медленно меняющиеся по сравнению с быстро осциллирующей экспонентой $e^{i\omega(t-x/a)}$.

Подставляя (12) в (5), (6) и (11), после пренебрежения слагаемыми, осциллирующими на удвоенной частоте ω и вторыми производными от огибающей ψ получим систему

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \left(i\tilde{\Delta} - \frac{1}{T_2}\right)R - i\psi W, \tag{13}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{i}{2}\left(\psi R^* - \psi^* R\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu\psi = i\beta\int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta)Rd\Delta. \tag{15}$$

Здесь $\beta = \frac{G^2 n\omega}{4\hbar\rho a^3}$, $\mu = q\omega^2$, $\tilde{\Delta} = \omega_0 - \omega = \Delta + \omega_0^{(0)} - \omega$ – отстройка несущей частоты ультразвукового импульса от выделенного квантового перехода.

При получении уравнения (15) из (11) мы учитывали, что собственное затухание относительно мало. Поэтому мы пренебрегли его вкладом в линейный закон дисперсии, положив приближенно с учетом (12), что $\partial^3\Omega/\partial t^3 \approx -i\omega^3\psi e^{i\omega(t-x/a)} + \text{c.c.}$

Учитывая параллель с резонансной оптикой двухуровневых атомов, будем называть систему (13)–(15) акустическими уравнениями Максвелла–Блоха.

3. Интегро-дифференциальное нелинейное параболическое уравнение. Пусть несущая частота ω ультразвукового импульса совпадает с центральной частотой $\omega_0^{(0)}$ контура неоднородного уширения. Тогда отстройки $\tilde{\Delta}$ в (13) и Δ в (15) равны друг другу.

Для исключения материальных переменных R и W из системы (13)–(15) усилим условие $\tau_p \ll T_1$ двойным неравенством, введя приведенное время релаксации T_r:

$$T_r \equiv \frac{T_2 T_2^*}{T_2 + T_2^*} \ll \tau_p \ll T_1. \tag{16}$$

Левая часть неравенства (16) означает малую спектральную ширину $\delta\omega_p \sim 1/\tau_p$ ультразвукового импульса в сравнении с шириной $\delta\omega_{tr} = 1/T_2 + 1/T_2^* = 1/T_r$ задействованного квантового перехода $1 \leftrightarrow 3$. Поэтому взаимодействие спинов с ультразвуковым импульсом при условии (16) является селективным. Следовательно, изменение средней по контуру неоднородного уширения разности населенностей $\bar{W} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta) W d\Delta$ относительно мало. Данное приближение можно назвать приближением быстрой фазовой релаксации.

Для ионов Ni^{2+} в кристалле MgO при температуре жидкого гелия имеем [4] $T_1 \sim 10^{-3}$ с, $T_2 \sim 10^{-6}$ с, $T_2^* \sim 10^{-8}$ с. Тогда, как видно из (16), $T_r \approx T_2^* \sim 10^{-8}$ с. Следовательно, для рассмотренного примера условие (16) выполняется в широком диапазоне импульсных длительностей $\tau_p \sim 10^{-4}$–10^{-7} с. Аналогичные оценки можно привести и для других кристаллов (см. ниже).

Очевидно, справедливы оценки $|\partial R/\partial t| \sim |R|/\tau_p$, $|(i\Delta - 1/T_2)R| \sim |R|/T_r$. Таким образом, левая часть уравнения (13) значительно меньше первого слагаемого в правой части этого уравнения. В нулевом приближении по производной $\partial R/\partial t$ из уравнения (13) имеем $R = \psi W/(\Delta + i/T_2)$. Подставляя теперь это выражение в левую часть уравнения (13), получим приближенное решение в первом приближении. Ограничиваясь вторым приближением, будем иметь

$$R = \frac{\psi W}{\Delta + i/T_2} - \frac{iW_{-\infty}}{(\Delta + i/T_2)^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{W_{-\infty}}{(\Delta + i/T_2)^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{17}$$

Данное выражение представляет собой первые три члена разложения Криспа [35].

Так как при условии (16) разность населенностей изменяется незначительно, во втором и третьем слагаемых разложения (17) мы положили $W = W_{-\infty}$, где $W_{-\infty}$ – начальная разность населенностей при $t = -\infty$. По этой же причине при подстановке (17) в (14) мы сохраним только первый член в правой части (17). Тогда после интегрирования (14) получим

$$W = W_{-\infty}\left[1 - \frac{T_2}{1 + (T_2\Delta)^2}\int\limits_{-\infty}^{t}|\psi|^2 dt'\right]. \tag{18}$$

Отсюда и из (17) после усреднения по контуру неоднородного уширения (10) будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta) R d\Delta = -iW_{-\infty} \times \tag{19}$$

$$\times\left(T_r\psi - \frac{T_r}{2}\frac{T_2 + 2T_2^*}{T_2 + T_2^*}\psi\int\limits_{-\infty}^{t}|\psi|^2 dt' - T_r^2\frac{\partial\psi}{\partial t} + T_r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right).$$

Подставляя (19) в (15), получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \gamma\psi - \varepsilon\psi\int\limits_{-\infty}^{\tau}|\psi|^2 d\tau' + \sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}, \tag{20}$$

где $\tau = t - x/v_0$,

$$\gamma = \Gamma - \mu, \quad \Gamma = w_{-\infty}\beta T_r,$$

$$\varepsilon = \frac{\Gamma}{2}T_2\frac{T_2 + 2T_2^*}{T_2 + T_2^*}, \quad \sigma = \Gamma T_r^2, \tag{21}$$

а линейная групповая скорость v_0 ультразвука определяется выражением

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{a} + \Gamma T_r = \frac{1}{a}\left(1 + W_{-\infty}\frac{G^2 n\omega}{\hbar\rho a^2}T_r^2\right). \tag{22}$$

Уравнение (20) представляет собой параболическое уравнение диффузионного типа с автономным источником. Диффузия здесь происходит не в пространстве, а во времени (см. третье слагаемое в правой части (20)). Данный диссипативный процесс происходит благодаря обратимой и необратимой фазовой релаксации. Роль автономного источника здесь принадлежит парамагнитным ионам с неравновесной населенностью квантовых состояний перехода $1 \leftrightarrow 3$ ($W_{-\infty} > 0$). Усиление импульса за счет этой запасенной энергии должно превалировать над поглощением ультразвука: $\Gamma > \mu$, поэтому $\gamma > 0$. Линейное усиление сменяется стадией его нелинейного насыщения, что описывается вторым интегральным слагаемым в правой части (20).

4. Диссипативный солитон. Будем искать решение уравнения (20) в виде диссипативного солитона.

Учет здесь собственного затухания ультразвука принципиально важен. Действительно, из (14) и (15), как и в случае оптического импульса [36], легко находим

$$\frac{dE}{dx} = 2\beta T_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta)(W_{-\infty} - W_{+\infty})d\Delta - 2\mu E, \tag{23}$$

где $E = T_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2 dt$, $W_{+\infty} \equiv W_{|t=+\infty}$.

Согласно (18), $W_{-\infty} > W_{+\infty}$. Таким образом, при условии (16) эффективные спины необратимо отдают энергию ультразвуковому импульсу. Поэтому в отсутствие собственного затухания ультразвука

($\mu = 0$) имеем $dE/dx > 0$. В этих условиях диссипативный солитон не может сформироваться. Наличие же собственного затухания, как видно из (23), приводит к стабилизации усиления импульса. Это может привести к формированию диссипативного солитона.

Заметим, что в уравнении (20) все коэффициенты являются вещественными. Данное обстоятельство является следствием того, что несущая частота ультразвукового сигнала настроена на центральную частоту неоднородно уширенной линии резонансного перехода. Поэтому искомая переменная ψ также является вещественной. Тогда, умножая (20) на $2T_2\psi$, после интегрирования по "бегущему" времени τ будем иметь

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = 2\gamma\theta - \frac{\varepsilon}{T_2}\theta^2 + $$
$$+ \sigma\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} - 2T_2\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau'}\right)^2 d\tau'\right], \qquad (24)$$

где

$$\theta = T_2\int\limits_{-\infty}^{\tau}\psi^2 d\tau'. \qquad (25)$$

Если в квадратных скобках (24) отбросить второе интегральное слагаемое, то будем иметь известное уравнение Фишера [37], описывающее диффузионные процессы в активных средах. Однако мы не можем пренебречь данным слагаемым, так как оно по порядку величины сравнимо с первым слагаемым $\partial^2\theta/\partial\tau^2$ диффузионного типа. Тем не менее нетрудно убедиться в том, что уравнение (24) имеет решение в виде диссипативного солитона, по форме совпадающее с аналогичным решением уравнения Фишера [38], но с другими значениями физических параметров:

$$\theta = \frac{15\gamma}{32\varepsilon}T_2(1 + \tanh\xi)^2, \qquad (26)$$

где переменная ξ, временная длительность τ_p солитона и его скорость v в лабораторной системе отсчета определяются выражениями

$$\xi = \frac{t - x/v}{\tau_p}, \quad \tau_p = 2\sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma}}, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - 3\sqrt{\frac{\sigma\gamma}{2}}. \qquad (27)$$

Из (26), (25) и (27) находим

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sech}\xi\sqrt{1 + \tanh\xi}, \qquad (28)$$

где

$$\psi_0 = \left(\frac{15}{32\sqrt{2}}\right)^{1/2}\left(\frac{\gamma^3}{\sigma\varepsilon^2}\right)^{1/4}. \qquad (29)$$

Диссипативный солитон вида (28), где ξ, а также параметры τ_p, v и ψ_0 определяются выражениями (27) и (29), является точным решением уравнения (20).

Из (7), (12) и (28), будем иметь для относительной деформации

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sech}\xi\sqrt{1 + \tanh\xi}\cos[\omega(t - x/a)], \qquad (30)$$

где

$$\varepsilon_0 = 2\hbar\psi_0/G. \qquad (31)$$

Используя соотношения (21), (22), (27), (29) и (31), можно выразить зависимости параметров диссипативного солитона через коэффициенты усиления Γ и поглощения μ, постоянную спин-фононной связи, а также через времена релаксации T_2 и T_2^*. При этом заметим, что для спин-фононных переходов в различных кристаллах обычно выполняется неравенство $T_2^* \ll T_2$ [4]. По этой причине с хорошим приближением имеем $T_r = T_2^*$. Тогда

$$\varepsilon_0 = 2.30\frac{\hbar}{G}\frac{(1 - \mu/\Gamma)^{3/4}}{\sqrt{T_2T_2^*}}, \quad \tau_p = \frac{2.83T_2^*}{\sqrt{1 - \mu/\Gamma}},$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a} + \Gamma T_2^*\left(1 - 2.12\sqrt{1 - \frac{\mu}{\Gamma}}\right). \qquad (32)$$

Из (18), (24), (25), (21) и (10) в этом же приближении найдем для средней по контуру неоднородного уширения разности населенностей

$$\bar{W} = W_{-\infty}\left[1 - 0.94\frac{T_2^*}{T_2}\left(1 - \frac{\mu}{\Gamma}\right)(1 + \tanh\xi)^2\right]. \qquad (33)$$

На рисунке 1 изображены огибающая диссипативного солитона (вверху), построенная на основе выражения (28), и сопровождающее распространение солитона изменение разности населенностей резонансного перехода $1 \leftrightarrow 3$. Профиль огибающей солитона несимметричен относительно его максимума: передний относительно крутой фронт сменяется пологим хвостом.

Следует заметить, что такие несимметричные солитоны были получены на основе численных экспериментов с оптической системой Максвелла–Блоха [39, 40]. Отметим также, что совсем недавно оптические диссипативные солитоны с несимметричным профилем интенсивности наблюдались экспериментально в микрорезонаторе полупроводникового лазера [41].

Приведем некоторые численные оценки, касающиеся параметров диссипативного солитона и условий его обнаружения в экспериментальных условиях.

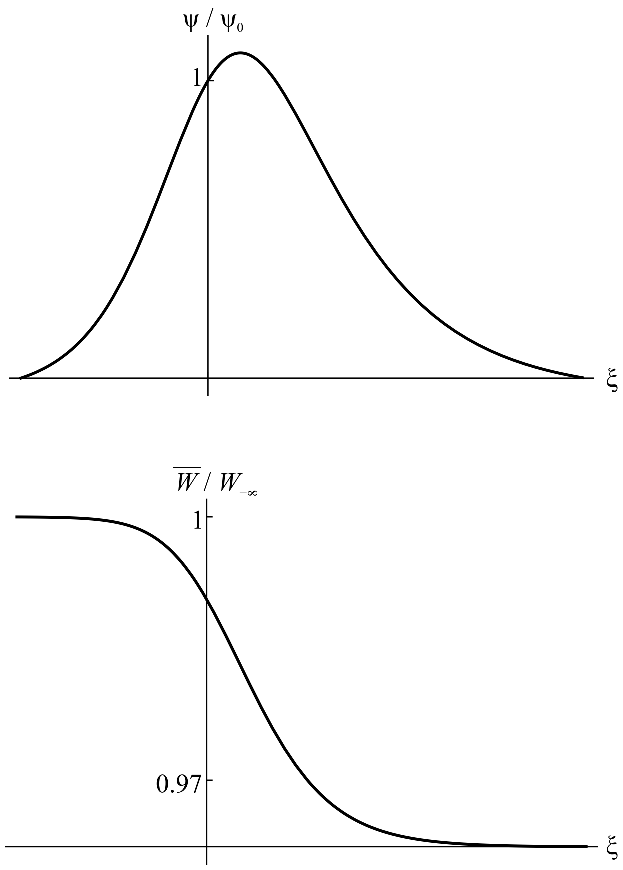

Рис. 1. Профиль нормированной огибающей относительной деформации диссипативного солитона (вверху) и сопровождающий профиль нормированной разности населенностей зеемановских подуровней резонансного спин-фононного перехода (внизу); $T_2^*/T_2 = 0.1$, $\mu/\Gamma = 0.9$

Для того, чтобы удовлетворить левой части неравенства (16) $\tau_p \gg T_2^*$, должно выполняться условие $1 - \mu/\Gamma \ll 1$ (см. второе равенство (32)). Это равносильно условию слабой надкритичности: коэффициент усиления ультразвука за счет парамагнитных ионов в неравновесных состояниях должен лишь незначительно превосходить коэффициент собственного затухания ультразвука.

Взяв для ионов Ni^{2+} в кристаллической матрице MgO при температурах жидкого гелия [4] $G \sim 10^{-15}$ эрг, $n \sim 10^{17}\,\text{см}^{-3}$, $\omega = \omega_0^{(0)} \sim 10^{11}\,\text{с}^{-1}$, $\rho \approx 5\,\text{г/см}^3$, $a \approx 5 \cdot 10^5\,\text{см/с}$, $T_2^* \sim 10^{-8}\,\text{с}$, $W_{-\infty} \sim 0.1–0.5$, найдем из (21) $\Gamma \sim 0.01–0.1\,\text{см}^{-1}$. При этих же температурах коэффициент собственного затухания ультразвука на гигагерцовых частотах $\mu \approx 0.25\,\text{дБ/см} \approx 0.3\,\text{см}^{-1}$ [42] . Отсюда видно, что условию слабой надкритичности $1 - \mu/\Gamma \ll 1$ можно вполне удовлетворить, изменяя, например, центральную частоту $\omega_0^{(0)}$ резонансного перехода. Этого, в свою очередь, можно добиться изменением внешнего магнитного поля.

Для приведенных выше параметров имеем $\Gamma T_2^* \sim 10^{-10}–10^{-9}\,\text{с/см}$. Тогда, как видно из последнего выражения (32), скорость диссипативного солитона практически не отличается от линейной скорости звука в кристалле. Из первых двух соотношений (32) находим $\varepsilon_0 \sim 10^{-6}$, $\tau_p \sim 10T_2^* \sim 0.1\,\text{мкс}$. Для пиковой интенсивности солитона имеем $I \sim \rho a^3 \varepsilon_0^2 \sim 10^{-3}–10^{-2}\,\text{Вт/см}^2$.

Таким образом, есть основания надеяться, что ультразвуковые диссипативные солитоны вполне могут быть обнаружены в условиях реального эксперимента.

5. Заключение. Исследование, проведенное в настоящей работе, выявляет принципиальную возможность формирования диссипативных ультразвуковых солитонов гигагерцового диапазона в неравновесных парамагнитных кристаллах.

Описанный здесь диссипативный солитон (27)–(29) с несимметричным профилем огибающей является точным решением уравнения (20), выведенного в приближении быстрой фазовой релаксации (16).

Роль активной среды играют парамагнитные ионы с инверсной населенностью зеемановских подуровней во внешнем магнитном поле. В качестве конкретного примера рассмотрены примесные ионы Ni^{2+} в матрице кубического кристалла MgO при температуре жидкого гелия. По всей вероятности, возможны и другие варианты обнаружения акустических диссипативных солитонов. В том числе, при более высоких температурах.

Один из принципиальных выводов заключается в том, что для формирования ультразвукового диссипативного солитона необходимо наличие необратимых потерь, обусловленных процессами, не связанными с парамагнитными ионами. В рассмотренном нами случае данные потери вызваны собственным затуханием ультразвука за счет его поглощения тепловыми колебаниями кристаллической решетки, рассеяниями на дефектах и т.п.

Упругие волны в твердых телах могут быть как продольными, так и поперечными. Это выгодно отличает их от сугубо поперечных оптических сигналов. Данное обстоятельство было учтено в работах [43–48], где исследовались консервативные продольно-поперечные солитоны акустической природы. Отсюда естественным образом возникает потребность в исследованиях диссипативных акустических солитонов, обладающих продольно-поперечной структурой.

Акустические импульсы, в отличие от оптических, способны распространяться в металлах. По этой причине актуальным становится поиск диссипативных акустических солитонов в сильнопроводящих средах, включая металлы. Здесь немаловажными представляются как фундаментальные, так и прикладные исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект # 17-11-01157).

---

1. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986) [F. V. Bunkin, Yu. A. Kravtsov, and G. A. Lyakhov, Soviet Phys.-Uspekhi **29**, 607 (1986)].
2. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, М. (1977).
3. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
4. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
5. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971) [G. A. Denisenko, JETP **33**, 1220 (1971)].
6. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974) [V. V. Samartsev, B. P. Smolyakov, and R. Z. Sharipov, JETP Lett. **20**, 296 (1974)].
7. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **77**, 558 (2003) [A. A. Zabolotskii, JETP Lett. **77**, 464 (2003)].
8. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **136**, 67 (2009) [S. V. Sazonov, JETP **109**, 57 (2009)].
9. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Romanian Reports in Physics **72**, 508 (2020).
10. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and Ph. Grelu, International Journal of Bifurcation and Chaos **19**, 2621 (2009).
11. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит, М. (2011).
12. N. N. Rosanov, S. V. Fedorov, and A. N. Shatsev, Appl. Phys. Lett. B **81**, 937 (2005).
13. C. H. Tsang, B. A. Malomed, and K. W. Chow, Phys. Rev. E **84**, 066609 (2011).
14. N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Phys. Rev. Lett. **117**, 183901 (2016).
15. С. В. Федоров, Н. Н. Розанов, Н. А. Веретенов, Письма в ЖЭТФ **107**, 342 (2018) [S. V. Fedorov, N. N. Rosanov, and N. A. Veretenov, JETP Lett. **107**, 327 (2018)].
16. С. К. Турицын, Н. Н. Розанов, И. Я. Яруткина, А. Е. Беднякова, С. В. Федоров, О. В. Штырина, М. П. Федорук, УФН **186**, 713 (2016) [S. K. Turitsyn, N. N. Rosanov, I. A. Yarutkina, A. E. Bednyakova, S. V. Fedorov, O. V. Shtyrina, and M. P. Fedoruk, Phys.-Uspekhi **59**, 642 (2016)].
17. V. E. Lobanov, Y. V. Kartashov, V. A. Vysloukh, and L. Torner, Opt. Lett. **36**, 85 (2011).
18. S. Yanchuk, S. Ruschel, J. Sieber, and M. Wolfrum, Phys. Rev. Lett. **123**, 053901 (2019).
19. T. Mayteevarunyoo, B. A. Malomed, and D. V. Skryabin, Opt. Express **27**, 037364 (2019).
20. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **53**, 400 (1991) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **53**, 420 (1991)].
21. S. V. Sazonov, J. Phys: Condens. Matter **7**, 175 (1995).
22. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1595 (1998) [A. Yu. Parkhomenko and S. V. Sazonov, JETP **87**, 864 (1998)].
23. С. В. Сазонов, УФН **171**, 663 (2001) [S. V. Sazonov, Phys.-Uspekhi **44**, 631 (2001)].
24. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **110**, 755 (2019) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **110**, 744 (2019)].
25. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **111**, 303 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **111**, 268 (2020)].
26. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **112**, 79 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **112**, 71 (2020)].
27. В. М. Левин, Е. С. Мороков, К. А. Валуев, Письма в ЖЭТФ **113**, 68 (2021) [V. M. Levin, E. S. Morokov, and K. A. Valuev, JETP Lett. **113**, 61 (2021)].
28. У. Х. Копвиллем, В. Д. Корепанов, ЖЭТФ **41**, 211 (1961) [U. Kh. Kopvillem and V. D. Korepanov, JETP **41**, 211 (1961)].
29. C. Kittel, Phys. Rev. Lett. **6**, 449 (1961).
30. E. B. Tucker, Phys. Rev. Lett. **6**, 547 (1961).
31. Дж. Такер, В. Рэмптон, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, М. (1975) [J. W. Tucker and V. W. Rampton, *Microwave Ultrasonics in Solid State Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1972)].
32. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **118**, 20 (2000) [S. V. Sazonov, JETP **91**, 16 (2000)].
33. К. Н. Баранский, *Физическая акустика кристаллов*, МГУ, М. (1991).
34. В. А. Красильников, В. В. Крылов, *Введение в физическую акустику*, Наука, М. (1984).
35. M. D. Crisp, Phys. Rev. A **8**, 2128 (1973).
36. П. Г. Крюков, В. С. Летохов, УФН **99**, 169 (1969) [P. G. Kryukov and V. S. Letokhov, Phys.-Uspekhi **12**, 641 (1970)].
37. R. A. Fisher, Ann. Eugen. **7**, 355 (1937).
38. M. J. Ablowitz and A. Zeppetella, Bull. Math. Biol. **41**, 835 (1979).
39. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, Оптика и спектроскопия **72**, 1394 (1992) [N. N. Rozanov and S. V. Fedorov, Optics and Spectroscopy **72**, 782 (1992)].
40. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, Оптика и спектроскопия **84**, 849 (1998) [N. N. Rozanov and S. V. Fedorov, Optics and Spectroscopy **84**, 767 (1998)].

41. M. M. Pieczarka, D. Poletti, C. Schneider, S. Höfling, E. A. Ostrovskaya, G. Sek, and M. Syperek, APL Photonics **5**, 086103 (2020).
42. J. de Klerk, Phys. Rev. **139**, A1635 (1965).
43. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001) [S. V. Voronkov and S. V. Sazonov, JETP **93**, 236 (2001)].
44. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **76**, 709 (2002) [A. A. Zabolotskii, JETP Lett. **76**, 607 (2002)].
45. A. A. Zabolotskii, Phys. Rev. E **67**, 066606 (2003).
46. A. V. Gulakov and S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **16**, 1733 (2004).
47. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Phys. Rev. E **73**, 056614 (2006).
48. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ТМФ **151**, 228 (2007) [S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Theor. Math. Phys. **151**, 632 (2007)].