Письма в ЖЭТФ, том 114, вып. 1, с. 31 – 35

О магнитоэлектрической связи в $(\mathrm{Ni, Cu})\mathrm{B_2O_4}$

М. В. Еремин[1], *А. Р. Нурмухаметов*[1]

Институт физики Казанского (Приволжского) федерального университета, 420008 Казань, Россия

Поступила в редакцию 18 мая 2021 г.
После переработки 2 июня 2021 г.
Принята к публикации 2 июня 2021 г.

Анализируется механизм магнитоэлектрической связи спинов $\mathrm{Ni^{2+}}$ и $\mathrm{Cu^{2+}}$ с внешним электрическим полем в $(\mathrm{Ni, Cu})\mathrm{B_2O_4}$, обусловленный связью $3d$-электронов с электрическим полем и спин-орбитальным взаимодействием. Показано, что упорядочение спинов в плоскости ab кристалла индуцирует электрическую поляризацию вдоль оси c кристалла, причем она главным образом обусловлена ионами никеля. Для получения электрической поляризации в антиферромагнетике $\mathrm{CuB_2O_4}$ необходимо приложить внешнее магнитное поле в плоскости ab.

DOI: 10.31857/S1234567821130073

1. Введение. Выяснение микроскопических моделей связи спинов с электрическим полем – актуальная задача современных исследований магнитоэлектриков и мультиферроиков [1–5]. Подробный обзор предложенных механизмов магнитоэлектрической связи до 2015 г. приведен в обзоре [6]. В последние годы обнаруживаются новые соединения, для объяснения магнитоэлектрических свойств которых требуются новые микроскопические механизмы магнитоэлектрической связи. К числу таких соединений относится и $(\mathrm{Ni, Cu})\mathrm{B_2O_4}$. Как уже подчеркивалось в экспериментальной работе [7], особенности связи спинов Ni и Cu с электрическим полем в этом соединении не могут быть объяснены ни моделью спиновых токов [8], ни стрикционным механизмом [9]. Авторы работы [7], в качестве возможного, указали на механизм Аримы [10], однако численных оценок параметра связи спинов никеля с электрическим полем не привели. Таким образом, проблема осталась не разрешенной. В данной работе мы приводим результаты нашего расчета связи спинов с электрическим полем, которая индуцируется взаимодействием орбитальных моментов с электрическим полем и затем передается орбитально-спиновыми взаимодействиями на спины Ni и Cu. Идея такого двухзвенного механизма обсуждалась ранее в теории электрополевого эффекта магнитного резонанса в разбавленных парамагнетиках [11]. Новизна нашего рассмотрения в этом плане связана с описанием первого звена, а именно природы связи $3d$-электронов с электрическим полем.

Эффективность рассматриваемого механизма зависит от особенностей энергетической структуры магнитного иона. Согласно структурным данным [7, 12] магнитные ионы $\mathrm{Ni^{2+}}$ и $\mathrm{Cu^{2+}}$ занимают позиции с точечной группой симметрии $\mathrm{S_4}$.

2. Уровни энергии и волновые функции. Оператор кристаллического поля имеет вид:

$$H_{cr} = B_0^{(2)} C_0^{(2)} + B_0^{(4)} C_0^{(4)} + B_4^{(4)} C_4^{(4)} + B_{-4}^{(4)} C_{-4}^{(4)}, \quad (1)$$

где $C_q^{(k)}$ – компоненты сферических тензорных операторов кристаллического поля, действующих на состояния $3d$-электронов. Они связаны со сферическими функциями $Y_{k,q}(\theta, \phi)$ соотношением: $C_q^{(k)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \sum Y_{k,q}(\theta_i, \phi_i)$. Индекс суммирования i относится к электронам в $3d$-оболочке.

Параметры кристаллического поля $B_q^{(k)}$ рассчитывались нами с использованием модели обменных зарядов [13]. Для оценки обменного заряда на связях медь-кислород привлекались экспериментальные данные о кристаллических расщеплениях $\mathrm{Cu^{2+}}$ в $\mathrm{CuB_2O_4}$, которые получены в работе [14]. Наша теоретико-групповая интерпретация возбужденных состояний $\mathrm{Cu^{2+}}$ соответствует, предложенной Меньшениным [15]. В локальной системе координат с $\mathrm{Im}\left[B_4^{(4)}\right] = 0$ и $\mathrm{Re}\left[B_4^{(4)}\right] > 0$ параметры кристаллического поля оказались равными (в $\mathrm{см}^{-1}$):

$$B_0^{(2)} = -17720, \quad B_0^{(4)} = 9940, \quad B_4^{(4)} = 14030. \quad (2)$$

Ниже мы будем считать, что $\mathrm{Re}\left[B_4^{(4)}\right] > 0$. Это означает, что для позиции $A1$ локальная система координат повернута относительно кристаллографической системы на угол 20.9° вокруг оси c кристалла (угол отсчитывается против часовой стрелки), для позиции $A2$ угол поворота соответственно равен

[1]e-mail: meremin@kpfu.ru; alrnurmuhametov@gmail.com

$-20.9°$. Энергии кристаллических подуровней основного терма $Ni^{2+}(^3F)$ и $Cu^{2+}(^2D)$ и соответствующие им волновые функции приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1. Уровни энергии и волновые функции $Ni^{2+}(^3F)$ в NiB_2O_4

Уровни энергии, см$^{-1}$	Представления точечной группы S_4	Волновые функции
13943	$^2\Gamma_{34}$	$\psi_7 = C_2\|-1\rangle + C_1\|3\rangle$ $\psi_6 = C_2\|1\rangle + C_1\|-3\rangle$
13768	Γ_1	$\psi_5 = \|0\rangle$
11179	$^2\Gamma_2$	$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|2\rangle + \|-2\rangle)$
4744	$^1\Gamma_{34}$	$\psi_3 = C_1\|-1\rangle - C_2\|3\rangle$ $\psi_2 = C_1\|1\rangle - C_2\|-3\rangle$
0	$^1\Gamma_2$	$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|2\rangle - \|-2\rangle)$

Таблица 2. Уровни энергии и волновые функции $Cu^{2+}(^2D)$ в CuB_2O_4. В скобках указаны экспериментальные значения из [14]

Уровни энергии, см$^{-1}$	Представления точечной группы S_4	Волновые функции
15540 (15440)	Γ_{34}	$\psi_5 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\|-1\rangle + \|1\rangle)$ $\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|-1\rangle - \|1\rangle)$
13330 (13450)	Γ_1	$\psi_3 = \|0\rangle$
11170 (11340)	$^2\Gamma_2$	$\psi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\|-2\rangle - \|2\rangle)$
0	$^1\Gamma_2$	$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|2\rangle + \|-2\rangle)$

Значения коэффициентов в волновых функциях с точностью 1% равны $C_1 \cong \sqrt{\frac{1}{3}}, C_2 \cong \sqrt{\frac{2}{3}}$. Как видно из таблиц 1 и 2, основными состояниями ионов никеля и меди являются орбитальные синглеты.

3. Оператор связи $3d$-электронов с электрическим полем. Эффективный оператор энергии связи $3d$-электронов электрическим полем записывается в виде [16, 17].

$$H_E = \sum_{k,p,t} \left\{ E^{(1)} U^{(k)} \right\}_t^{(p)} D_t^{(1k)p}. \tag{3}$$

Здесь фигурные скобки обозначают прямое произведение сферических компонент электрического поля $E_0^{(1)} = E_z$; $E_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x \pm i \cdot E_y)$ с компонентами единичного тензорного оператора U^k, p принимает значения 1, 3 и 5, k – четные числа 2 и 4. Величины $D_t^{(1k)p}$ определяются двумя вкладами. Первый из них обусловлен смешиванием состояний электронных конфигураций $3d^N$ и $3d^{(N-1)}4p$ нечетным кристаллическим полем, а второй связан с процессами переноса заряда от ионов кислорода в $3d$-болочку иона. Общие выражения для расчета те же самые, что и в [16, 17]. В локальной системе координат для позиции Cu$A1$ рассчитанные параметры оказались равными (в атомных единицах, a. u.):

$$D_2^{(12)3} = 0.018 + 0.164i,$$
$$D_2^{(14)3} = -0.110 - 0.055i, \tag{4}$$
$$D_2^{(14)5} = -0.015 - 0.02i.$$

4. Оператор связи спинов основного состояния с электрическим полем.

4.1. $Ni^{2+}(^3F)$. В третьем порядке теории возмущений имеются три типа процессов виртуальных возбуждений, приводящих к связи спинов с электрическим полем. Они поясняются на рис. 1.

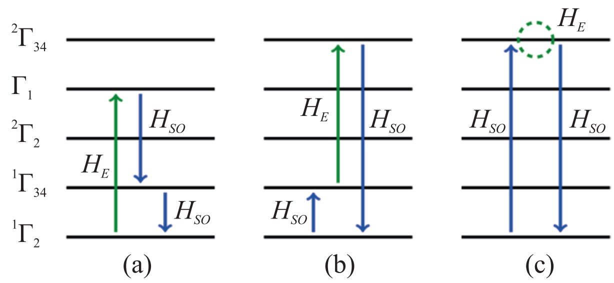

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схемы виртуальных возбуждений $Ni^{2+}(^3F)$

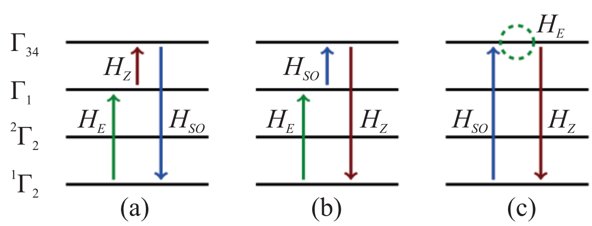

Рис. 2. (Цветной онлайн) Схемы виртуальных возбуждений $Cu^{2+}(^2D)$

В процессе возбуждения типа (a) из-за взаимодействия с электрическим полем (оператор H_E) происходит переход из основного состояния в возбужденное состояние Γ_1, затем из-за спин-орбитального взаимодействия в состояние $^1\Gamma_{34}$ и потом в основное $^1\Gamma_2$. При этом промежуточное состояние $^1\Gamma_{34}$ может быть заменено на $^2\Gamma_{34}$. Учитывая также процессы, сопряженные описанным, получаем эффективный оператор:

$$H_{\rm eff}^{(a)} = i\frac{\lambda_{\rm Ni}^2 D_z^{(a)}}{E\left(\Gamma_1\right)}\left(\frac{C_1\left(\sqrt{15}C_1+3C_2\right)}{E\left({}^1\Gamma_{34}\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{C_2\left(\sqrt{15}C_2-3C_1\right)}{E\left({}^2\Gamma_{34}\right)}\right)\left(S_+^2-S_-^2\right)E_z, \qquad (5)$$

где S_+ и S_- – операторы повышения и понижения спина, соответственно, и введено следующее обозначение:

$$D_z^{(a)} = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{21}}D_{-2}^{(12)3}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{35}}D_{-2}^{(14)3}+\frac{1}{30}D_{-2}^{(14)5}\right]. \qquad (6)$$

На рисунке 1b изображен второй возможный процесс: возбуждение вначале индуцируется спин-орбитальным взаимодействием (оператор H_{SO}) на ${}^1\Gamma_2$, затем происходит переход из-за взаимодействия с электрическим полем на ${}^2\Gamma_2$ и на третьем этапе под действием спин-орбитального взаимодействия – в основное состояние ${}^1\Gamma_2$. Соответствующий этому типу процессов оператор связи спинов с электрическим полем записывается следующим образом:

$$H_{\rm eff}^{(b)} = \frac{\lambda_{\rm Ni}^2\left(\sqrt{5}C_1+\sqrt{3}C_2\right)\left(\sqrt{3}C_1-\sqrt{5}C_2\right)}{2E\left({}^1\Gamma_{34}\right)E\left({}^2\Gamma_{34}\right)}\left(\left(S_+^2+S_-^2\right)\mathrm{Re}\left[D_z^{(b)}\right]+i\left(S_+^2-S_-^2\right)\mathrm{Im}\left[D_z^{(b)}\right]\right)E_z, \qquad (7)$$

$$D_z^{(b)} = \left(C_1^2-C_2^2\right)\left[-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{21}}D_2^{(12)3}-\sqrt{\frac{1}{35}}D_2^{(14)3}+\frac{1}{5}D_2^{(14)5}\right]+$$
$$+C_1C_2\left[-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{35}}D_{-2}^{(12)3}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{21}}D_{-2}^{(14)3}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}D_{-2}^{(14)5}\right]. \qquad (8)$$

Третий тип процессов на рис. 1c реализуется через орбитально вырожденные состояния ${}^2\Gamma_{34}$ (а также через ${}^1\Gamma_{34}$), в базисе которых имеются матричные элементы от оператора H_E. Соответствующий оператор связи спинов с электрическим полем записывается в виде:

$$H_{\rm eff}^{(c)} = -\frac{\lambda_{\rm Ni}^2}{4}\left(\frac{\left(\sqrt{5}C_1+\sqrt{3}C_2\right)^2\left(\left(S_+^2+S_-^2\right)\mathrm{Re}\left[D_z^{(c_1)}\right]+i\left(S_+^2-S_-^2\right)\mathrm{Im}\left[D_z^{(c_1)}\right]\right)}{E\left({}^1\Gamma_{34}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\sqrt{3}C_1-\sqrt{5}C_2\right)^2\left(\left(S_+^2+S_-^2\right)\mathrm{Re}\left[D_z^{(c_2)}\right]+i\left(S_+^2-S_-^2\right)\mathrm{Im}\left[D_z^{(c_2)}\right]\right)}{E\left({}^2\Gamma_{34}\right)^2}\right)E_z, \qquad (9)$$

где введены обозначения:

$$D_z^{(c_1)} = C_1^2D_1+C_1C_2D_2,$$
$$D_z^{(c_2)} = C_2^2D_1-C_1C_2D_2,$$
$$D_1 = -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{35}}D_{-2}^{(12)3}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{21}}D_{-2}^{(14)3}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}D_{-2}^{(14)5},$$
$$D_2 = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{21}}D_2^{(12)3}+2\sqrt{\frac{1}{35}}D_2^{(14)3}-\frac{2}{5}D_2^{(14)5}. \qquad (10)$$

4.2. $Cu^{2+}({}^2D)$. Отметим, что описанные выше операторы можно рассмотреть и в случае иона $\mathrm{Cu}^{2+}({}^2\mathrm{D})$ для соединения $\mathrm{CuB_2O_4}$. Однако, как нетрудно убедиться, для ионов с $S=1/2$ все матричные элементы операторов S_+^2 и S_-^2 равны нулю. Это объясняет резкое усиление связи спинов с электрическим полем в кристаллах $\mathrm{CuB_2O_4}$ при замене ионов $\mathrm{Cu}^{2+}({}^2\mathrm{D})$ на ионы $\mathrm{Ni}^{2+}({}^3\mathrm{F})$, обнаруженное в работе [7]. Происхождение магнитоэлектрической связи в $\mathrm{CuB_2O_4}$ мы можем также объяснить виртуальными процессами возбуждения иона меди (поясняются на рис. 2). Комбинируя в третьем порядке теории возмущений операторы H_E, H_{SO} и оператор взаимодействия орбитального момента меди с индукцией магнитного поля, получаем эффективный оператор энергии связи:

$$H_{\rm eff}^{\rm Cu} = \frac{\lambda_{\rm Cu}\mu_B d_z^{(a)}}{E\left(\Gamma_1\right)E\left(\Gamma_{34}\right)}\left[S_+B_++S_-B_-\right]E_z-$$
$$-\frac{\lambda_{\rm Cu}\mu_B}{2E\left(\Gamma_{34}\right)^2}\left[d_{z-}^{(b)}S_+B_++d_{z+}^{(b)}S_-B_-\right]E_z, \qquad (11)$$

где $B_+ = B_x + iB_y, B_- = B_x - iB_y$, а параметры, описывающие связь $3d$-электронов с электрическим полем, определяются выражениями:

$$d_z^{(a)} = \mathrm{Re}\left[-2\sqrt{\frac{1}{35}}D_2^{(12)3} + \sqrt{\frac{1}{21}}D_2^{(14)3} - \sqrt{\frac{1}{15}}D_2^{(14)5}\right],$$
$$d_{z\pm}^{(b)} = \sqrt{\frac{1}{35}}D_{\pm 2}^{(12)3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{21}}D_{\pm 2}^{(14)3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}D_{\pm 2}^{(14)5}. \tag{12}$$

5. Обсуждение результатов. Из выражений (5), (7) и (9) видно, что спонтанное упорядочение спинов Ni (или внешнее магнитное поле) в плоскости ab кристалла индуцирует возникновение электрической поляризации вдоль оси c. Этот результат нашего расчета соответствует экспериментальным данным [7]. Далее перейдем к численным оценкам входящих в (5), (7), (9) величин.

Подставляя (4) в (6), (8) и (10), получаем (в a. u.): $D_z^{(a)} = -0.006$, $D_z^{(b)} = -0.012 + 0.007i$, $D_z^{(c_1)} = -0.019 + 0.016i$, $D_z^{(c_2)} = 0.004 - 0.013i$. Используя эти величины и значения энергетических интервалов из таблицы 1, по формулам (5), (7), (9) получаем вид оператора связи спинов Ni с электрическим полем в расчете на один ион Ni:

$$H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Ni}} = d_1^{\mathrm{Ni}}\left(S_+^2 + S_-^2\right)E_z + id_2^{\mathrm{Ni}}\left(S_+^2 - S_-^2\right)E_z, \tag{13}$$

где $d_1^{\mathrm{Ni}} = 0.00114\,\mathrm{a.u.}$, $d_2^{\mathrm{Ni}} = -0.00115\,\mathrm{a.u.}$

Умножив эти значения на число ионов никеля ($N = 2.54 \cdot 10^{21}\,\mathrm{см}^{-3}$), соответствующих антиферромагнитно упорядоченной подрешетке спинов, в позициях $4b$, получаем коэффициенты макроскопической электрической поляризации $P_1 = d_1^{\mathrm{Ni}}N = 24.4\mu C/m^2$, $P_2 = d_2^{\mathrm{Ni}}N = -24.7\mu C/m^2$.

Максимальное значение макроскопической электрической поляризации в $(\mathrm{Ni,Cu})\mathrm{B_2O_4}$, зарегистрированное в работе [7], равно $3.5\mu C/m^2$ для концентрации никеля 2.7 %.

Таким образом, мы убеждаемся, что рассмотренный нами механизм вполне объясняет происхождение связи спинов иона никеля с электрическим полем.

Что касается механизма Аримы [10], то его можно оценить следующим образом: в формулах [10] так же, как и в (5), (7), (9) фигурирует параметр спин-орбитальной связи, умноженный на квадрат коэффициента перед антисвязывающей орбиталью ($\lambda_\sigma \sim 0.2$). При этом вместо энергии возбуждения иона Ni в формулах (5), (7), (9) будет фигурировать энергия переноса заряда из $2p$-оболочки кислорода в $3d$-оболочку никеля (меди), а это примерно $80000\,\mathrm{см}^{-1}$ [18]. Кроме того, в формулах Аримы [10] не принимается во внимание фактор усиления действия электрического поля на орбитальный момент $3d$-электрона, связанный с нечетным кристаллическим полем. Суммируя сказанное, приходим к выводу, что параметр связи спина с электрическим полем по механизму Аримы примерно на 2–3 порядка меньше измеренного в $(\mathrm{Ni,Cu})\mathrm{B_2O_4}$ и может быть отброшен не только в случае $(\mathrm{Ni,Cu})\mathrm{B_2O_4}$, но и в других оксидах с незаполненными $3d$-оболочками.

Как отмечалось выше, связь спинов меди с электрическим полем по механизмам (5), (7), (9) отсутствует. Этот вывод соответствует результатам работы [19], в которой магнитоэлектрическая связь в $\mathrm{CuB_2O_4}$ не была обнаружена, хотя для этого предпринимались специальные исследования. Позже в работе [20] сообщалось, что электрическая поляризация в $\mathrm{CuB_2O_4}$ вдоль оси c кристалла возникает, если приложить внешнее магнитное поле в плоскости ab.

Из (11) видно, что индукция магнитного поля $\mathbf{B}$, лежащая в плоскости ab, индуцирует электрическую поляризацию вдоль оси c кристалла. Перепишем (11), используя аналогичные (13) обозначения:

$$H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Cu}} = d_1^{\mathrm{Cu}}\left[S_+B_+ + S_-B_-\right]E_z + id_2^{\mathrm{Cu}}\left[S_-B_- - S_+B_+\right]E_z, \tag{14}$$

где $d_1^{\mathrm{Cu}} = 3.9 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{a.u.}$, $d_2^{\mathrm{Cu}} = 2.8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{a.u.}$ Коэффициенты макроскопической электрической поляризации в $\mathrm{CuB_2O_4}$, индуцированной внешним магнитным полем в плоскости ab равны: $P_1^{\mathrm{Cu}} = d_1^{\mathrm{Cu}}N = 0.0008\mu C/T \cdot m^2$, $P_2^{\mathrm{Cu}} = d_2^{\mathrm{Cu}}N = 0.0006\mu C/T \cdot m^2$. Таким образом, поляризация может проявиться лишь в сильных магнитных полях порядка $10\,T$, либо при допировании $\mathrm{CuB_2O_4}$ редкоземельными ионами с большими магнитными моментами, как это происходит в кристаллах $\mathrm{DyCrO_4}$ [21].

6. Заключение. В настоящем письме предложен механизм магнето-электрической связи спинов Ni^{2+} с внешним электрическим полем в $(\mathrm{Ni,Cu})\mathrm{B_2O_4}$, обусловленный совместным действием нечетного кристаллического поля и спин-орбитального взаимодействия. Показано, что упорядочение спинов никеля в плоскости ab кристалла при антиферромагнитном упорядочении или под действием внешнего магнитного поля индуцирует электрическую поляризацию вдоль оси c кристалла. Оцененное значение электрической поляризации соответствует по порядку величины имеющимся экспериментальным данным. Оценена связь спинов ионов меди в $\mathrm{CuB_2O_4}$ с электрическим и магнитными полями. Очевидно, что описанная нами схема расчета применима для широкого круга магнетиков, в которых магнитные ионы находятся в позициях без центра инверсии.

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

1. Y. Tokura, Science **312**, 1481 (2006).
2. S. W. Cheong and M. Mostovoy, Nat. Matter **6**, 13 (2007).
3. D. Khomskii, Physics **2**, 20 (2009).
4. A. P. Pyatakov and A. K. Zvezdin, Phys. Usp. **55**, 557 (2012).
5. Y. Tokura, S. Seki, and N. Nagaosa, Rep. Prog. Phys. **77**, 076501 (2014).
6. D. Shuai, L. Jun-Ming, C. Sang-Wook, and R. Zhifeng, Adv. Phys. **64**, 519 (2015).
7. N. D. Khanh, N. Abe, K. Kubo, M. Akaki, M. Tokunaga, T. Sasaki, and T. Arima, Phys. Rev. B **87**, 184416 (2013).
8. H. Katsura, N. Nagaosa, and A. V. Balatsky, Phys. Rev. Lett. **95**, 057205 (2005).
9. A. Sergienko and E. Dagotto, Phys. Rev. B **73**, 094434 (2006).
10. T. Arima, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 073702 (2007).
11. W. B. Mims, *The Linear Electric Field Effect in Paramagnetic Resonance*, Clarendon, Oxford (1976).
12. M. Martinez-Ripoll, S. Martínez-Carrera, and S. García-Blanco, Acta Crystallogr. B **27**, 677 (1971).
13. B. Z. Malkin, in *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, ed. by A. A. Kaplyanskii and R. M. Macfarlane, Elsevier, Amsterdam (1987), v. 21, ch. 2, p. 13.
14. R. V. Pisarev, A. M. Kalashnikova, O. Schöps, and L. N. Bezmaternykh, Phys. Rev. B **84**, 075160 (2011).
15. В. В. Меньшенин, ЖЭТФ **151**, 326 (2017).
16. М. В. Еремин, ЖЭТФ **156**, 1084 (2019).
17. M. V. Eremin, Phys. Rev. B **100**, 140404 (2019).
18. J. Simonetti and D. S. McClure, Phys. Rev. B **16**, 3887 (1977).
19. G. Nénert, L. N. Bezmaternykh, A. N. Vasiliev, and T. T. M. Palstra, Phys. Rev. B **76**, 144401 (2007).
20. S. Toyoda, N. Abe, and T. Arima, Phys. Rev. B **93**, 201109(R) (2016).
21. M. V. Eremin, Phys. Rev. B **102**, 104107 (2020).