Письма в ЖЭТФ, том 114, вып. 4, с. 221 – 227

Эффекты сильного взаимодействия в спектрах излучения квантовой точки, связанной с фононным резервуаром

Р. Х. Гайнутдинов[+*1)], *Л. Я. Набиева*[+], *А. И. Гарифуллин*[+], *А. Ширделхавар*[+], *А. А. Мутыгуллина*[+], *М. Х. Салахов*[+*]

[+]*Институт физики, Казанский федеральный университет, 420008 Казань, Россия*

[*]*Институт прикладных исследований, Академия наук РТ, 420111 Казань, Россия*

Поступила в редакцию 13 июля 2021 г.
После переработки 22 июля 2021 г.
Принята к публикации 23 июля 2021 г.

Исследуются эффекты взаимодействия экситона одиночной квантовой точки с резервуаром акустических фононов за пределами теории возмущений. В случае сильных взаимодействий становится неприменимой модель независимых бозонов. Предлагается обобщение этой модели на случай сильного взаимодействия экситона с резервуаром акустических фононов. Мы рассчитываем собственно-энергетическую функцию квантовой точки за пределами теории возмущений и марковского приближения. Важность выхода за рамки теории возмущений демонстрируется на спектрах излучения одиночной квантовой точки.

DOI: 10.31857/S1234567821160047

1. Введение. Передовой фронт оптических квантовых технологий [1–5] строится на возможности генерации и управления большим числом одиночных неразличимых фотонов с помощью различных устройств [6]. В качестве таковых, большую популярность в последние десятилетия приобрели полупроводниковые коллоидные квантовые точки (КТ). КТ являются интересной системой в связи с наличием уникальных оптических свойств, таких как узкий и симметричный спектр флуоресценции, широкий спектр поглощения, перенастраиваемая длина волны излучения, зависящая от размеров КТ, высокая фотостабильность и высокий квантовый выход [7–13]. Благодаря данным уникальным характеристикам КТ широко применяются в микроскопии и картировании нанобъектов [7–10], в различных фотонных и оптоэлектронных приложениях как однофотонные источники [14–19], солнечные элементы и светодиоды [20–22], нанолазеры и фотодетекторы [23, 24], а также используются в создании квантовых компьютеров и в квантовых вычислениях [2–4, 25, 26].

Вопрос о фононных возбуждениях в полупроводниковых нанокристаллах достаточно хорошо изучен и экспериментально, и теоретически [27, 28]. Наряду с этим, во многих приложениях фотоники и квантовых технологий приходится сталкиваться с ситуацией, когда взаимодействие квантовых систем с окружением становится сильным. В этом случае теория возмущения становится недостаточно эффективной. Однако наиболее важным является то, что взаимодействие КТ с резервуаром фононов, имеющим бесконечно большое количество степеней свободы, является нелокальным во времени и в пространстве, другими словами, немарковским [29]. Вместе с тем, в работе [30] было выведено самое общее динамическое уравнение (обобщенное динамическое уравнение, ОДУ), совместное с современными концепциями квантовой физики. Как хорошо известно, причиной ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля является локальность взаимодействия в пространстве и во времени. Важным является то, что ОДУ позволяет решить проблему ультрафиолетовых расходимостей, поскольку оно допускает расширение квантовой динамики на случай нелокальных во времени взаимодействий. Возможности обобщенной квантовой динамики (ОКД) были продемонстрированы в работах [31–36]. В работе [36] было показано, что динамика нуклонов при низких энергиях описывается ОДУ с нелокальным во времени взаимодействием, которое в данном случае не сводится к уравнению Шредингера. При этом, когда динамику системы генерирует мгновенное взаимодействие, ОДУ сводится к уравнению Шредингера (марковское приближение).

2. Обобщенная квантовая динамика и описание нелокальных во времени взаимодействий. В общем случае, окружение состоит из практически бесконечного числа степеней свободы и действует на квантовую систему как единое целое, на-

[1)]e-mail: Renat.Gainutdinov@kpfu.ru

зываемое резервуаром. Такое эффективное взаимодействие нелокально как в пространстве, так и во времени, и, следовательно, динамика в системе является негамильтоновой (немарковской). Кроме того, при решении задач физики многих частиц нужно начинать с модельных гамильтонианов. Было показано, что уравнение Шредингера не является самым общим динамическим уравнением, согласующимся с современными представлениями квантовой физики, и более общее уравнение движения было выведено в [30]. Фундаментальная природа ОДУ проявляется не только в том, что оно расширяет квантовую динамику на случай, когда динамика генерируется нелокальным во времени взаимодействием, но и в том, что в отличие от уравнения Шредингера, включающего гамильтониан взаимодействия, вид ОДУ не зависит от особенностей взаимодействия (эти особенности содержатся в граничном условии для уравнения). Это позволяет находить формальные решения различных физических задач из первых принципов, которые также не зависят от особенностей взаимодействия. ОДУ записывается в терминах оператора $\tilde{S}(t_2,t_1)$, который определяет вклад в оператор эволюции $U(t,t_0)$, от процесса, в котором взаимодействие начинается в момент времени t_1 и заканчивается в момент времени t_2:

$$\langle\psi_2|U(t,t_0)|\psi_1\rangle = \\ = \langle\psi_2|\psi_1\rangle + \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \langle\psi_2|\tilde{S}(t_2,t_1)|\psi_1\rangle, \quad (1)$$

$$(t_2-t_1)\tilde{S}(t_2,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt_4 \int_{t_1}^{t_4} dt_3 (t_4-t_3)\tilde{S}(t_3,t_1). \quad (2)$$

Граничное условие для уравнения (2) соответствует взаимодействию на бесконечно малом временном промежутке $t_2 \to t_1$, определяемом гамильтонианом взаимодействия $\tilde{S}(t_2,t_1) \to H_{\mathrm{int}}(t_2,t_1)$. С учетом того, что в картине Шредингера оператор эволюции можно записать через оператор Грина $G(z)$, имеем $U_S(t,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-izt}G(z)dx$, $z = x+iy$. Тогда в энергетическом представлении ОДУ принимает вид

$$\frac{dT(z)}{dz} = -T(z)(G_0)(z))^2 T(z), \quad (3)$$

$$T(z) = i\int_0^{\infty} d\tau \exp(i(z-H_0)t_2)\tilde{S}(t_2,t_1)\exp(-i(z-H_0)t_1). \quad (4)$$

Данный формализм позволяет с самого начала учесть, что вклад в оператор Грина $G(z)$, который исходит от процессов, связанных с самодействием частиц, имеет ту же структуру, что и свободный оператор Грина $G_0(z)$. По этой причине, естественно, заменить $G_0(z)$ оператором $\tilde{G}_0(z)$, описывающим эволюцию системы, когда частицы свободно распространяются,

$$\langle m'|\tilde{G}_0(z)|m\rangle = \frac{\langle m'|m\rangle}{z-E_m-C_m(z)}, \quad (5)$$

где $|m\rangle$ – собственные векторы свободного гамильтониана ($H_0|m\rangle = E_m|m\rangle$). В таком случае полный оператор Грина принимает вид

$$G(z) = \tilde{G}_0(z) + \tilde{G}_0(z)M(z)\tilde{G}_0(z), \quad (6)$$

где оператор $M(z)$ описывает процессы взаимодействия частиц друг с другом [29]. Уравнение для собственно-энергетической функции $C_m(z)$, имеет вид

$$\frac{dC_m(z)}{dz} = -\langle m|M(z)(\tilde{G}_0(z))^2 M(z)|m\rangle, \quad \langle m|m\rangle = 1, \quad (7)$$

а условие $z - E_m^{(0)} - C_m(z) = 0$ определяет физические массы частиц. Фактически, поскольку наибольший вклад вносят процессы, связанные с фундаментальным взаимодействием в системе, в лидирующем порядке уравнение для $C_m(z)$ сводится к уравнению

$$\frac{dC_m^{(0)}(z)}{dz} = -\langle m|H_I(\tilde{G}_0(z))^2 H_I|m\rangle, \quad \langle m|m\rangle = 1. \quad (8)$$

Собственно-энергетическая функция (СЭФ) играет важную роль как в квантовой электродинамике, так и в физике твердого тела. Понятие СЭФ нашло широкое распространение в физике твердого тела [37], например, СЭФ Фана–Мигдала [38, 39]. Конкретно в нашем случае СЭФ определяет поправку к уровню энергии экситона КТ, возникающую за счет взаимодействия с фононами окружения. Зависимость СЭФ $C_m(z)$ от энергии означает, что взаимодействие является нелокальным во времени, иными словами, в этом случае проявляются немарковские эффекты. В предыдущих исследованиях данная зависимость не учитывалась, за исключением некоторых работ [29, 40]. В данной работе подробно показывается, что для решения ряда проблем необходимо использование формализма ОКД.

3. Экситон-фононное взаимодействие. Рассмотрим КТ, сильно связанную с резервуаром акустических фононов. Для описания процессов квантовых флуктуаций квазичастиц между уровнями квантовых точек, одетых бозонной модой, используем граничные условия $M^{(0)}(z) = H_I$. Гамильтониан модели независимых бозонов, описывающий экситон-фононное взаимодействие, имеет вид [41]

$$H_I = \sum_q g_x^q (b_q + b_q^\dagger)|x\rangle\langle x|, \tag{9}$$

где $|x\rangle$ – вектор экситонного состояния, q обозначает различные акустические фононные моды с энергией ω_q, $b_q^\dagger$ и b_q – операторы рождения и уничтожения фононов, соответственно, g_x^q – деформационный потенциал связи, который зависит от материальных параметров основного полупроводника и волновой функции экситона. Итак, уравнение (7) в лидирующем порядке можно записать в виде

$$\frac{dC_{x,\mu}(z)}{dz} = -\sum_q \sum_\mu \frac{\langle x,\mu|H_I|x,\mu,q\rangle\langle x,\mu,q|H_I|x,\mu\rangle}{(z-E_x-\omega_q)^2}. \tag{10}$$

Усредняя по степеням свободы резервуара $|\mu\rangle$, получаем

$$\frac{dC_x(z)}{dz} = -\sum_q \left\{ \frac{|g(q)|^2(1+n(q))}{(z-E_x-\omega_q)^2} + \frac{|f(q)|^2 n(q)}{(z-E_x+\omega_q)^2} \right\}. \tag{11}$$

Решая уравнение по теории возмущений, приходим к выражению для СЭФ:

$$C_x(z) = \sum_q \left\{ \frac{|g(q)|^2(1+n(q))}{z-E_x-\omega_q} + \frac{|g(q)|^2 n(q)}{z-E_x+\omega_q} \right\}. \tag{12}$$

4. Перенормировка оператора Грина. В случае сильной связи нельзя ограничиваться уравнением (10), поэтому необходим выход за рамки теории возмущений, в котором СЭФ определяется оператором $M(z)$:

$$\frac{dC_{x,\mu}(z)}{dz} = -\sum_q \sum_\mu \frac{\langle x,\mu|M(z)x|,\mu,q\rangle\langle x,\mu,q|M(z)|x,\mu\rangle}{(z-E_{x,\mu}-\omega_q-C_{x,\mu}(z))^2}, \tag{13}$$

где вектор $|\mu\rangle$ определяет состояние резервуара. Представим $C_{x,\mu}$ в виде

$$C_{x,\mu}(z) = (z-E_x-\omega_q)\chi_1(\omega_q) + \tilde{C}_{x,\mu}(z), \tag{14}$$

где $\chi_1(\omega_q)$ – первая производная СЭФ. Подставляя (14) в (13), получаем

$$\frac{dC_{x,\mu}(z)}{dz} = -\sum_q \sum_\mu \frac{\langle x,\mu|M(z)|x,\mu,q\rangle\langle x,\mu,q|M(z)|x,\mu\rangle}{Z_2^2(z-E_x-\omega_q)^2}. \tag{15}$$

Здесь $Z_2 = 1-\chi_1(\omega_q) = 1-\frac{dC_{x,\mu}(z)}{dz}\Big|_{z=E_x+\omega_q}$ и положено, что вклад от высших производных $\tilde{C}_x(z)$ в разложении (14) является крайне малым. Множитель Z_2 можно рассматривать как константу, перенормирующую оператор Грина экситона.

В окрестности энергии $z = E_x + \omega_q$, которая играет важную роль при описании спектров излучения КТ, энергетической зависимостью оператора $M(z)$ можно пренебречь: $M(E_x + \omega_q)$. В таком случае решение дифференциального уравнения (15) для СЭФ принимает вид:

$$C_{x,\mu}(z) = \sum_q \sum_\mu \frac{\langle x,\mu|M(E_x+\omega_q)|x,\mu,q\rangle\langle x,\mu,q|M(E_x+\omega_q)|x,\mu\rangle}{Z_2^2(z-E_x-\omega_q)}, \tag{16}$$

где взаимодействие описывается обобщенным оператором $M(E_x + \omega_q)$.

5. Перенормировка экситон-фононного взаимодействия. Ограничение перенормировкой оператора Грина приводит к "нарушению баланса", поскольку в этом случае перенормировка вершинных функций (экситон-фононного взаимодействия) пренебрегается. Далее определим параметр перенормировки экситон-фононной связи Z_1. Часть оператора взаимодействия $M(E_x+\omega_q)$ описывается лестничными диаграммами, образованными последовательной заменой членов $H_I\tilde{G}_0(z)H_I\tilde{G}_0(z)\dots H_I$ в уравнении (4). Таким образом, вклады от лестничных диаграмм могут быть представлены как

$$M(E_x + \omega_q) = H_I + \sum_{n=1} H_I(\tilde{G}_0(z)H_I)^n. \tag{17}$$

Другие члены в решении уравнения (17) содержат петли, связанные с испусканием и поглощением квантов в процессе взаимодействия. Поскольку мы сосредоточены на перенормировке экситон-фононной связи, то ограничимся вкладом от процессов, описываемых петлей с одним гамильтонианом взаимодействия внутри нее:

$$\begin{aligned}\langle x;\mu|M(E_x+\omega_q)|x;\mu,q\rangle &= \langle x;\mu|H_I|x;\mu,q\rangle + \\ &+ \langle x;\mu|M(E_x+\omega_q)\tilde{G}_0(E_x+\omega_q) \times \\ &\times H_I\tilde{G}_0(E_x+\omega_q)M(E_x+\omega_q)|x;\mu,q\rangle,\end{aligned} \tag{18}$$

где энергия состояния $|\mu\rangle$ резервуара выбрана в качестве точки нулевой энергии. В пределе $q \to 0$ это уравнение сводится к выражению, которое после усреднения по степеням свободы резервуара принимает вид

$$g_x + g_x \sum_\mu P_\mu \langle x,\mu|M(E_x)\tilde{G}_0^2(E_x)M(E_x)|x;\mu\rangle \equiv g_x Z_1. \tag{19}$$

В свою очередь из уравнения (7) следует, что левая часть уравнения (19) может быть записана как

$$g_x \left(1 - \left.\frac{dC_x(z)}{dz}\right|_{z=E_x}\right) = g_x Z_2. \qquad (20)$$

Отсюда следует, что $Z_2 = Z_1$. Таким образом, вершину $\Gamma_x(z,q)$ можно представить в виде

$$\Gamma_x(z,q) = g_x(q)Z_1 + g_x(q)\Lambda_{\rm ren}(z,q), \qquad (21)$$

где $\Lambda_{\rm ren}(z,q) = \Lambda(z,q) - \Lambda(z,0)$ и

$$\Lambda(z,q) = \qquad (22)$$

$$\sum_\mu\sum_q \frac{\langle x;\mu|M(z)|x;\mu,q_1\rangle\langle x;\mu,q_1|H_{ep}|x;\mu,q_2|M(z)|x;\mu\rangle}{Z_2^2(z-E_x-\omega_{q_1})(z-E_x-\omega_{q_1}-\omega_q)}.$$

Усредняя по степеням свободы μ резервуара и учитывая перенормировку вершинной функции и оператора Грина, получаем

$$\Lambda(z,q) = \sum_q \left\{ \frac{Z_1^3|q_x(q_1)|^2(1+n(q_1))}{Z_2^2(z-E_x-\omega_{q_1})(z-E_x-\omega_{q_1}-\omega_q)} + \right.$$

$$\left. + \frac{Z_1^3|g_x(q_1)|^2 n(q_1)}{Z_2^2(z-E_x+\omega_{q_1})(z-E_x+\omega_{q_1}+\omega_q)} \right\} = Z_1\tilde{\Lambda}(z,q), \qquad (23)$$

и переходя от суммы к интегрированию по внутренним волновым векторам q_1, это выражение можно переписать как

$$\tilde{\Lambda}_{\rm ren}(z,q) = \frac{S_{HR}}{\omega_b^2}\int_0^\infty \omega_{q_1}^3 e^{\left(-\frac{\omega^2(q_1)}{2\omega_b^2}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{1+n(q_1)}{(z-E_x-\omega_{q_1})(z-E_x-\omega_{q_1}-\omega_q)} + \right.$$

$$+ \frac{n(q_1)}{(z-E_x+\omega_{q_1})(z-E_x+\omega_{q_1}+\omega_q)} -$$

$$\left. - \frac{1+n(q_1)}{(z-E_x-\omega_{q_1})^2} - \frac{n(q_1)}{(z-E_x+\omega_{q_1})^2} \right) d\omega_{q_1}. \qquad (24)$$

С учетом того, что $Z_2 = Z_1$, СЭФ принимает вид

$$C_s(z) = \frac{S_{HR}}{\omega_b^2}\int_0^\infty \omega^3(q) e^{\left(-\frac{\omega^2(q)}{2\omega_b^2}\right)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1+n(q)}{z-E_x-\omega(q)} + \frac{n(q)}{z-E_x+\omega(q)} \right\} \times$$

$$\times [1+\tilde{\Lambda}_{\rm ren}(z,q)]^2 d\omega(q). \qquad (25)$$

На рисунках 1 a–h представлена СЭФ взаимодействия КТ с фононным резервуаром при различных значениях температуры и параметра связи "КТ-фононный резервуар" – параметра Хуана–Риса [29, 42] без учета и с учетом поправки от перенормировки вершинной функции и оператора Грина (красная (сплошная) линия и синяя (штриховая) линия соответственно). Отметим, что на рис. 1 b, d, f, h мнимая компонента $C_x(z)$ имеет локальный максимум вблизи $z = 0$ мэВ и локальный минимум в промежутке от $z = 0$ мэВ до $z = 2$ мэВ, а реальная компонента $C_x(z)$ (рис. 1a, c, e, g) имеет значительные величины в широком спектральном диапазоне. Таким образом, и реальная и мнимая компоненты СЭФ имеют существенное влияние на эффекты фононной связи. С увеличением температуры и параметра Хуана–Риса амплитуда СЭФ увеличивается, что говорит об усилении взаимодействия КТ с фононными модами.

Экситон-фононное взаимодействие определяет форму спектров излучения КТ, т.е. оптико-спектральные свойства этого нового материала для фотонных технологий [11–13]. На рисунках 2a–f продемонстрированы спектры излучения одиночной КТ, взаимодействующей с фононным резервуаром, в зависимости от температуры и параметра Хуана–Риса. Даны спектры излучения КТ, рассчитанные с помощью теории возмущения и за ее пределами (красная (сплошная) линия и синяя (штриховая) линия соответственно). В случае рассмотрения рис. 2a, c, e, при повышении температуры наблюдается рост фононной боковой линии. Также отметим, что вклад от СЭФ с учетом перенормировки приводит к неочевидной зависимости ширины линии от температуры и параметра экситон-фононной связи. Данное поведение можно объяснить эффектом сильного взаимодействия: рассматривается увеличение константы связи – параметра Хуана–Риса, что демонстрируется расщеплением спектральных линий. Из анализа графиков видно, что значение параметра Хуана–Риса 0.2 приводит к аномальным спектрам, а увеличение до 0.6, что равнозначно переходу к сильному взаимодействию, приводит к дополнительным пикам в спектрах.

5. Заключение. Сравнение расчетов по теории возмущений и за ее пределами демонстрирует необходимость учета перенормировки взаимодействия КТ с резервуаром акустических фононов за пределами теории возмущений. Это объясняется тем, что процессы квантовых флуктуаций, будучи нелокальными во времени взаимодействиями, требуют более тщательного анализа. Использование теории возмущений не позволяет полностью описать вклад от данных процессов и требует обобщения, что позволит учитывать нелокальность во времени взаимодействия. Данное обобщение производится форма-

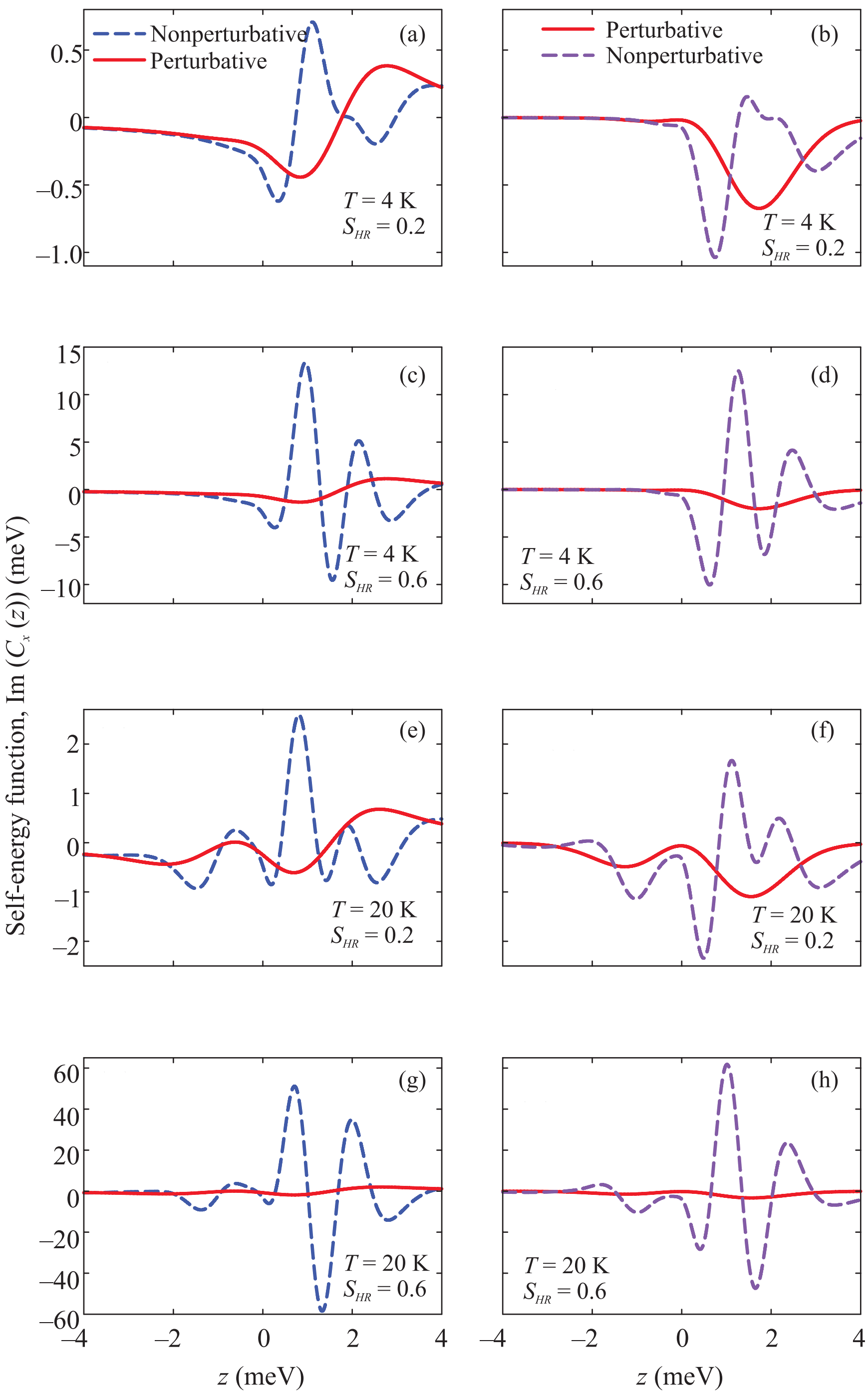

Рис. 1. (Цветной онлайн) СЭФ взаимодействия КТ с фононным резервуаром при различных значениях температуры ($T = 4$ и 20 K) и параметра Хуана–Риса ($S_{HR} = 0.2$ и 0.6), где красная (сплошная) линия и синяя (штриховая) линия обозначают решение задачи по теории возмущений и за ее пределами соответственно. Параметр уширения $\Gamma = 77$ мкэВ

лизмом обобщенной квантовой динамики, в котором вклад от квантовых флуктуаций проявляет себя в перенормировках оператора Грина и вершинной функции. Важно отметить, что равенство параметров перенормировок, которые определяются за пределами теории возмущений, порождает аналогию с хорошо известным в квантовой теории поля тождеством Уорда. Зависимость процессов, дающих вклад в СЭФ экситона, от энергии означает, что здесь проявляются немарковские эффекты, другими словами, нело-

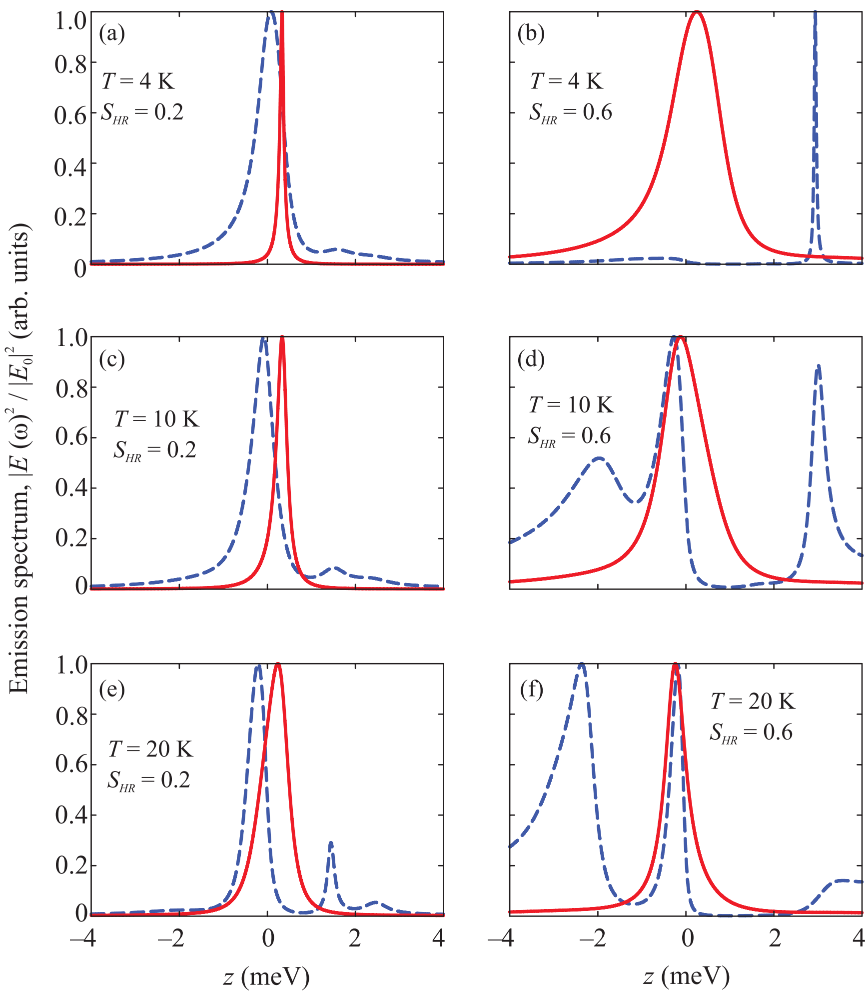

Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектры излучения КТ при различных температурах ($T = 4$, 10, 20 K) и параметрах Хуана–Риса ($S_{HR} = 0.2$ и 0.6), где красная (сплошная) линия и синяя (штриховая) линия обозначают решение задачи по теории возмущений и за ее пределами соответственно. Параметр уширения $\Gamma = 77$ мкэВ

кальность во времени взаимодействия КТ с резервуаром акустических фононов. Вклад от СЭФ с учетом перенормировки приводит к неочевидной зависимости ширины экситон-фотонной связи в спектрах излучения КТ. В случае сильного взаимодействия собственно-энергетический оператор становится частично недиагональным и может приводить к переходам между одетыми состояниями, что может открыть новые возможности для физической реализации кубитов для квантовых вычислений.

1. J. L. O'Brien, A. Furusawa, and J. Vučković, Nature Photon. **3**, 687 (2009).
2. S. N. Molotkov and S. S. Nazin, JETP Lett. **63**, 687 (1996).
3. A. V. Krasheninnikov and L. A. Openov, JETP Lett. **64**, 231 (1996).
4. A. M. Bychkov, L. A. Openov, and I. A. Semenihin, JETP Lett. **66**, 298 (1997).
5. M. Hosseini, G. Campbell, B. M. Sparkes, P. K. Lam, and B. C. Buchler, Nature Phys. **7**, 794 (2011).
6. M. Varnava, D. E. Brown, and T. Rudolph, Phys. Rev. Lett. **100**, 060502 (2008).
7. A. V. Naumov, A. A. Gorshelev, M. G. Gladush, T. A. Anikushina, A. V. Golovanova, J. Köhler, and L. Kador, Nano Lett. **18**, 6129 (2018).
8. I. Y. Eremchev, M. Y. Eremchev, and A. V. Naumov, Phys.-Uspekhi **62**, 294 (2018).
9. I. Yu. Eremchev, N. A. Lozing, A. A. Baev, A. O. Tarasevich, M. G. Gladush, A. A. Rozhentsov, and A. V. Naumov, JETP Lett. **108**, 30 (2018).
10. M. G. Gladush, T. A. Anikushina, A. A. Gorshelev, A. V. Naumov, and T. V. Plakhotnik, JETP **128**, 655 (2019).

11. K.R. Karimullin, A.I. Arzhanov, I.Y. Eremchev, B.A. Kulnitskiy, N.V. Surovtsev, and A.V. Naumov, Laser Phys. **29**, 124009 (2019).
12. A.G. Shmelev, A.V. Leontyev, D.K. Zharkov, V.G. Nikiforov, V.S. Lobkov, V.V. Samartsev, R.R. Shamilov, and I.V. Kryukov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **82**, 1027 (2018).
13. A.E. Eskova, A.I. Arzhanov, K.A. Magaryan, K.R. Karimullin, and A.V. Naumov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **84**, 40 (2020).
14. Z. Yuan, B.E. Kardynal, R.M. Stevenson, A.J. Shields, C.J. Lobo, K. Cooper, N.S. Beattie, D.A. Ritchie, and M. Pepper, Science **295**, 102 (2002).
15. S. Strauf, N.G. Stoltz, M.T. Rakher, L.A. Coldren, P.M. Petroff, and D. Bouwmeester, Nature Photon. **1**, 704 (2007).
16. A. Laucht, S. Putz, T. Günthner, N. Hauke, R. Saive, S. Frédérick, M. Bichler, M.-C. Amann, A.W. Holleitner, M. Kaniber, and J.J. Finley, Phys. Rev. X **2**, 011014 (2012).
17. Y.M. He, Y. He, Y.J. Wei, D. Wu, M. Atatüre, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, C.Y. Lu, and J.W. Pan, Nat. Nanotechnol. **8**, 213 (2013).
18. N. Livneh, M.G. Harats, D. Istrati, H.S. Eisenberg, and R. Rapaport, Nano Lett. **16**, 2527 (2016).
19. N. Somaschi, V. Giesz, L. De Santis et al. (Collaboration), Nature Photon. **10**, 340 (2016).
20. A.J. Nozik, Physica E **14**, 115 (2002).
21. I. Robel, V. Subramanian, M. Kuno, and P.V. Kamat, J. Am. Chem. Soc. **128**, 2385 (2006).
22. A.A. Vashchenko, V.S. Lebedev, A.G. Vitukhnovskii, R.B. Vasiliev, and I.G. Samatov, JETP Lett. **96**, 113 (2012).
23. G. Konstantatos, I. Howard, A. Fischer, S. Hoogland, J. Clifford, E. Klem, L. Levina, and E.H. Sargent, Nature **442**, 180 (2006).
24. S. Strauf, K. Hennessy, M.T. Rakher, Y.-S. Choi, A. Badolato, L.C. Andreani, E.L. Hu, P.M. Petroff, and D. Bouwmeester, Phys. Rev. Lett. **96**, 127404 (2006).
25. J. Yoneda, K. Takeda, T. Otsuka, T. Nakajima, M.R. Delbecq, G. Allison, T. Honda, T. Kodera, S. Oda, Y. Hoshi, N. Usami, K.M. Itoh, and S. Tarucha, Nat. Nanotechnol. **13**, 102 (2018).
26. T. Watson, S. Philips, E. Kawakami, D.R. Ward, P. Scarlino, M. Veldhorst, D.E. Savage, M.G. Lagally, M. Friesen, S.N. Coppersmith, M.A. Eriksson, and L.M.K. Vandersypen, Nature **555**, 633 (2018).
27. A.G. Milekhin, A.I. Nikiforov, O.P. Pchelyakov, S. Schulze, and D.R.T. Zahn, JETP Lett. **73**, 461 (2001).
28. A.G. Milekhin, L.L. Sveshnikova, T.A. Duda, N.V. Surovtsev, S.V. Adichtchev, and D.R.T. Zahn, JETP Lett. **88**, 799 (2008).
29. S. Hughes, P. Yao, F. Milde, A. Knorr, D. Dalacu, K. Mnaymneh, V. Sazonova, P.J. Poole, G.C. Aers, J. Lapointe, R. Cheriton, and R.L. Williams, Phys. Rev. B **83**, 165313 (2011).
30. R.Kh. Gainutdinov, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 5657 (1999).
31. R.Kh. Gainutdinov, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 269 (1989).
32. R.Kh. Gainutdinov, *Metod relyativistskoi T-matritsy i neperturbativnye effecty v spektrakh izlucheniya atomnykh sistem [Relativistic T-matrix method and nonperturbative effects in the radiation spectra of atomic systems] (Dr. habil. (Phys.-Math.) thesis*, Dubna, Joint Institute for Nuclear Research (1993).
33. R.Kh. Gainutdinov, JETP **108**, 1600 (1995).
34. R.Kh. Gainutdinov, K.K. Kalashnikov, and P.F. Schippnick, Sov. Phys. JETP **73**, 73 (1991).
35. R.Kh. Gainutdinov, Sov. J. Nucl. Phys **53**, 885 (1991).
36. R.Kh. Gainutdinov and A.A. Mutygullina, Phys. Rev. C **67**, 014006 (2002).
37. F. Giustino, Rev. Mod. Phys. **91**, 019901 (2019).
38. H.Y. Fan, Phys. Rev. **82**, 900 (1951).
39. A.B. Migdal, Sov. Phys. JETP **7**, 996 (1958).
40. G. Tarel and V. Savona, Phys. Rev. B **81**, 075305 (2010).
41. G.D. Mahan, *Many-Particle Physics*, Springer Science & Business Media, N.Y. (2000).
42. M. Bissiri, G. Baldassarri Höger von Högersthal, A.S. Bhatti, M. Capizzi, A. Frova, P. Frigeri, and S. Franchi, Phys. Rev. B **62**, 4642 (2000).