Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 10, стр. 579 — 582 25 ноября 1991 г.

НЕРЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА В ТЕОРИЯХ ЧЕРНА-САЙМОНСА И ДРОБНЫЙ КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

А.А.Овчинников

Институт ядерных исследований АН СССР
117312, Москва

Поступила в редакцию 3 октября 1991 г.
После переработки 29 октября 1991 г.

Доказана неренормализационная теорема, приводящая к выводу о существовании сверхпроводимости в системе свободных и взаимодействующих анионов (*anyone*). Теорема используется для доказательства квантования поперечной проводимости в предложенной формулировке теории дробного квантового эффекта Холла.

В настоящее время двумерные системы частиц с дробной статистикой (анионов) привлекают широкое внимание в связи с проблемой высокотемпературной сверхпроводимости и явлением дробного квантового эффекта Холла. В рамках приближения случайных фаз в системе многих частиц с дробной статистикой, описываемой параметром $1/N$ (значение $N = 1$ соответствует преобразованию фермионов в бозоны), было показано существование бесщелевого коллективного возбуждения, соответствующего колебаниям плотности, а также эффекта Мейсснера и сверхпроводимости [1-3]. В формулировке в виде теории с членом Черна - Саймонса (ЧС) наличие в спектре безмассового возбуждения означает обращение в нуль соответствующего коэффициента в эффективном лагранжиане для статистического калибровочного поля, полученном после интегрирования по фермионному полю (взаимное сокращение начального и индуцированного топологических членов) [3]. В работе [4] (см. также [5]) для релятивистски-инвариантных теорий с массивными полями материи было показано существование лишь однопетлевого вклада в коэффициент перед индуцированным членом ЧС. В [6] аналогично [4] было показано сокращение члена ЧС в системе массивных дираковских фермионов при конечной плотности при определенной величине коэффициента перед затравочным топологическим членом. Однако в этой работе не рассматривалась возможность существования инфракрасных расходимостей, которые могли бы изменить простой подсчет степеней внешнего импульса.

Аргументация [4] позволяет показать существование бесщелевой моды вне рамок приближения случайных фаз и в системе нерелятивистских частиц с дробной статистикой $(1/N)$. Действительно, после выделения среднего магнитного поля пропагаторы фермионов в новой диаграммной технике являются функциями Грина электронов в системе с N полностью заполненными уровнями Ландау, т.е. имеют конечную щель. Из калибровочной инвариантности и аналитичности эффективных фотонных вершин при нулевых импульсах следует, что только однопетлевая диаграмма вносит вклад в перенормировку члена ЧС. При этом существенно, что эффективная n-фотонная вершина имеет порядок $O(p_1 ... p_n)$ по внешним импульсам p_i. В [4] при доказательстве этого факта используется релятивистская инвариантность, которая, однако, не является обязательной. Действительно, для $n > 2$ вершина может быть составлена только из калибровочно-инвариантных комбинаций f_{0i}, f_{ij} $(f_{\mu\nu}(a) = \partial_\mu a_\nu - \partial_\mu a_\nu)$, т.к. комбинация $\epsilon^{\mu\nu\alpha} a_\mu f_{\nu\alpha}$ меняется на полную производную и может появиться только для $n = 2$. В силу этого при интегрировании по импульсам внутренних фотонных линий инфракрасные расходимости отсутствуют и простой подсчет степени внешнего импульса [4] имеет смысл. Покажем, что безмассовая мода имеется и в системе взаимодействующих анионов. Взаимодействие, которое предполагается парным и не зависящим от скорости, включается в диаграммную технику с помощью замены $a_0 \to a_0 + \alpha$, где пропагатор поля α равен $V(\vec{p})$. Если фурье-образ $V(\vec{p})$ потенциала взаимодействия $V(\vec{x})$ не имеет сингулярностей при малых $\vec{p}$, то аргументация [4] применима без изменений: диаграммы с α-линиями не вносят вклад в коэффициент перед членом ЧС. Если $V(\vec{p}) \sim 1/|\vec{p}|$, то, поскольку поле α появляется в эффективных вершинах с $n > 2$ (n - полное число a- и α-линий) только в виде комбинации $f_{0i}(a_0 + \alpha,\ \vec{a})$, такая вершина пропорциональна импульсу $\vec{p}$, соответствующему α-линии, и не может приводить к инфракрасным расходимостям. Вершина с $n = 2$ и двумя α-линиями дает вклад в полный α-пропагатор и не может изменить его поведение $\sim 1/|\vec{p}|$. Диаграмма с $n = 2$ и одной α-линией также не может изменить поведения пропагаторов α и a_μ. Таким образом приходим к диаграмме для поляризационного оператора $\Pi_{\mu\nu}(p)$ с двумя $n = 2$ вершинами, соединенными одной α-линией, которая имеет порядок $O(p^2)$ (например, компонента $\Pi_{0i}(p) \sim \vec{p}^{\,2} V(\vec{p})\epsilon_{ij}p_j$) и не может вносить вклад в перенормировку члена Черна-Саймонса. Таким образом, теорема доказана по крайней мере для потенциалов, убывающих на больших расстояниях не медленнее, чем $1/|\vec{x}|$ (трехмерный кулоновский потенциал).

В данной статье формулировка в виде теории с топологическим членом, а также доказанная неренормализационная теорема применяются к случаю дробного квантового эффекта Холла. Рассмотрим систему двумерных электронов в поперечном магнитном поле с фактором заполнения $\nu = 1/m$ (m - нечетное). Следуя [7] произведем преобразование волновой функции $(z_i = x_i + iy_i)$:

$$\Psi'(\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_N) = \prod_{i<j} \left(\frac{(z_i - z_j)}{|z_i - z_j|} \right)^{m-1} \Psi(\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_N). \tag{1}$$

Новая волновая функция также антисимметрична, т.е. соответствует ферми-статистике. В представлении вторичного квантования, вводя калибровочное поле a_μ, получим лагранжиан:

$$L = i\psi^+(\partial_0 - iA_0 - ia_0)\psi - a_0\rho_0 + \frac{1}{2M}\psi^+(\partial - i\vec{A}_1 - i\vec{A} - i\vec{a})^2\psi + \frac{1}{4\pi(m-1)}\epsilon^{\mu\nu\alpha}a_\mu\partial_\nu a_\alpha, \tag{2}$$

где поле ψ подчиняется ферми-статистике, ρ_0 - плотность электронов, $\vec{A}_1$ - векторный потенциал, соответствующий однородному магнитному полю $H = 2\pi\rho_0$, в котором электроны полностью заполняют один уровень Ландау, A_μ - внешний электромагнитный потенциал. В лагранжиан (2) нужно добавить межэлектронное взаимодействие, снимающее сильное вырождение основного состояния. Полученная теория (2) полностью эквивалентна исходной, однако обладает рядом черт, присущих эффективной (теории Гинзбурга–Ландау) [8] (преобразование (1) к бозонной волновой функции рассматривалось в [9]). Так, квазичастицам с дробным зарядом [10] соответствуют вихри, приобретающие конечную энергию благодаря кулоновскому взаимодействию. Магнетофононной моде (флуктуации на низшем уровне Ландау) [11] должны соответствовать флуктуации в системе вихрей и антивихрей. Действительно, с помощью замены $a_0 \to a_0 - \alpha$ и интегрированию по полю α взаимодействие может быть представлено в виде

$$\int d\vec{x}d\vec{y}\,(\epsilon_{ij}\partial_i a_j)(\vec{x})\,V(\vec{x}-\vec{y})(\epsilon_{ij}\partial_i a_j)(\vec{y}),$$

и должно давать энергетическую щель квазичастичным возбуждениям из-за ненулевого статистического магнитного поля в центре вихря. В данной формулировке может быть выведен эффективный лагранжиан, описывающий систему вихрей. Предложенная формулировка является реализацией идеи [7] о связывании электронами четного числа квантов потока и целого квантового эффекта Холла для составных объектов и может оказаться удобной для более полного объяснения несжимаемости состояний с $\nu = 1/m$. Здесь доказанная неренормализационная теорема используется для объяснения точного квантования поперечной проводимости в системе взаимодействующих электронов.

Проинтегрируем в функциональном интеграле (2) по фермионным полям. Однопетлевой эффективный лагранжиан для медленно меняющихся полей a_μ и A_μ имеет вид [12]:

$$L_{eff}(a,A) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{M}{H}\vec{E}^2(a+A) - \frac{1}{M}H^2(a+A)\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\alpha}(a+A)_\mu\partial_\nu(a+A)_\alpha + \frac{1}{4\pi(m-1)}\epsilon^{\mu\nu\alpha}a_\mu\partial_\nu a_\alpha, \tag{3}$$

где $\vec{E}$ и H - электрическое и магнитное поля $(E_i(a) = f_{0i}(a),\ H(a) = \epsilon_{ij}\partial_i a_j)$. В силу доказанной теоремы только первые два члена в (3) могут содержать поправки за счет высших петель, индуцированный топологический член таких поправок не содержит. Сокращения члена ЧС (для a_μ) не происходит, что соответствует щели в спектре коллективных возбуждений. Закон дисперсии магнетоплазмонного возбуждения [11], соответствующего полю a_μ имеет вид:

$$\omega(\vec{p}) = \frac{m}{m-1}\frac{H}{M}\left[1 + \frac{\vec{p}^2(m-1)^2}{m^2}(1/H)\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Формула (4) получена в однопетлевом приближении. Для вычисления поперечной проводимости проинтегрируем по статистическому калибровочному полю a_μ в (3). Для члена с наименьшим количеством производных в действии для внешнего электромагнитного поля достаточно рассмотреть два последних члена в формуле (3):

$$S_{eff}(A) = \int d^3x\,\frac{1}{4\pi m}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha, \tag{5}$$

что соответствует известному значению $\sigma_{xy} = 1/2\pi m$. Полученный результат является точным в силу неренормализационной теоремы. Мы показали также, что учет межэлектронного взаимодействия не влияет на величину (5). Данное рассмотрение легко обобщается на факторы заполнения $\nu = p/(2kp \pm 1)$ (p и k - целые числа) первого уровня иерархии несжимаемых состояний [7], когда после преобразования волновой функции (1) с $m = 2k \pm 1$ полностью заполнено p-уровней Ландау.

---

1. Fetter A., Hanna C., Laughlin R., Phys. Rev. B, 1989, 39, 9679.
2. Chen Y.H., Wilczek F., Halperin B., Witten E., Int. Journ. Mod. Phys. B, 1989, 3, 1001.
3. Banks T., Lykken J., Nucl. Phys. B, 1990, 336, 500.
4. Coleman S., Hill B., Phys. Lett. B, 1985, 159, 184.
5. Semenoff G.W., Sodano P., Wu Y., Phys. Rev. Lett., 1989, 62, 715.

6. Lykken J.D., Sonnenschein J., Weiss N., Phys. Rev. D, 1990, 42, 2161.
7. Jain J.K., Phys. Rev. Lett., 1989, 63, 199.
8. Zhang S.C., Hansson T.H., Kivelson S., Phys. Rev. Lett., 1989, 62, 82; Read N., Phys. Rev. Lett., 1989, 62, 86,
9. Kane C.L., Kivelson S., Lee D.H., Zhang S.C., Phys. Rev. B, 1991, 43, 3255.
10. Laughlin R.B., Phys. Rev. Lett., 1983, 50, 1395.
11. Girvin S.M. In: The quantum Hall effect. Eds. R.E.Prange, S.M.Girvin, 1987.
12. Randgbar-Daemi S., Salam A., Strathdee J., Nucl. Phys. B, 1990, 340, 403.