

О неаддитивной анизотропной релятивистской гидродинамике

А. В. Леонидов¹⁾

Физический институт им. П. Н. Лебедева, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 февраля 2021 г.

После переработки 5 апреля 2021 г.

Принята к публикации 5 апреля 2021 г.

Описано неаддитивное обобщение релятивистской анизотропной гидродинамики. Для частного случая $0 + 1$ буст-инвариантной гидродинамики вычислен вклад неаддитивности в производство энтропии.

DOI: 10.31857/S1234567821090093

Разработка самосогласованной физической картины ультрарелятивистских соударений тяжелых ионов по-прежнему представляет собой чрезвычайно трудную задачу, см., например, четкое описание некоторых важнейших ее аспектов в [1]. Целью настоящей работы является построение теоретического описания рождающейся в таких соударениях анизотропной сильновзаимодействующей материи, основанного на соответствующем обобщении релятивистской гидродинамики.

Фундаментальной причиной сильной импульсной анизотропии материи, рождающейся на ранней и промежуточной стадиях соударений тяжелых ионов при высоких энергиях, считается сильная анизотропия глазмы [2] – плотной глюонной среды, рождающейся на их ранней стадии. Физическим механизмом, отвечающим за рождение глазмы, является формирование хромагнитных токовых трубок. Как следствие, продольное P_L и поперечное P_T давления сильно разбалансированы, причем $P_T > P_L$. Простейшим способом учета этой импульсной анизотропии является обращение к анизотропной гидродинамике, см., например, недавний обзор [3]. Идея подхода состоит в том, чтобы перевыразить импульсную анизотропию в терминах анизотропии давления и построить гидродинамическое описание, используя соответствующую модификацию тензора энергии – импульса. Для рассматриваемого ниже случая $0 + 1$ гидродинамики симметричные соображения приводят к следующему выражению для тензора энергии – импульса:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P_T)u^\mu u^\nu - P_T g^{\mu\nu} + (P_L - P_T)z^\mu z^\nu, \quad (1)$$

где ϵ – плотность энергии, u^μ – 4-вектор скорости и, при оси соударений, направленной вдоль z , $z^\mu = (0, 0, 0, 1)$. В изотропном случае $P_L = P_T$ и тензор

энергии-импульса (1) принимает знакомую из релятивистской гидродинамики форму. Отметим, что наличие анизотропии давления приводит к новым интересным эффектам, таким как, например, модификация конуса Маха [4].

Ниже мы будем придерживаться подхода к конструированию такой анизотропной гидродинамики, основанном на кинетической теории [5, 6]²⁾. Идея подхода состоит в явном выводе выражения для тензора энергии – импульса с использованием анизотропной функции распределения и последующем выводе уравнений гидродинамики в рамках стандартной для статистической физики процедуры, связывающей кинетическую теорию и гидродинамику.

Второе существенное для настоящего анализа обстоятельство состоит в том, что обсуждаемая материя является плотной и сильновзаимодействующей. Стандартная формулировка статистической физики основана на предположении об аддитивности энергий и энтропий физически малых объемов. Следствием этого являются, в частности, Больцмановское распределение по энергиям этих объемов в каноническом формализме и аддитивность их энергий и энтропий. Фундаментом такого предположения является предположение о том, что энергия взаимодействия материи в соседних объемах вблизи поверхности, которая их разделяет, пренебрежимо мала что, в свою очередь, отвечает предположению о наличии режима слабой связи. С фундаментальной точки зрения можно ожидать, что для сильновзаимодействующих систем энергия и энтропия не могут быть аддитивными, что требует для их описания построения соответствующей модификации статистической физики. Одно из таких возможных обобщений, которое привлекло большое внимание, – это неаддитивная формулировка статистической механики, разра-

¹⁾e-mail: leonidovav@lebedev.ru

²⁾Подробное обсуждение можно найти в [7].

ботанная Тсаллисом, см. книгу [8] и ссылки в ней³⁾. Следствия применения такого формализма к множественному рождению частиц в соударениях тяжелых ионов, в частности – для описания спектров по поперечным импульсам, обсуждаются, в частности, в [10–13]. Неаддитивное обобщение гидродинамик, основанное на соответствующем обобщении кинетического уравнения Больцмана [14], было построено в [15, 16]⁴⁾.

Поскольку целью настоящей работы является одновременный учет импульсной анизотропии и неаддитивности, для построения неаддитивной анизотропной гидродинамики нам необходимо рассмотреть неаддитивное уравнение Больцмана для анизотропной по импульсам функции распределения. В используемом ниже приближении времени релаксации соответствующее кинетическое уравнение имеет вид

$$p^\mu \partial_\mu [f(x, p)^q] = -\frac{p^\mu u_\mu}{\tau_{\text{eq}}} [f^q(x, p, \xi|\Lambda) - f_{\text{eq}}^q(x, p|\Lambda_{\text{eq}})], \quad (2)$$

где q – параметр распределения Тсаллиса, контролирующей степень неаддитивности (см. ниже уравнение (5)), τ_{eq} – время релаксации и предполагается анзац Ромашке–Стриккланда [19] для анизотропной функции распределения $f(x, p, \xi|\Lambda)$

$$f(x, p, \xi|\Lambda) = f_{\text{iso}} \left(\frac{\mathbf{p}^2 + \xi p_z^2}{\Lambda^2} \right), \quad (3)$$

где, в свою очередь, $\xi(t)$ и $\Lambda(t)$ – зависящие от времени параметры, контролирующие степень импульсной анизотропии и импульсный масштаб соответственно, и мы предположили, что функция распределения анизотропна только в продольном направлении. Функция

$$f_{\text{eq}}(x, p, |\Lambda_{\text{eq}}) = f_{\text{iso}} (\mathbf{p}^2/\Lambda_{\text{eq}}^2) \quad (4)$$

отвечает стационарному изотропному состоянию, характеризующемуся эффективной импульсной шкалой Λ_{eq} . В стандартной статистической физике распределение (4) – это распределение Больцмана и Λ_{eq} – это температура. Для рассматриваемого неаддитивного кинетического формализма предполагается, что стационарное распределение $f_{\text{eq}}(x, p|\Lambda_{\text{eq}})$ имеет тсаллисовскую форму

$$f_{\text{eq}}(x, p) = [1 - (1 - q)\mathbf{p}^2/\Lambda_{\text{eq}}^2]^{1/(1-q)}. \quad (5)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ восстанавливается обычное распределение Больцмана, использовавшееся в [5, 6].

³⁾ Недавнее обсуждение можно найти в [9].

⁴⁾ Альтернативная конструкция была предложена в [17, 18].

Ключевыми величинами для построения неаддитивной гидродинамики с использованием кинетического формализма являются обобщенные ток частиц N^μ , тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и ток энтропии S^μ :

$$N^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu f(x, p)^q, \quad (6)$$

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu p^\nu f(x, p)^q, \quad (7)$$

$$S^\mu = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p^0} p^\mu [f(x, p)^q \ln_q f(x, p) - f(x, p)], \quad (8)$$

где

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (9)$$

Отметим, что в литературе [14–16] можно встретить различные предположения относительно тока энтропии. Выражение в (8) отвечает выбору, сделанному в [15, 16].

Чтобы обеспечить сохранение энергии-импульса, мы будем использовать нормировочное условие Ландау (см., например, [3, 15, 16]) для энергии $\epsilon = T^{00}$

$$\epsilon(\xi, \Lambda) = \epsilon_{\text{eq}}(\Lambda_{\text{eq}}), \quad (10)$$

где вычисления в левой и правой частях (10) делаются с использованием функций распределения (3) и (4) соответственно. В результате получаем следующее нормировочное условие на Λ_{eq} и Λ :

$$\Lambda_{\text{eq}} = \mathcal{R}(\xi)^{1/4} \Lambda, \quad \mathcal{R}(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \xi} + \frac{\arctan \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right). \quad (11)$$

В этой работе, следуя [15, 16], мы рассмотрим буст-инвариантную 0 + 1-мерную гидродинамику, в которой все величины зависят только от собственного времени τ для милновских координат (τ, η) , определенных соотношениями

$$t = \tau \cosh \eta, \quad z = \tau \sinh \eta. \quad (12)$$

Уравнениям гидродинамики отвечают уравнения Больцмана для двух низших моментов, отвечающих токам частиц и энергии – импульса (6), (7). Легко проверить, что вычисления для неаддитивного случая аналогичны вычислениям в [5] и приводят к тем же уравнениям эволюции для Λ и ξ :

$$\begin{aligned} \partial_\tau \xi &= \frac{2(1 + \xi)}{\tau} - \frac{4(1 + \xi)}{\tau_{\text{eq}}} \mathcal{R}(\xi) \mathcal{G}(\xi), \\ \partial_\tau \Lambda &= \frac{1 + \xi}{\tau_{\text{eq}}} \mathcal{R}'(\xi) \mathcal{G}(\xi) \Lambda, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\mathcal{G}(\xi) = \frac{\mathcal{R}^{3/4}(\xi) \sqrt{1 + \xi} - 1}{2\mathcal{R}(\xi) + 3(1 + \xi)\mathcal{R}'(\xi)}. \quad (14)$$

Подчеркнем, что выражения для плотности частиц (6) и тензора энергии – импульса (7) в неаддитивном случае, разумеется, отличаются от их аддитивных аналогов.

Обратимся теперь к анализу эволюции плотности энтропии $S \equiv S^0$. При выполнении вычислений удобно явно выделить зависимость от параметра анизотропии

$$S(\xi, \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} S_{\text{iso}}(\Lambda), \quad (15)$$

где

$$S_{\text{iso}}(\Lambda) = \frac{\Lambda^3}{(2\pi)^2} \int dw w^{1/2} [f_{\text{iso}}^q(w) \ln_q f_{\text{iso}}(w) - f_{\text{iso}}(w)] \quad (16)$$

и $w = p^2/\Lambda^2$. Перепишем уравнение для $\partial_\tau S$ в следующем виде:

$$\partial_\tau S = \Delta_0(\tau) + (q-1)\Delta_q(\tau), \quad (17)$$

где мы разделили аддитивный $\Delta_0(\tau)$ и неаддитивный $(q-1)\Delta_q(\tau)$ вклады, так что в аддитивном пределе $q \rightarrow 1$ остается только первый из них. В результате вычислений получаем

$$\Delta_0(\tau) = - \left[\frac{1}{2} \frac{1}{1+\xi} (\partial_\tau \xi) - \frac{3}{\Lambda} (\partial_\tau \Lambda) \right] S, \\ \Delta_q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \frac{2}{\Lambda} \partial_\tau \Lambda \int dw w^{1/2} \text{Ln}_q f_{\text{iso}}(w), \quad (18)$$

где

$$\text{Ln}_q f_{\text{iso}}(w) \equiv q \frac{f_{\text{iso}}^q(w) - 1}{q-1}. \quad (19)$$

Используя (13), окончательно получаем

$$\Delta_0(\tau) = \frac{1}{\tau_{\text{eq}}} \left[\mathcal{R}^{3/4}(\xi) \sqrt{1+\xi} - 1 \right] S, \quad (20)$$

$$\Delta_q(\tau) = \sqrt{1+\xi} \frac{1}{\tau_{\text{eq}}} \mathcal{R}'(\xi) \mathcal{G}(\xi) \int dw w^{1/2} \text{Ln}_q f_{\text{iso}}(w). \quad (21)$$

Уравнения (20), (21) составляют главный результат настоящей работы: учет неаддитивности при описании коллективных свойств анизотропной гидродинамики приводит к наличию дополнительного источника производства энтропии (21) относительно ранее известного [5] вклада (20), обусловленного только наличием импульсной анизотропии. Для количественной оценки значения нового источника энтропии в процессах множественного рождения частиц в ультрарелятивистских соударениях тяжелых ионов потребуются детальные численные вычисления. Этот анализ является важной задачей для дальнейшей работы.

Работа была поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 18-02-40131.

1. F. Gelis, arXiv:2102.07604 [hep-ph].
2. T. Lappi and L. McLerran, Nucl. Phys. A **772**, 200 (2006); doi:10.1016/j.nuclphysa.2006.04.001; arXiv:hep-ph/0602189 [hep-ph].
3. M. Alqahtani, M. Nopoush, and M. Strickland, Prog. Part. Nucl. Phys. **101**, 204 (2018); doi:10.1016/j.ppnp.2018.05.004; arXiv:1712.03282 [nucl-th].
4. M. Kirakosyan, A. Kovalenko, and A. Leonidov, Eur. Phys. J. C **79**(5), 434 (2019); doi:10.1140/epjc/s10052-019-6919-9; arXiv:1810.06122 [hep-ph].
5. M. Martinez and M. Strickland, Nucl. Phys. A **848**, 183 (2010); doi:10.1016/j.nuclphysa.2010.08.011; arXiv:1007.0889 [nucl-th].
6. M. Martinez and M. Strickland, Phys. Rev. C **81**, 024906 (2010); doi:10.1103/PhysRevC.81.024906; arXiv:0909.0264 [hep-ph].
7. E. Molnar, H. Niemi, and D.H. Rischke, Phys. Rev. D **93**(11), 114025 (2016); doi:10.1103/PhysRevD.93.114025; arXiv:1602.00573 [nucl-th].
8. C. Tsallis, *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*, Springer Science & Business Media, Berlin/Heidelberg (2009).
9. C. Tsallis, Entropy **21**, 696 (2019).
10. J. Cleymans, G.I. Lykasov, A.S. Parvan, A.S. Sorin, O.V. Teryaev, and D. Worku, Phys. Lett. B **723**, 351 (2013); doi:10.1016/j.physletb.2013.05.029; arXiv:1302.1970 [hep-ph].
11. J. Cleymans, M. D. Azmi, A.S. Parvan, and O.V. Teryaev, EPJ Web Conf. **137**, 11004 (2017); doi:10.1051/epjconf/201713711004.
12. K. Shen, G.G. Barnaföldi, and T.S. Biró, Universe **5**(5), 122 (2019); doi:10.3390/universe5050122; arXiv:1905.08402 [hep-ph].
13. G. Bíró, G.G. Barnaföldi, and T.S. Biró, J. Phys. G **47**(10), 105002 (2020); doi:10.1088/1361-6471/ab8dcb; arXiv:2003.03278 [hep-ph].
14. A. Lavagno, Phys. Lett. A **301**, 13 (2002); doi:10.1016/S0375-9601(02)00964-7; arXiv:cond-mat/0207353 [cond-mat.stat-mech].
15. T.S. Biro and E. Molnar, Phys. Rev. C **85**, 024905 (2012); doi:10.1103/PhysRevC.85.024905; arXiv:1109.2482 [nucl-th].
16. T.S. Biró and E. Molnár, Eur. Phys. J. A **48**, 172 (2012); doi:10.1140/epja/i2012-12172-8; arXiv:1205.6079 [nucl-th].
17. T. Osada and G. Wilk, Phys. Rev. C **77**, 044903 (2008); erratum: Phys. Rev. C **78**, 069903 (2008); doi:10.1103/PhysRevC.77.044903; arXiv:0710.1905 [nucl-th].

-
18. T. Osada and G. Wilk, *Indian J. Phys.* **85**, 941 (2011); doi:10.1007/s12648-011-0103-x; arXiv:0805.2253 [nucl-th].
19. P. Romatschke and M. Strickland, *Phys. Rev. D* **68**, 036004 (2003); doi:10.1103/PhysRevD.68.036004; arXiv:hep-ph/0304092 [hep-ph].