Письма в ЖЭТФ, том 113, вып. 12, с. 848 – 853

Капиллярная плавучесть в системе двух несмешивающихся Бозе-конденсатов

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 20 мая 2021 г.
После переработки 21 мая 2021 г.
Принята к публикации 22 мая 2021 г.

Численно моделируется пространственно неоднородный, захваченный ловушкой двух-компонентный Бозе-конденсат холодных атомов в режиме разделения фаз. Впервые показано, что поверхностное натяжение между компонентами приводит к возможности существования капель более плотной фазы, плавающих на поверхности менее плотной фазы. В зависимости от анизотропии гармонической ловушки и других параметров системы, устойчивое равновесие капли достигается либо на “полюсах”, либо на “экваторе”. Плавучесть капли может иногда сохраняться даже при наличии присоединенного к ней квантованного вихря.

DOI: 10.31857/S1234567821120107

Введение. Многокомпонентные смеси ультрахолодных бозе-конденсированных атомных газов исследуются уже на протяжении четверти столетия [1–5]. Такие системы состоят либо из различных химических (щелочных) элементов, либо из различных изотопов одного и того же элемента, либо из одинаковых изотопов в двух различных внутренних (сверхтонких) квантовых состояниях. Взаимодействия между компонентами приводят к большому разнообразию явлений, которые отсутствуют в простых бозе-конденсатах. При этом весьма существенно, что параметры нелинейных взаимодействий между волнами материи, будучи пропорциональными соответствующим длинам рассеяния, могут во многих случаях изменяться по желанию исследователя в широких пределах с помощью резонансов Фешбаха [6–10]. В частности, достаточно сильное перекрестное отталкивание между двумя видами атомов приводит к пространственному разделению конденсатов [11, 12] и наличию эффективного поверхностного натяжения на доменных стенках между фазами [4, 13]. Подобная сегрегация лежит в основе многих интересных конфигураций и явлений, таких как нетривиальная геометрия основного состояния бинарных несмешивающихся Бозе-конденсатов в ловушках [14–16] (включая оптические решетки [17–19]), динамика пузырей [20], квантовые аналоги классических гидродинамических неустойчивостей (Кельвина–Гельмгольца [21, 22], Рэлея–Тейлора [23–25], Плато–Рэлея [26]), параметрическая неустойчивость капиллярных волн на границе раздела фаз [27, 28], сложные текстуры во вращающихся бинарных конденсатах [29–31], вихри с заполненной сердцевиной [3, 32–37], трехмерные топологические структуры [38–43], и т.д.

Крупномасштабная динамика поверхности раздела в сегрегированном бинарном конденсате во многом подобна динамике пузырей/капель в классической механике несмешивающихся идеальных жидкостей [20, 23–25]. При отсутствии квантованных вихрей течение потенциально внутри каждой из компонент, а вся завихренность поля скорости сосредоточена на разделяющей поверхности. В этом смысле граница пузыря представляет собой вихревой лист, в некоторых случаях напоминающий вихревые листы в ^{3}He-A [44]. Важную роль подобные структуры играют также в турбулентности (см. недавние работы [45–47] и ссылки в них).

Надо сказать, что аналогия с классической гидродинамикой проведена пока что далеко не по всем направлениям. Например, при наличии достаточно сильного поверхностного натяжения не слишком большая капля более плотной жидкости может плавать на поверхности менее плотной жидкости. Насколько известно автору, подобная капиллярная плавучесть в случае бинарных конденсатов до сих пор не исследовалась. Целью данной работы является численная демонстрация возможности плавания тяжелой капли в рамках системы связанных уравнений Гросса–Питаевского (1)–(2), которые описывают разреженные Бозе-конденсаты при нуле температуры. В отличие от привычных, практически несжимае-

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

мых жидкостей в однородном гравитационном поле, здесь будут рассмотрены бозе-конденсаты в ловушке с квадратичным анизотропным потенциалом, так что равновесный профиль менее плотной "жидкости" $\rho_{\rm eq}(\mathbf{r})$ [см. формулу (6) ниже] будет сильно неоднородным в пространстве. При этом поверхностное натяжение пропорционально $\rho_{\rm eq}^{3/2}$ [13], т.е. оно отсутствует на поверхности Томаса–Ферми и увеличивается вглубь конденсата. Более того, поскольку поверхность Томаса–Ферми имеет вид сплюснутого либо вытянутого эллипсоида вращения, эффективная потенциальная энергия капли окажется зависящей не только от локально вертикального отклонения ее центра масс, но и от двух локально горизонтальных координат на эллипсоиде. В результате капля может при своем плавании совершать осцилляции по "широтной" координате эллипсоида. В зависимости от параметров системы, минимум горизонтальной потенциальной энергии может достигаться как на полюсах, так и на экваторе эллипсоида.

Модель и численный метод. Чтобы продемонстрировать суть явления, достаточно рассмотреть наиболее простую ситуацию с равными массами обоих типов атомов, $m_1 = m_2 = m$. Сюда же приближенно относится и случай малой разницы в массах изотопов, как, например, ^{85}Rb и ^{87}Rb. Пусть осесимметричная гармоническая ловушка характеризуется поперечной частотой $\omega_\perp$ и анизотропией $\lambda = \omega_\parallel/\omega_\perp$. Выбирая масштаб $\tau = 1/\omega_\perp$ для времени, $l_{\rm tr} = \sqrt{\hbar/\omega_\perp m}$ для длины, и $\varepsilon = \hbar\omega_\perp$ для энергии, запишем обезразмеренные уравнения движения для комплексных волновых функций $A(\mathbf{r},t)$ и $B(\mathbf{r},t)$ в виде

$$i\dot{A} = -\frac{1}{2}\nabla^2 A + \left[V(x,y,z) + g_{11}|A|^2 + g_{12}|B|^2\right] A, \quad (1)$$

$$i\dot{B} = -\frac{1}{2}\nabla^2 B + \left[V(x,y,z) + g_{21}|A|^2 + g_{22}|B|^2\right] B, \quad (2)$$

где $V = (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)/2$ – потенциал ловушки, $g_{\alpha\beta}$ – симметричная матрица нелинейных взаимодействий (с положительными элементами в интересующем нас случае). Физически взаимодействия определяются длинами рассеяния $a_{\alpha\beta}$ [2]:

$$g_{\alpha\beta}^{\rm phys} = 2\pi\hbar^2 a_{\alpha\beta}(m_\alpha^{-1} + m_\beta^{-1}). \quad (3)$$

Без ограничения общности первый коэффициент самоотталкивания можно нормировать на единицу, $g_{11} = 1$, поскольку в данной работе $g_{\alpha\beta}$ предполагаются фиксированными (в каждом отдельно взятом численном эксперименте) параметрами.

Сохраняющиеся числа захваченных ловушкой атомов даются формулами

$$N_1 = \frac{l_{\rm tr}}{4\pi a_{11}} \int |A|^2 d^3\mathbf{r} = (l_{\rm tr}/a_{11}) n_1, \quad (4)$$

$$N_2 = \frac{l_{\rm tr}}{4\pi a_{11}} \int |B|^2 d^3\mathbf{r} = (l_{\rm tr}/a_{11}) n_2. \quad (5)$$

В реальных экспериментах отношение $l_{\rm tr}/a_{11}$ оказывается в диапазоне от нескольких сотен до нескольких тысяч.

Надо отметить, что данная простая модель (1)–(2) является консервативной. Она применима только в пределе нулевой температуры и совершенно непригодна для исследования любых эффектов, обусловленных конечностью температуры (в том числе диссипативных). Для сравнения, термодинамика играет первостепенную роль, а сами уравнения движения намного более сложны, например, в ^{3}He [48].

Система (1)–(2) является по сути двухжидкостной идеальной гидродинамикой (при условии потенциальности обоих полей скорости), с тем отличием, что полное давление каждой компоненты состоит из обычного гидродинамического давления и так называемого квантового давления. Квантовое давление "срабатывает" только там, где плотность резко меняется в пространстве. В нашем случае это будет переходный слой. Гидродинамические давления обеих жидкостей есть $g_{11}|A|^4/2$ и $g_{22}|B|^4/2$, так что при равных давлениях более плотной оказывается та компонента, у которой коэффициент самоотталкивания меньше. Для определенности, мы будем полагать $g_{22} < g_{11} = 1$, т.е. относительно небольшая капля более плотной второй фазы будет за счет поверхностного натяжения плавать по свободной поверхности первой фазы.

Фоновый профиль плотности первой компоненты характеризуется химическим потенциалом μ. При условии $\mu \gg 1$ приближение Томаса–Ферми дает зависимость

$$|A_0|^2 \approx [\mu - V(x,y,z)] \equiv \mu\rho_{\rm eq}(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Таким образом, эффективный поперечный радиус конденсата есть $R = \sqrt{2\mu}$, а продольный полуразмер $Z = \lambda R$.

Условие разделения фаз представляет собой неравенство $g = (g_{12}^2 - g_{11}g_{22}) > 0$ [11, 12]. Имеется узкий переходный слой между сегрегированными конденсатами, где плотности обеих фаз спадают практически до нуля в одном либо в другом направлении. При этом соответствующий избыток энергии (коэффициент поверхностного натяжения) определяется формулой вида $\sigma = F(g_{22}/g_{11}, g_{12}/g_{11})|A_0|^3$ [11, 13]. В отличие от привычных несжимаемых жидкостей, зависимость поверхностного натяжения от фоновой плотности здесь весьма существенна.

Проведенное в данной работе численное моделирование было ориентировано на экспериментально реализуемые смеси ^{85}Rb-^{87}Rb [8], где $a_{12}/a_{22} \approx 2$, тогда как a_{11} можно изменять в широких пределах с помощью резонанса Фешбаха. Поэтому во всех наших численных экспериментах $g_{12} = 2g_{22}$. Для g_{22} брались различные значения, включая $g_{22} = 0.6, 0.7, 0.8$.

Используемый нами численный метод был достаточно стандартным и включал в себя две процедуры. Первая процедура – приготовление начального состояния путем применения (к достаточно произвольно взятому "входному" состоянию) градиентного спуска, что в данном случае эквивалентно распространению в мнимом времени (*imaginary time propagation*) на конечном интервале вспомогательной квази-временно́й переменной. Эта диссипативная процедура отфильтровывала быстрые возбуждения и оставляла только интересующие нас мягкие моды, которые не успевали достичь минимума своей энергии. При этом также формировался квазиравновесный переходный слой между фазами. Вторая процедура – собственно моделирование системы (1)–(2) с помощью Фурье-метода расщепленного шага по времени (*Split-Step Fourier Method*) второго порядка аппроксимации с периодическими граничными условиями по пространственным координатам. В целом численный метод подобен тому, что использовался ранее в работе [49].

Результаты. Прежде всего скажем, что наблюдалась естественная тенденция к увеличению максимально возможной массы плавучей капли при уменьшении относительной разницы между g_{11} и g_{22}.

Некоторые из полученных численных результатов представлены на рис. 1–3. Для лучшей наглядности, в первом и втором примерах конфигурации выбраны симметричными относительно плоскости $y = 0$. Профили суммарной плотности в указанной плоскости ясно свидетельствуют о наличии вблизи поверхности относительно более плотной капли, а также переходного слоя между компонентами.

Рисунок 1 иллюстрирует случай, когда устойчивыми положениями капли на эллипсоиде оказываются полюса. Здесь она совершает медленные колебания относительно верхней точки (см. видео [50]). Следует упомянуть, что капля с большей массой ($n_2 = 45$) уже не способна держаться на поверхности и вместо этого совершает сложные движения внутри эллипсоида, иногда ненадолго задерживаясь вблизи поверхности (см. видео [51]).

Рисунок 2 соответствует меньшей по сравнению с первым примером относительной разнице в плотностях двух фаз. Здесь имеет место ситуация, когда эффективная потенциальная энергия плавучей капли достигает локального минимума на экваторе (см.

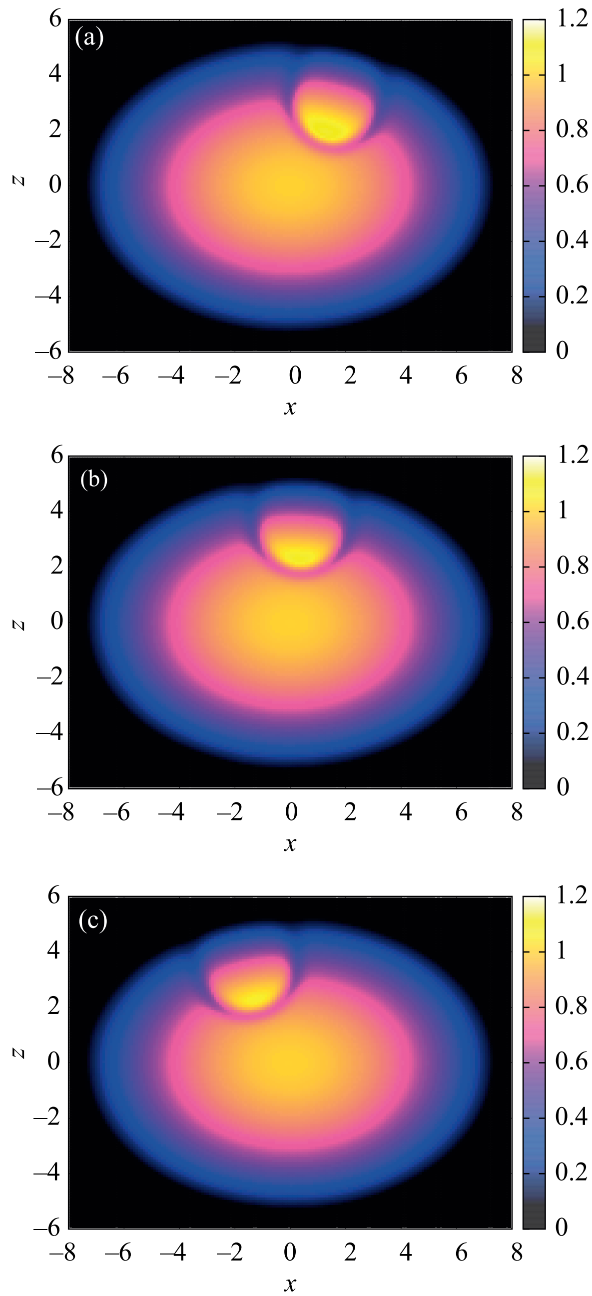

Рис. 1. (Цветной онлайн) Численный пример плавающей тяжелой капли. Показана отнормированная на μ суммарная плотность двух конденсатов в плоскости симметрии $y = 0$ в моменты времени: (a) – $t = 500$; (b) – $t = 600$; (c) – $t = 700$. В данном случае капля совершает медленные колебания около полюса, причем рисункам (a) и (c) соответствуют примерно крайние ее отклонения. Значения параметров: $\lambda = 1.4$, $g_{11} = 1.0$, $g_{22} = 0.7$, $g_{12} = 1.4$, $n_1 = 1282.4$, $n_2 = 37.1$, $\mu = 30$

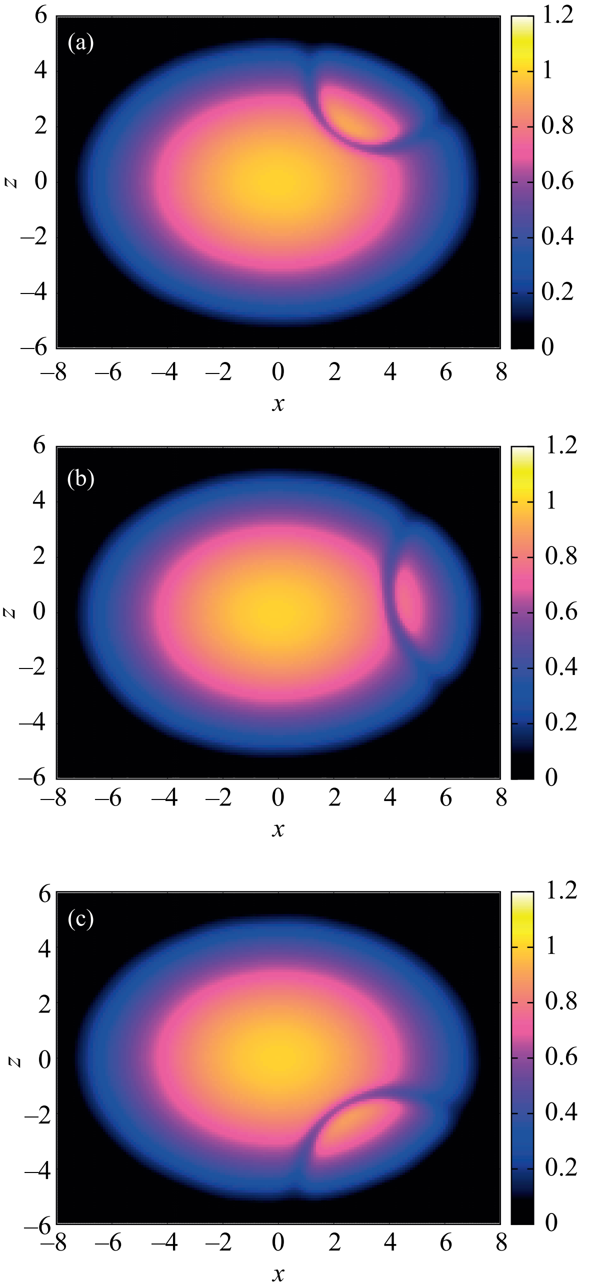

Рис. 2. (Цветной онлайн) Численный пример более крупной и подвижной, чем на рис. 1, но не столь плотной капли, совершающей колебания около экватора. Моменты времени: (a) – $t = 680$; (b) – $t = 700$; (c) – $t = 720$. Рисункам (a) и (c) соответствуют примерно крайние отклонения. Значения параметров: $\lambda = 1.4$, $g_{11} = 1.0$, $g_{22} = 0.8$, $g_{12} = 1.6$, $n_1 = 1270.8$, $n_2 = 50.2$, $\mu = 30$

видео [52]). В этом примере капля довольно большая и при своем движении заметно деформируется. Надо сказать, что в случае вытянутого эллипсоида с анизотропией $\lambda = 0.7$ подобная капля имеет свои-

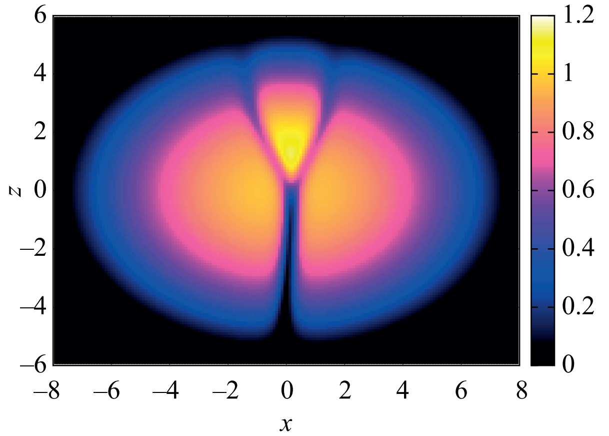

Рис. 3. (Цветной онлайн) Численный пример плавучей капли с присоединенным к ней квантованным вихрем (в момент времени $t = 300$). Значения параметров: $\lambda = 1.4$, $g_{11} = 1.0$, $g_{22} = 0.8$, $g_{12} = 1.6$, $n_1 = 1275.5$, $n_2 = 28.9$, $\mu = 30$

ми устойчивыми положениями полюса (этот случай здесь не представлен). По всей видимости, разница в поведении обусловлена другим характером зависимостей кривизны поверхности Томаса–Ферми и локальной "силы тяжести" от полярного угла. Этот вопрос, однако, не столь прост и ясен, поскольку, например, при значении $g_{22} = 0.7$ (как на рис. 1) вытянутый эллипсоид по прежнему притягивает каплю к полюсу (не проиллюстрировано). В данном пункте требуется дополнительное исследование.

Интересно отметить, что капля может оставаться на плаву также и в случае наличия присоединенного к ней квантованного вихря, пронизывающего первую компоненту (ср. с результатами недавней работы [43], где достаточно большая плотная капля находится в центре системы и своей массой стабилизирует несколько присоединенных к ней вихревых нитей). В примере, показанном на рис. 3, капля не тонет даже несмотря на то, что вихрь создает дополнительную тянущую "вниз" силу (см. видео [53]). Более массивная капля с $n_2 = 49.0$ в аналогичных обстоятельствах совершает повторяющиеся движения вверх-вниз вдоль вихря от полюса к полюсу сквозь весь конденсат (см. видео [54]).

Заключение. Таким образом, по аналогии с обыкновенными каплями, способными за счет поверхностного натяжения плавать на поверхности менее плотной жидкости в поле тяжести, в данной работе численно обнаружены плавучие квантовые капли в системе двух захваченных ловушкой несмешивающихся Бозе-конденсатов. Существенным отличием от повседневной практики является отсутствие нейтрального равновесия квантовой капли по координатам вдоль поверхности Томаса–Ферми. Очевидно, что этот эффект связан с конечностью отношения размера капли по сравнению с размером основной фазы. Приближенное аналитическое вычисление соответствующей зависимости потенциальной энергии капли и ее равновесной геометрической формы остается интересной задачей на будущее.

1. T.-L. Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996).
2. H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998).
3. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).
4. S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **87**, 140401 (2001).
5. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).
6. J. P. Burke, Jr., J. L. Bohn, B. D. Esry, and C. H. Greene, Phys. Rev. Lett. **80**, 2097 (1998).
7. G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo, J. Catani, F. Minardi, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **100**, 210402 (2008).
8. S. B. Papp, J. M. Pino, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **101**, 040402 (2008).
9. S. Tojo, Y. Taguchi, Y. Masuyama, T. Hayashi, H. Saito, and T. Hirano, Phys. Rev. A **82**, 033609 (2010).
10. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
11. E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998).
12. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).
13. B. van Schaeybroeck, Phys. Rev. A **78**, 023624 (2008).
14. A. A. Svidzinsky and S. T. Chui, Phys. Rev. A **68**, 013612 (2003).
15. S. Gautam and D. Angom, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 095302 (2010).
16. R. W. Pattinson, T. P. Billam, S. A. Gardiner, D. J. McCarron, H. W. Cho, S. L. Cornish, N. G. Parker, and N. P. Proukakis, Phys. Rev. A **87**, 013625 (2013).
17. K. Suthar, A. Roy, and D. Angom, Phys. Rev. A **91**, 043615 (2015).
18. K. Suthar and D. Angom, Phys. Rev. A **93**, 063608 (2016).
19. K. Suthar and D. Angom, Phys. Rev. A **95**, 043602 (2017).
20. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).
21. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).
22. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).
23. K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, Phys. Rev. A **80**, 063611 (2009).
24. S. Gautam and D. Angom, Phys. Rev. A **81**, 053616 (2010).
25. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. A **85**, 013602 (2012).
26. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 053606 (2011).
27. D. Kobyakov, V. Bychkov, E. Lundh, A. Bezett, and M. Marklund, Phys. Rev. A **86**, 023614 (2012).
28. D. K. Maity, K. Mukherjee, S. I. Mistakidis, S. Das, P. G. Kevrekidis, S. Majumder, and P. Schmelcher, Phys. Rev. A **102**, 033320 (2020).
29. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **91**, 150406 (2003).
30. K. Kasamatsu and M. Tsubota, Phys. Rev. A **79**, 023606 (2009).
31. P. Mason and A. Aftalion, Phys. Rev. A **84**, 033611 (2011).
32. K. J. H. Law, P. G. Kevrekidis, and L. S. Tuckerman, Phys. Rev. Lett. **105**, 160405 (2010); Erratum: Phys. Rev. Lett. **106**, 199903 (2011).
33. M. Pola, J. Stockhofe, P. Schmelcher, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **86**, 053601 (2012).
34. S. Hayashi, M. Tsubota, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **87**, 063628 (2013).
35. A. Richaud, V. Penna, R. Mayol, and M. Guilleumas, Phys. Rev. A **101**, 013630 (2020).
36. A. Richaud, V. Penna, and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **103**, 023311 (2021).
37. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **113**, 539 (2021).
38. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **93**, 250406 (2004).
39. H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Nitta, Phys. Rev. Lett. **109**, 245301 (2012).
40. M. Nitta, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **85**, 053639 (2012).
41. K. Kasamatsu, H. Takeuchi, M. Tsubota, and M. Nitta, Phys. Rev. A **88**, 013620 (2013).
42. S. B. Gudnason and M. Nitta, Phys. Rev. D **98**, 125002 (2018).
43. V. P. Ruban, arXiv:2104.05296.
44. Г. Е. Воловик, Успехи физических наук **185**, 970 (2015).
45. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, Phys. Fluids **30**, 095104 (2018).
46. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Письма в ЖЭТФ **109**, 231 (2019).
47. A. Migdal, Intl. J. Mod. Phys. A, **36**, 2150062 (2021).

48. M. M. Salomaa and G. E. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987).
49. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **108**, 638 (2018).
50. http://home.itp.ac.ru/∼ruban/20MAY2021/V1Y.avi.
51. http://home.itp.ac.ru/∼ruban/20MAY2021/V1N.avi.
52. http://home.itp.ac.ru/∼ruban/20MAY2021/V2Y.avi.
53. http://home.itp.ac.ru/∼ruban/20MAY2021/V3Y.avi.
54. http://home.itp.ac.ru/∼ruban/20MAY2021/V3N.avi.