Письма в ЖЭТФ, том 114, вып. 3, с. 160 – 166

Униполярные солитоноподобные структуры в неравновесных средах с диссипацией

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 191991 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 июня 2021 г.
После переработки 3 июля 2021 г.
Принята к публикации 4 июля 2021 г.

Предсказана возможность формирования униполярных солитоноподобных метастабильных объектов электромагнитной природы в неравновесных диссипативных средах. Показано, что после прохождения данных объектов среда переходит из неравновесного в короткоживущее метастабильное состояние, сохраняя на масштабах времени его жизни память о входных условиях.

DOI: 10.31857/S1234567821150040

1. Введение. Одной из тенденций развития современной нелинейной оптики и лазерной физики является создание в лабораторных условиях световых импульсов все более коротких длительностей. Особое место здесь занимают предельно короткие импульсы (ПКИ), содержащие порядка одного периода электромагнитных колебаний [1–8]. Очевидно, при теоретических исследованиях взаимодействия ПКИ с веществом несправедливо приближение медленно меняющихся огибающих [9].

В самое последнее время значительно возрос интерес к нелинейной оптике униполярных импульсов (УПИ) [10–12]. Такие сигналы состоят всего из половины периода электромагнитных колебаний. Следует заметить, что теоретические работы, связанные с динамикой униполярных импульсов в нелинейных средах, начали появляться еще в 1990-х гг. [4, 5, 13–15]. Однако именно в настоящее время данные исследования приобретают все большую актуальность [10–12, 16–18]. Здесь важно отметить, что нелинейное взаимодействие УПИ с веществом иногда приводит к эффектам, которые не имеют места в нелинейной оптике квазимонохроматических сигналов [11, 19]. УПИ могут найти приложения в динамической голографии, а также в современных системах передачи и обработки информации.

Другой современной тенденцией в развитии нелинейной оптики является бурный рост исследований, посвященных диссипативным оптическим солитонам [20–30]. Эти солитоны также могут быть использованы в системах оптической связи. Кроме того, диссипативные оптические солитоны представляют фундаментальный интерес. Такие солитоны формируются из-за взаимной компенсации притока запасенной в неравновесной среде энергии и оттока данной энергии в результате необратимых потерь.

Обобщая сказанное выше, приходим к выводу о том, что приобретают актуальность исследования возможностей формирования в неравновесных диссипативных средах униполярных солитоноподобных объектов. Этому и посвящена настоящая работа.

2. Вывод уравнения типа "реакция – диффузия". Рассмотрим распространение УПИ в двухуровневой среде. В данном случае модель двухуровневой среды является достаточно грубой. С другой стороны, данная модель обладает относительной простотой, что придает ей привлекательность. Более того, двухуровневая модель при определенных условиях вбирает в себя основные оптические свойства любой изотропной среды, включая ее нелинейные и дисперсионные характеристики [13]. В нашем случае будем считать, что остальные квантовые состояния удалены от двух рассматриваемых состояний настолько, что их влиянием можно пренебречь. Такая ситуация может выполняться в случае туннельных квантовых переходов [31, 32]. Здесь имеются основное симметричное и возбужденное асимметричное состояния, разделенные частотой ω_0.

Материальные уравнения, описывающие взаимодействие двухуровневого атома с электрическим полем E линейно поляризованного электромагнитного импульса, имеют хорошо известный вид [33]

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\omega_0 V - \frac{U}{T_2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \omega_0 U - \frac{V}{T_2} + \Omega W, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\Omega V - \frac{W + 1/2}{T_1}, \qquad (2)$$

где T_1 и T_2 – времена энергетической и фазовой релаксации соответственно, $\Omega = 2\mu E/\hbar$, μ – матричный элемент дипольного момента рассматриваемого квантового перехода, $\hbar$ – постоянная Планка, U, V и W – безразмерные переменные Блоха; при этом переменная U имеет смысл нестационарного дипольного момента, индуцируемого электрическим полем импульса, V – это быстрота изменения данного дипольного момента, W – разность населенностей квантовых состояний двухуровневого атома.

При полной заселенности основного состояния $W = -1/2$. Если же заселен только возбужденный уровень, то $W = +1/2$.

Дополним систему (1) волновым уравнением, считая, что импульс распространяется вдоль оси z:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{n_m^2}{c^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = \frac{8\pi\mu}{\hbar c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \qquad (3)$$

где c – скорость света в вакууме, n_m – показатель преломления среды, содержащей примесные двухуровневые атомы, P – поляризационный отклик системы двухуровневых атомов, определяемый выражением

$$P = 2\mu n U, \qquad (4)$$

n – концентрация двухуровневых атомов.

Ниже, следуя работе [34], будем предполагать, что концентрация n мала, так что выполняется неравенство

$$\eta = \frac{8\pi\mu^2 n}{\hbar\omega_0 n_m} \ll 1. \qquad (5)$$

Это обстоятельство позволяет нам редуцировать порядок волнового уравнения (3) относительно производных. Для этого перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{n_m}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n_m}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Omega = \frac{8\pi\mu}{\hbar c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}.$$

Так как импульс распространяется вдоль оси z, а правая часть уравнения мала, то с хорошей точностью запишем $c\partial/\partial z \approx -n_m \partial/\partial t$. Применив это равенство в левой скобке, после использования (4), (5), интегрирования по времени и учета первого уравнения (1) будем иметь

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{n_m}{c}\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\omega_0}{c}\eta\left(\omega_0 V + \frac{U}{T_2}\right). \qquad (6)$$

Таким образом, мы имеем самосогласованную систему уравнений (1), (2) и (6). Для исключения из этой системы материальных переменных будем считать, что временная длительность τ_p импульса удовлетворяет условию $\tau_p \gg T_2$. С другой стороны, для двухуровневых атомов в конденсированных средах времена релаксации T_1 и T_2 очень сильно разнятся между собой. При этом $T_2/T_1 \sim 10^{-3}$–10^{-9} [35]. Таким образом, с хорошим запасом выполняется неравенство $T_2 \ll T_1$. Данное обстоятельство дает нам основания полагать, что

$$T_2 \ll \tau_p \ll T_1. \qquad (7)$$

Полагая также, что длительность Δt наблюдения всего процесса удовлетворяет условию

$$\Delta t \ll T_1, \qquad (8)$$

мы можем положить в уравнении (2) $T_1 = \infty$.

Введя динамическую переменную $S = U + iV$, из (1) будем иметь

$$S(z,t) = i\int_0^\infty \Omega(z,t-\tau)W(z,t-\tau)e^{-(1/T_2 - i\omega_0)\tau}d\tau. \qquad (9)$$

Так как длительность импульса значительно превышает характерное время релаксации дипольного момента, то дисперсия является слабой. Тогда мы можем использовать разложение, формально схожее с разложением Криспа [13, 36]

$$\Omega(z,t-t')w(z,t-t') = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t'^k\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\Omega(z,t)w(z,t)). \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$S(z,t) = i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{T_2}{1 - iT_2\omega_0}\right)^{k+1}\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\Omega w). \qquad (11)$$

Сохранив здесь только первые три члена разложения, после разделения действительной и мнимой частей и учета неравенства

$$T_2\omega_0 \gg 1 \qquad (12)$$

найдем

$$U = -\frac{\Omega}{\omega_0}W + \frac{2}{T_2\omega_0^3}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega W) + \frac{1}{\omega_0^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Omega W), \qquad (13)$$

$$V = \frac{\Omega}{T_2\omega_0^2}W + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega W) - \frac{3}{T_2\omega_0^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Omega W). \qquad (14)$$

При условиях (7), (8) и (12) разность населенностей W под действием электромагнитного импульса в среде изменяется незначительно. Учитывая это, перепишем (13) и (14) в виде

$$U = -\frac{\Omega}{\omega_0}W + \frac{2}{T_2\omega_0^3}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega W) + \frac{W_{-\infty}}{\omega_0^3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}, \quad (13a)$$

$$V = \frac{\Omega}{T_2\omega_0^2}W + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(\Omega W) - \frac{3W_{-\infty}}{T_2\omega_0^4}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}, \quad (14a)$$

где $W_{-\infty}$ – начальная разность населенностей (при $t = -\infty$).

Подставляя разложение (14a) с сохранением только первого члена в уравнение (2) при $T_1 = \infty$, получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\Omega^2 W}{T_2\omega_0^2} \approx -\frac{W_{-\infty}\Omega^2}{T_2\omega_2^2}.$$

После интегрирования будем иметь

$$W = W_{-\infty}\left(1 - \frac{1}{T_2\omega_0^2}\int\limits_{-\infty}^{t}\Omega^2 dt'\right). \quad (15)$$

Подставляя (13a) и (14a) в (6) с учетом (15), придем к уравнению

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Omega\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Omega^2 d\tau'\right) + \beta\frac{\partial^2\Omega}{\partial\tau^2}, \quad (16)$$

где $\tau = t - z/v_0$, $1/v_0 = (n_m - W_{-\infty}\eta)/c$, $\alpha = -W_{-\infty}\frac{\eta}{cT_2\omega_0^2}$, $\beta = 2\alpha$.

Уравнение (16) можно отнести к классу уравнений типа “реакция – диффузия” [37].

В случае равновесной начальной заселенности квантовых состояний двухуровневых атомов ($W_{-\infty} < 0$) имеем $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Тогда второе слагаемое в правой части (16) описывает диффузионное (вязкое) затухание импульса. Первое слагаемое в правой части (16) соответствует нелинейному усилению импульса за счет тенденции к выравниванию разности населенностей квантовых состояний (см. (15)).

Если до импульсного воздействия двухуровневая среда обладает инверсной разностью населенностей ($W_{-\infty} > 0$), то $\alpha < 0$ и $\beta < 0$. В этом случае второе слагаемое в правой части (16) соответствует отрицательной диффузии (вязкости). Таким образом, данное слагаемое описывает линейную стадию самосжатия импульса, сопровождаемого его пиковым усилением. В свою очередь первое слагаемое в правой части (16) описывает нелинейный процесс насыщения данного усиления из-за уменьшения разности населенностей квантовых уровней.

В обоих рассмотренных случаях имеются два конкурирующих процесса, способных при некоторых условиях уравновесить друг друга. Это может привести к формированию локализованных солитоноподобных структур.

Важно заметить, что использованные приближения при выводе уравнения (16) не нарушают следующего из точных уравнений Максвелла правила сохранения электрической площади $S \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Omega d\tau$ УПИ [38]. Действительно, интегрируя (16) по τ от $-\infty$ до $+\infty$ и учитывая, что электрическое поле импульса со всеми его производными стремится к нулю при $\tau \to \pm\infty$, а энергия импульса $\sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Omega^2 d\tau$ имеет конечное значение, придем к равенству $dS/dz = 0$. Отсюда следует, что $S = \text{const}$.

3. Солитоноподобное решение и его физический анализ. Уравнение (16) имеет решение в виде бегущего униполярного солитоноподобного импульса:

$$\Omega = \pm\Omega_m \operatorname{sech}\xi, \quad (17)$$

где $\xi = (t - z/v)/\tau_p$, а амплитуда Ω_m и скорость v связаны с временной длительностью τ_p импульса соотношениями

$$\Omega_m = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{\beta}{\tau_p}. \quad (18)$$

Используя (15), (17) и (18), а также выражения для α и β, найдем изменение разности населенностей в виде бегущего фронта, сопровождающего импульс (17), (18):

$$W = W_{-\infty}\left[1 - \frac{2}{\omega_0^2 T_2\tau_p}(1 + \tanh\xi)\right]. \quad (19)$$

Отсюда имеем $W_{+\infty} = W_{-\infty}\left(1 - \frac{4}{\omega_0^2 T_2\tau_p}\right)$. Тогда легко видеть, что выражение (18) для скорости можно переписать в виде

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c}\left(n_m - \eta\frac{W_{-\infty} + W_{+\infty}}{2}\right). \quad (20)$$

Рассматриваемое солитоноподобное решение содержит один непрерывный свободный параметр, в качестве которого здесь выбрана временная длительность τ_p импульса. Таким свойством обычно обладают консервативные солитоны, сохраняя в непрерывном свободном параметре память об условиях на входе в среду. Однако в нашем случае явно присутствует диссипация в виде фазовой релаксации. К тому же длительность солитоноподобного импульса значительно превышает время фазовой релаксации. Поэтому диссипативные процессы проявляют себя достаточно отчетливо, что и следует из уравнения (16).

Для выяснения физического механизма формирования локализованного импульса (17), (18) умножим обе части уравнения (6) на 2Ω. Используя затем (2) при $T_1 = \infty$, после интегрирования по t от $-\infty$ до $+\infty$ будем иметь

$$\frac{d}{dz}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Omega^2 dt =$$

$$= 2\eta\frac{\omega_0}{c}\left[\omega_0(W_{-\infty} - W_{+\infty}) + \frac{1}{T_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Omega U dt\right], \quad (21)$$

где $W_{+\infty}$ – разность населенностей после прохождения импульса.

С учетом (4), а также выражений для Ω и η равенство (21) можно переписать в виде

$$\frac{dw_e}{dz} = n\hbar\omega_0(W_{-\infty} - W_{+\infty}) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q dt. \quad (21a)$$

Здесь $w_e = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_e dt$ – световая энергия импульса, проходящая через единицу площади поперечного сечения среды, $I_e = cn_m E^2/4\pi$ – интенсивность импульса,

$$Q \equiv -\frac{PE}{T_2}. \quad (22)$$

Первое слагаемое в правой части (21a) представляет собой взятое с обратным знаком изменение плотности энергии, запасенной в двухуровневых атомах.

Очевидно, что Q – это есть количество теплоты, выделяемой за единицу времени в единице объема среды за счет необратимой релаксации индуцированного дипольного момента рассматриваемого квантового перехода.

Так как энергия стационарного импульса (17), (18) при его распространении не изменяется, то $dw_e/dz = 0$. Тогда в консервативном случае ($T_2 = \infty$) имеем $W_{+\infty} = W_{-\infty}$. Таким образом, консервативный стационарный солитон, как хорошо известно, своим передним фронтом возбуждает среду, а задним фронтом переводит среду в исходное состояние. В нашем же случае, как видно из (21a), справедливо условие $W_{+\infty} \neq W_{-\infty}$. Таким образом, состояние среды изменяется после распространения в ней стационарного солитоноподобного импульса (17), (18). Это является отличительным свойством волн переключения в бистабильных системах [20, 27, 39].

Рассмотрим по отдельности два случая.

a) Двухуровневые атомы с инверсной населенностью ($W_{-\infty} > 0$). Система в целом – среда и содержащиеся в ней двухуровневые атомы – является неравновесной. Второе слагаемое в скобках выражения (15) описывает малую поправку к $W_{-\infty}$, поэтому оно заведомо меньше единицы. Следовательно, разность населенностей при условиях (7) и (8) не изменяет своего знака. Второе и третье слагаемые в разложении (13a) представляют собой малые поправки к первому слагаемому данного разложения. Поэтому при $W_{-\infty} > 0$ динамические переменные U и Ω (P и E) имеют разные знаки. Тогда, как следует из (22), $Q > 0$. В свою очередь из (21a) следует, что в состоянии равновесия ($w_e = \mathrm{const}$) имеем $W_{+\infty} < W_{-\infty}$ (рис. 1).

Таким образом, поглощая часть энергии, запасенной в усиливающей среде, импульс необратимо теряет ее в виде тепла, выделяющегося из-за затухания индуцированного дипольного момента за счет фазовой релаксации. Результатом такого баланса притока и оттока энергии является формирование униполярного солитоноподобного сигнала (17), (18). Как видно из (20), в этом случае скорость распространения униполярного солитоноподобного импульса превышает фазовую скорость света в среде: $v > c/n_m$. Механизм распространения здесь связан с процессом переформирования и обусловлен протяженным характером импульсных фронтов. Подробности см., например, в [40–43]. Так как в рассматриваемом случае $\alpha < 0$ и $\beta < 0$, то из (18) видно, что с укорочением длительности импульса его амплитуда возрастает, а скорость уменьшается.

b) Двухуровневые атомы с нормальной населенностью ($W_{-\infty} < 0$). В этом случае $Q < 0$. Следовательно, в стационарном режиме распространения $W_{+\infty} > W_{-\infty}$ (рис. 1). Таким образом, после прохождения импульса в системе двухуровневых атомов образуется запасенная энергия. Такая ситуация возможна, если, как и в предыдущем случае, рассматриваемая безграничная среда и содержащиеся в ней двухуровневые атомы исходно находятся в неравновесном состоянии. При этом, в согласии со вторым началом термодинамики, температура среды превышает температуру двухуровневых атомов. В этом случае приток в импульс тепла из окружающей среды компенсируется оттоком энергии из импульса к двухуровневым атомам. Среда с показателем преломления n_m, являясь безграничной, выступает здесь в роли термостата. Поэтому изменением ее

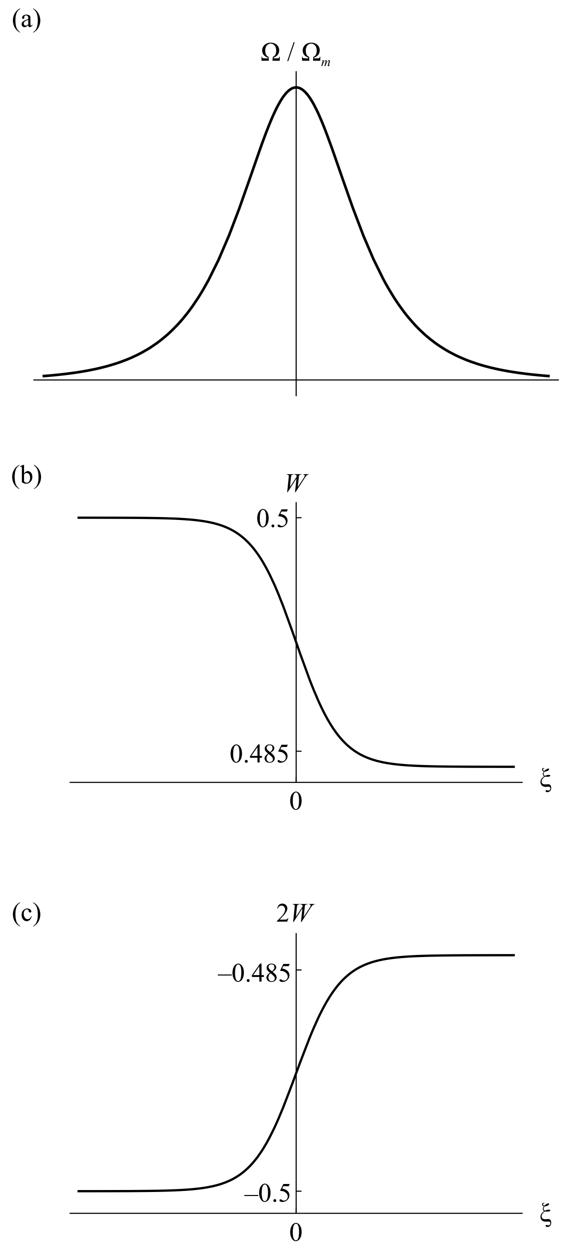

Рис. 1. Бегущий профиль электрического поля солитонопдобного импульса (a) и сопровождающие его профили разности населенностей в системе двухуровневых атомов с инверсной (b) и нормальной (c) населенностями

состояния при данном процессе можно пренебречь. В свою очередь униполярный электромагнитный сигнал стимулирует установление термодинамического равновесия между двухуровневыми атомами и двухуровневой средой. В рассматриваемом случае параметры α и β положительны. Тогда из (18) следует, что с укорочением временной длительности τ_p униполярного импульса его амплитуда и скорость возрастают. Так как знаки разностей населенностей $W_{-\infty}$ и $W_{+\infty}$ отрицательны, то, как видно из (20), скорость распространения импульса меньше фазовой скорости света в среде.

Сделаем некоторые численные оценки. Взяв, например, для туннельных переходов протона в кристалле KDP [31, 32] $\omega_0 \sim 10^{13}\,\text{с}^{-1}$, $T_1 \sim 10^{-8}$ с и $T_2 \sim 10^{11}$ с, для удовлетворения неравенству (7) примем $\tau_p \sim 10^{-10}$ с. Тогда, как видно из (18) при $\beta = 2\alpha$, $\Omega_m \sim 1/\tau_p \sim 10^{10}\,\text{с}^{-1}$. Учитывая, что $\mu \sim 10^{-18}$ СГСЭ, найдем для электрического поля импульса $E \sim \hbar\Omega/\mu \sim 10$ СГСЭ. Следовательно, интенсивность $I \sim cE^2/4\pi \sim 10^4\,\text{Вт/см}^2$.

Пусть концентрация двухуровневых переходов $n \sim 10^{19}\,\text{см}^{-3}$. Тогда $\eta \sim 10^{-2}$, т.е. условие (5) выполняется с хорошим запасом. Отсюда и из (20) приходим к выводу, что скорость распространения рассмотренных здесь солитоноподобных структур отличается от скорости света на величины порядка одного процента.

4. Заключение. Таким образом, в настоящей работе на основе выведенного уравнения (16) и его солитоноподобного решения (17), (18) выявлена принципиальная возможность формирования в неравновесных средах солитоноподобных униполярных объектов электромагнитной природы. Длительность этих объектов превышает время фазовой релаксации двухуровневых переходов, но короче времени энергетической релаксации. По всей видимости, именно этим обстоятельством обусловлено то, что рассмотренные солитоноподобные объекты обладают как свойствами консервативных солитонов, так и свойствами волн переключения в диссипативных средах. Консервативное свойство здесь заключается в наличии у данных объектов непрерывного свободного параметра. Это означает, что такие объекты сохраняют в себе память об условиях на входе в неравновесную среду. Свойство волн переключения здесь проявляется в том, что после их прохождения в среде состояние последней изменяется, становясь ближе к равновесному состоянию. При этом конечное состояние среды отнюдь не является термодинамически равновесным, которое устанавливается на временах, превышающих время T_1 энергетической релаксации. Скорее, здесь следует говорить о переходе среды из неравновесных к метастабильным состояниям, которые разрушаются на временах порядка T_1. Таким образом, рассмотренные здесь солитоноподобные объекты, способные формироваться только в неравновесных средах, являются достаточно короткоживущими.

Использованная здесь модель двухуровневых атомов для исследования взаимодействия униполярных импульсов с веществом является, на первый взгляд, весьма грубой. Однако можно показать, что при условиях (7), (8) и (11) данная модель, являясь наиболее простой, в качественном отношении адекватно описывает нелинейную динамику широкополосных сигналов.

Результаты наших исследований по формированию униполярных солитоноподобных структур в многоуровневых неравновесных средах с диссипацией мы планируем опубликовать отдельно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект # 17-11-01157).

---

1. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
2. А. И. Маймистов, Квантовая электроника **30**, 287 (2000) [A. I. Maimistov, Quantum Electron. **30**, 287 (2000)].
3. H. Leblond and D. Mihalache, Phys. Rep. **523**, 61 (2013).
4. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988) [E. M. Belenov, P. G. Kryukov, A. V. Nazarkin, A. N. Oraevskii, and A. V. Uskov, JETP Lett. **47**, 523 (1988)].
5. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990) [E. M. Belenov and A. V. Nazarkin, JETP Lett. **51**, 288 (1990)].
6. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997) [S. A. Kozlov and S. V. Sazonov, JETP **84**, 221 (1997)].
7. H. Leblond, S. V. Sazonov, I. V. Mel'nikov, D. Mihalache, and F. Sanchez, Phys. Rev. A **74**, 063815 (2006).
8. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, Письма в ЖЭТФ **112**, 30 (2020) [S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, JETP Lett. **112**, 24 (2020)].
9. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, М. (1978) [L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, John Wiley and Sons, N.Y. (1978)].
10. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. А. Шимко, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, Письма в ЖЭТФ **110**, 9 (2019) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. A. Shimko, A. V. Pakhomov, and N. N. Rosanov, JETP Lett. **110**, 15 (2019)].
11. Р. М. Архипов, Письма в ЖЭТФ **113**, 636 (2021).
12. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, М. О. Жукова, А. Н. Цыпкин, Н. Н. Розанов, Письма в ЖЭТФ **113**, 237 (2021) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. V. Pakhomov, M. O. Zhukova, A. N. Tcypkin, and N. N. Rosanov, JETP Lett. **113**, 242 (2021)].
13. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991) [E. M. Belenov, A. V. Nazarkin, and V. A. Ushchapovskii, JETP **73**, 57 (1991)].
14. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **53**, 400 (1991) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **53**, 420 (1991)].
15. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1595 (1998) [A. Yu. Parkhomenko and S. V. Sazonov, JETP **87**, 864 (1998)].
16. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Phys. Rev. A **98**, 063803 (2018).
17. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Phys. Rev. A **100**, 053807 (2019).
18. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **146**, 483 (2014) [S. V. Sazonov, JETP **119**, 423 (2014)].
19. Н. В. Знаменский, С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **85**, 440 (2007) [N. V. Znamenskii and S. V. Sazonov, JETP Lett. **85**, 358 (2007)].
20. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические и родственные солитоны*, Физматлит, М. (2021).
21. С. К. Турицын, Н. Н. Розанов, И. Я. Яруткина, А. Е. Беднякова, С. В. Федоров, О. В. Штырина, М. П. Федорук, УФН **186**, 713 (2016) [S. K. Turitsyn, N. N. Rosanov, I. A. Yarutkina, A. E. Bednyakova, S. V. Fedorov, O. V. Shtyrina, and M. P. Fedoruk, Phys.-Uspekhi **59**, 642 (2016)].
22. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and Ph. Grelu, International Journal of Bifurcation and Chaos **19**, 2621 (2009).
23. N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Phys. Rev. Lett. **117**, 183901 (2016).
24. С. В. Федоров, Н. Н. Розанов, Н. А. Веретенов, Письма в ЖЭТФ **107**, 342 (2018) [S. V. Fedorov, N. N. Rosanov, and N. A. Veretenov, JETP Lett. **107**, 327 (2018)].
25. V. E. Lobanov, O. V. Borovkova, and B. A. Malomed, Phys. Rev. A **90**, 053820 (2014).
26. V. E. Lobanov, N. M. Kondratiev, and I. A. Bilenko, Opt. Lett. **46**, 2380 (2021).
27. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит, М. (2011).
28. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **111**, 303 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **111**, 268 (2020)].
29. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **112**, 79 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **112**, 71 (2020)].
30. S. V. Sazonov, Phys. Rev. A **103**, 053512 (2021).
31. В. Г. Вакс, *Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков*, Наука, М. (1983).
32. Р. Блинц, Б. Жекш, *Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики*, Мир, М. (1975) [R. Blinc and B. Žekš, *Soft Modes in Ferroelectrics and Antiferroelectrics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1974)].

33. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, М. (1983) [G. L. Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory*, Wiley, N.Y. (1980)].
34. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen. **6**, L53 (1973).
35. П. Г. Крюков, В. С. Летохов, УФН **99**, 169 (1969) [P. G. Kryukov and V. S. Letokhov, Sov. Phys. Usp. **12**, 641 (1970)].
36. M. D. Crisp, Phys. Rev. A **8**, 2128 (1973).
37. V. Danilov, V. Maslov, and K. Volosov, *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*, Kluwer, Dordrecht (1995).
38. Н. Н. Розанов, Оптика и спектроскопия **107**, 761 (2009) [N. N. Rosanov, Optics and Spectroscopy **107**, 721 (2009)].
39. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно, *Автоволновые процессы*, Наука, М. (1987).
40. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, ЖЭТФ **50**, 23 (1966) [N. G. Basov, R. V. Ambartsumyan, V. S. Zuev, P. G. Kryukov, and V. S. Letokhov, Sov. Phys. JETP **23**, 14 (1966)].
41. А. Н. Ораевский, УФН **168**, 1311 (1998) [A. N. Oraevsky, Phys.-Uspekhi **41**, 1199 (1998)].
42. С. В. Сазонов, УФН **171**, 663 (2001) [S. V. Sazonov, Phys.-Uspekhi **44**, 631 (2001)].
43. A. N. Bugay and S. V. Sazonov, J. Opt. B: Quant. and Semiclassical Optics **6**, 328 (2004).