Письма в ЖЭТФ, том 114, вып. 11, с. 779 – 784

Низкотемпературное возрастание силы трения Ван-дер-Ваальса при относительном движении металлических пластин

Г. В. Дедков[1)]

Кабардино-Балкарский государственный университет, 360004 Нальчик, Россия

Поступила в редакцию 25 октября 2021 г.
После переработки 2 ноября 2021 г.
Принята к публикации 3 ноября 2021 г.

Представлены результаты расчета силы трения Ван-дер-Ваальса (диссипативной флуктуационно-электромагнитной силы) между металлическими пластинами при их относительном движении при температурах, близких к 1 К. Расчеты выполнены в рамках флуктуационной электромагнитной теории Левина–Полевого–Рытова. Показано, что для пластин золота с небольшим числом дефектов и низким остаточным сопротивлением ρ_0 сила трения Ван-дер-Ваальса может возрастать на 6–8 порядков с уменьшением температуры ниже 100 К, достигая максимума с величиной, пропорциональной ${\rho_0}^{-4/5}$. Для сверпроводящих металлов рост трения может наблюдаться при уменьшении температуры до величины критической температуры перехода, после чего трение исчезает. Другим важным результатом является слабая зависимость силы трения от расстояния между пластинами a ($\propto a^{-q}$ с $q < 1$). Абсолютные значения сил трения достижимы для измерений в экспериментах с применением современной техники АСМ.

DOI: 10.31857/S1234567821230105

Пространственные корреляции квантовых и тепловых флуктуаций поляризации и намагниченности конденсированных тел, а также вакуумного электромагнитного поля приводят к появлению флуктуационных электромагнитных сил между атомными частицами, атомами и макроскопическими телами, и между последними. В частности, возникает сила притяжения между электронейтральными металлическими или диэлектрическими пластинами (полупространствами), находящимися на расстоянии a друг от друга – сила Казимира–Лифшица [1, 2]. Флуктуационно-электромагнитные силы в различных системах обычно называются также силами Ван-дер-Ваальса [3]. При относительном движении тел со скоростью V, помимо силы притяжения, между телами возникает сила трения Ван-дер-Ваальса (при температуре $T \neq 0$) или сила квантового трения (при $T = 0$) [4–8]. При нерелятивистских скоростях V и температуре $T \neq 0$ эта сила пропорциональна V, а при квантовом трении – более высоким нечетным степеням V. В течение нескольких десятилетий расчет диссипативных сил Ван-дер-Ваальса был предметом интенсивного теоретического исследования и дискуссии многочисленных групп авторов с сильно различающимися результатами. Отчасти это было вызвано малостью этих сил по сравнению с притягивающими (консервативными) силами Казимира и отсутствием надлежащих экспериментов. В последние годы, однако, появился общий консенсус между теоретическими результатами разных авторов для сил трения Ван-дер-Ваальса [11, 19–21], и, как будет показано далее, возникает более оптимистичная перспектива для проведения соответствующих экспериментальных измерений.

Целью работы является анализ низкотемпературной зависимости силы трения Ван-дер-Ваальса между пластинами немагнитных металлов, основанный на развитии результатов Полевого [6] в наших недавних работах [17, 18]. Помимо фундаментального и практического значения (для технологии микроэлектромеханических систем, например), обнаружение и количественное измерение диссипативных сил Ван-дер-Ваальса может пролить свет на решение другой важной проблемы – так называемого “парадокса” Казимира, – нарушения теоремы Нернста в теории Лифшица [22–26].

Рассмотрим стандартную конфигурацию системы из двух параллельных пластин *1* и *2* (рис. 1) при температуре T, разделенных вакуумным промежутком a, в которой пластина *1* движется с нерелятивистской скоростью V относительно покоящейся пластины *2*. Воспользуемся исходным выражением для флуктуационно-электромагнитной силы трения F_x, отнесенной к единице площади вакуумного контакта

[1)]e-mail: gv_dedkov@mail.ru

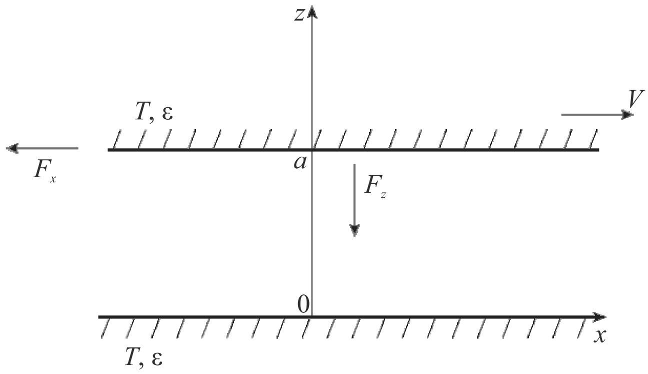

Рис. 1. Конфигурация системы

пластин, полученным в [17, 18] в линейном приближении по скорости V,

$$F_x = \frac{\hbar V}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega \frac{dn}{d\omega}\int\limits_0^\infty dk k^3 \times$$
$$\times [\frac{|q|^2}{|Q_e|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\varepsilon_2}\right) +$$
$$+ \frac{|q|^2}{|Q_m|^2}\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\mu_2}\right)], \quad (1)$$

где $n(\omega) = 1/(\exp(\hbar\omega/T) - 1)$, $\varepsilon_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ – зависящие от частоты диэлектрические и магнитные проницаемости материалов пластин *1* и *2*, $q = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, $q_{1,2} = \sqrt{k^2 - \varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}\omega^2/c^2}$,

$$Q_e = (q + q_1/\varepsilon_1)(q + q_2/\varepsilon_2)e^{qa} -$$
$$-(q - q_1/\varepsilon_1)(q - q_2/\varepsilon_2)e^{-qa}, \quad (2)$$

$$Q_m = (q + q_1/\mu_1)(q + q_2/\mu_2)e^{qa} -$$
$$-(q - q_1/\mu_1)(q - q_2/\mu_2)e^{-qa}. \quad (3)$$

Постоянная Планка и скорость света в вакууме обозначены как $\hbar$ и c, а температура T выражена в энергетических единицах. Линейное приближение по скорости соответствует условию $\omega \gg kV$, которое в нерелятивистском случае $V \ll c$ выполняется как для нерадиационных электромагнитных мод ($k > \omega/c$), так и для радиационных ($k \le \omega/c$). Как было показано в [17, 18], формула (1) полностью согласуется с общим релятивистским выражением для диссипативной силы F_x, полученным впервые в рамках флуктуационно-электромагнитной теории Левина–Полевого–Рытова [6, 27]. Ее также можно преобразовать к полученной позднее форме в терминах френелевских коэффициентов отражения электромагнитных волн [10, 11], однако формула (1) является значительно более удобной при анализе низкотемпературного поведения силы F_x вследствие более прозрачной зависимости от материальных свойств.

Будем рассматривать случай одинаковых пластин из нормальных немагнитных металлов, когда $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(\omega)$, и вместо F_x введем коэффициент “вязкости” $\eta = -F_x/V$. Тогда (1) принимает вид

$$\eta = \frac{\hbar}{8\pi^2}\left(\frac{\hbar}{T}\right)\int\limits_0^\infty \frac{d\omega}{\mathrm{sh}(\hbar\omega/2T)^2} \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty dk k^3 |q|^2 \left[\frac{\mathrm{Im}(q_1/\varepsilon)^2}{|Q_e|^2} + \frac{\mathrm{Im}\,(q_1)^2}{|Q_m|^2}\right]. \quad (4)$$

При записи (4) учтено тождество $\frac{d}{dx}(\exp(x) - 1)^{-1} = -1/4\mathrm{sh}(x/2)^2$. При изучении низкотемпературного поведения притягивающей силы Казимира–Лифшица F_z между металлическими пластинами рядом авторов используется приближение Друде для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \mathrm{i}\nu)}, \quad (5)$$

где ω_p и ν – частота плазмы и частота релаксации. Как хорошо известно, для металла без дефектов и примесей частота релаксации удовлетворяет закону Блоха–Грюнайзена [28]

$$\nu_{\mathrm{BG}}(T) = 0.0212(T/\theta)^5 \int\limits_0^{\theta/T} x^5 \mathrm{sh}(x/2)^{-2} dx (eV), \quad (6)$$

где θ – температура Дебая. При наличии дефектов, влияющих на остаточное сопротивление, имеет смысл использовать выражение

$$\nu(T) = \nu_0 + \nu_{\mathrm{BG}}(T), \quad (7)$$

где ν_0 – постоянная и $\nu_{\mathrm{BG}}(T) \ll \nu_0$ при $0 \le T \ll T_0$ ($T_0 \ll \theta$).

Во избежание недоразумений следует особо подчеркнуть, что формула (1) получена при условии, что пластины имеют конечную температуру T, поэтому рассмотрение случая $T \to 0$ с исчезающим омическим сопротивлением на ее основе неправомерно. Для таких условий анализ следует проводить, используя общие выражения для диссипативной силы [6, 10, 17, 18] без разложения по скорости. Из них вытекает, что диссипативная сила уменьшается на много порядков величины. Однако при нулевом сопротивлении, формально математически, из (1) также следует очень низкая сила трения при всех температурах, отличных от нуля, поскольку в этом случае вклад в нее вносят только радиационные моды с частотами $\omega/c > k$.

Будем далее считать, что функция $\nu(T)$ всегда отлична от нуля, и используем параметризацию частоты $\omega = \nu t$. Для волнового вектора k рассмотрим случай нерадиационных мод $k > \omega/c$ с параметризацией $k = (\omega_p/c)\sqrt{y^2+\beta^2 t^2}$ (где $\beta = \nu/\omega_p$) и случай радиационных мод $k \leq \omega/c$, когда $k = (\omega_p/c)\sqrt{\beta^2 t^2 - y^2}$. Соответственно, формула (4) преобразуется к виду

$$\eta = \frac{\hbar}{8\pi^2}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^4 \frac{1}{\alpha}\left(I_{mn}+I_{en}+I_{mr}+I_{er}\right), \qquad (8)$$

где $\alpha = \hbar\nu/T$, а интегральные слагаемые в скобках определяются выражениями

$$I_{mn} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{dt}{\mathrm{sh}(\alpha t/2)^2} \int_0^\infty dy y^2 \left(y^2+\beta^2 t^2\right) \times \times \mathrm{Im}\left(\sqrt{y^2+t/(t+\mathrm{i})}\right)^2 |Q_{mn}|^{-2}, \qquad (9)$$

$$I_{en} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{dt}{\mathrm{sh}(\alpha t/2)^2} \int_0^\infty dy y^2 \left(y^2+\beta^2 t^2\right) \times \times \mathrm{Im}\left(\sqrt{y^2+t/(t+\mathrm{i})}/\epsilon\right)^2 |Q_{en}|^{-2}, \qquad (10)$$

$$I_{mr} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{dt}{\mathrm{sh}(\alpha t/2)^2} \int_0^{\beta t} dy y^2 \left(\beta^2 t^2 - y^2\right) \times \times \mathrm{Im}\left(\sqrt{-y^2+t/(t+\mathrm{i})}\right)^2 |Q_{mr}|^{-2}, \qquad (11)$$

$$I_{er} = \alpha^2 \int_0^\infty \frac{dt}{\mathrm{sh}(\alpha t/2)^2} \int_0^{\beta t} dy y^2 \left(\beta^2 t^2 - y^2\right) \times \times \mathrm{Im}\left(\sqrt{-y^2+t/(t+\mathrm{i})}/\epsilon\right)^2 |Q_{er}|^{-2}. \qquad (12)$$

Кроме того, здесь и далее используем обозначения $\epsilon = 1 - 1/\left(\beta^2 t\,(t+\mathrm{i})\right)$, $\lambda = \omega_p a/c$ и

$$Q_{mn} = 2\left(2y^2+\frac{t}{t+\mathrm{i}}\right)\mathrm{sh}\,(\lambda y) + + 4y\sqrt{y^2+\frac{t}{t+\mathrm{i}}}\,\mathrm{ch}\,(\lambda y), \qquad (13)$$

$$Q_{en} = 2\left(y^2+\epsilon^{-2}\left(y^2+\frac{t}{t+\mathrm{i}}\right)\right)\mathrm{sh}\,(\lambda y) + + 4y\epsilon^{-1}\sqrt{y^2+\frac{t}{t+\mathrm{i}}}\,\mathrm{ch}\,(\lambda y), \qquad (14)$$

$$Q_{mr} = 2\left(-2y^2+\frac{t}{t+i}\right)\sin(\lambda y) + + 4y\sqrt{-y^2+\frac{t}{t+i}}\cos(\lambda y), \qquad (15)$$

$$Q_{er} = 2\left(-y^2+\epsilon^{-2}\left(-y^2+\frac{t}{t+\mathrm{i}}\right)\right)\sin(\lambda y) + + 4y\epsilon^{-1}\sqrt{-y^2+\frac{t}{t+\mathrm{i}}}\cos(\lambda y). \qquad (16)$$

Формулы (9) и (10) соответствуют вкладам нерадиационных мод с S- и P-поляризацией, а (11) и (12) – вкладам радиационных мод (с аналогичной поляризацией). Помимо зависимости коэффициента трения от α (и от температуры), в (8) остается, на первый взгляд, сложная зависимость от температуры каждого из интегралов (9)–(12) через α, β и ϵ.

Проанализируем роль отдельных членов (8) при $T \sim 1\ K$, когда параметр $\alpha = \hbar\nu(T)/T$ мал ($\alpha \ll 1$). Если $\nu(T)$ определяется формулой (6), то $\alpha = 1$ при $T = 69\,\mathrm{K}$, $\theta = 170\,\mathrm{K}$ (дебаевская температура Au). Причем вплоть до высоких температур ($T \sim 1000$ K) выполняется соотношение $\alpha/\beta = \hbar\omega_p/T \gg 1$. Параметр λ от температуры не зависит. В частности, для золота ($\omega_p = 9.03\,$эВ) при $a = 10\,$нм получим $\lambda = 0.459$. Наличие квадрата гиперболического синуса в (8) увеличивает роль низкочастотных мод с $t \ll 1$, когда $\mathrm{sh}(\alpha t/2)^{-2} \approx 4\alpha^{-2}t^{-2}$. Соответственно, значительный температурный эффект может проявляться при $T \ll 69$ K. Анализ выражений (9)–(12) показывает, что в широкой области расстояний a между пластинами (от 1 нм до 3 мкм), основной вклад в силу трения вносит интеграл I_{mn}. При его вычислении y принимает характерные значения $y \sim \lambda^{-1} \sim 1$. Поэтому при $t \ll 1$ и $y \gg t$ получим $|Q_{mn}|^2 \approx 16y^4\exp(2\lambda y)$. С другой стороны, независимо от соотношения между y и t, будем иметь

$$(\mathrm{Im w})^2 \equiv \left(\mathrm{Im}\sqrt{y^2+t/(t+i)}\right)^2 = = \frac{\sqrt{t^2+\left[t^2+y^2\left(1+t^2\right)\right]^2} - t^2 - y^2(1+t^2)}{2(1+t^2)}. \qquad (17)$$

Соответственно, при $t \ll 1$ и $y \gg t$, с учетом (17), получим $(\mathrm{Im}w)^2/|Q_{mn}|^2 \approx \frac{t^2}{32y^6(1+t^2)}\exp(-2\lambda y)$, а (9) принимает вид

$$I_{mn} \approx \frac{1}{8}\int_0^p \frac{dt}{(1+t^2)} \int_p^\infty dy \frac{e^{-2\lambda y}}{y^2}\left(1+\beta^2 t^2/y^2\right), \qquad (18)$$

где $p \approx 1$. Вычисление интеграла (18) дает

$$I_{mn} = \frac{\text{arctg}p}{8p}\left[2p\lambda\text{Ei}\left(-2p\lambda\right) + e^{-2p\lambda}\right] + \\ + \frac{\beta^2}{24}\frac{(p - \text{arctg}p)}{p^3}[4p^3\lambda^3\text{Ei}\left(-2p\lambda\right) + \\ + \left(1 - p\lambda + 2p^2\lambda^2\right)e^{-2p\lambda}], \quad (19)$$

где $\text{Ei}\left(-x\right)$ – интегральная показательная функция [29], причем наличие малого параметра β^2 во втором слагаемом (19) делает его пренебрежимо малым по сравнению с первым. Формула (19) (без второго слагаемого) обеспечивает общую точность вычисления интеграла (9) в пределах 1–10 %, если параметр p изменяется от 0.4 до 0.1 при изменении a от 10 до 200 нм. При этом $p(a)$ хорошо аппроксимируется зависимостью $p\left(a\right) = 0.4\exp\left(-0.1a^{0.5} - 0.001a^{0.874}\right)$.

В другом предельном случае, когда $y \ll t \ll 1$, из (13) и (17) следует $(\text{Im}w)^2/|Q_{mn}|^2 \approx (1+y^2)/16y^2$. При подстановке этого выражения в (9) результат также не зависит от α, как и в предыдущем случае, но соответствующий вклад пренебрежимо мал из-за малости верхних пределов интегрирования. В прочих областях интегрирования по t, y интеграл I_{mn} оказывается пропорциональным α или более высоим степеням α, поэтому соответствующими вкладами при $\alpha \ll 1$ можно пренебречь. Малы и остальные интегральные слагаемые в скобках (15). В частности, величина I_{en} обрезается из-за большой (по модулю) величины диэлектрической проницаемости ε (ϵ в (10)), а радиационные вклады I_{mr} и I_{er} – вследствие появляющейся дополнительной зависимости от β^2. Заметим, что сближение (по модулю) вкладов последних трех слагаемых (8) с величиной I_{mn} происходит только на расстояниях $a > 10$ мкм.

В качестве численного примера был рассмотрен случай пластин золота с диэлектрической проницаемостью (5) и частотой релаксации (7). Параметр ν_0 в (7) варьировался таким образом, что соотношение $\nu_0 = \nu_{\text{BG}}(T_0)$ выполнялось для температур T_0 в пределах от 0.1 до 3 К, а параметр α находился из соотношения $\alpha\left(T\right) = \left(\nu_0 + \nu_{\text{BG}}(T)\right)/T$. Соответственно, остаточное сопротивление металла в этом случае было бы равно $\rho_0 = 4\pi\nu_0/\omega_{\text{p}}^2$. На рисунке 2 показана зависимость $\eta\left(a\right)$ от расстояния при $T = T_0 = 1$ К (черная линия). Линии *1–3* соответствуют аппроксимациям $0.41a^{-0.25}$, $1.37a^{-0.75}$ и $5a^{-1}$. Можно отметить значительно более медленное убывание силы трения с расстоянием по сравнению с притягивающей силой Казимира–Лифшица ($F_z{\sim}a^{-q}$ при $q = 4 \div 3$). На рисунке 3 показаны температурные зависимости $\eta\left(T\right)$ для $a = 10$ нм. Кривые $\eta\left(T\right)$ (в порядке следования "сверху-вниз") соответствуют параметрам $T_0 = 0.1$, 0.2, 0.5, 1.0, 3 К. Образование плато при $T \to T_0$ обусловлено конечными значениями ν_0 в (7). Чем меньше ν_0, тем выше высота плато, связанная с остаточным сопротивлением зависимостью ${\rho_0}^{-4/5}$. При температурах $T > 100$ К, как видно из рис. 3, появляется еще одно плато, но в этом случае трение Ван-дер-Ваальса уменьшается на 6–10 порядков величины (в зависимости от ν_0).

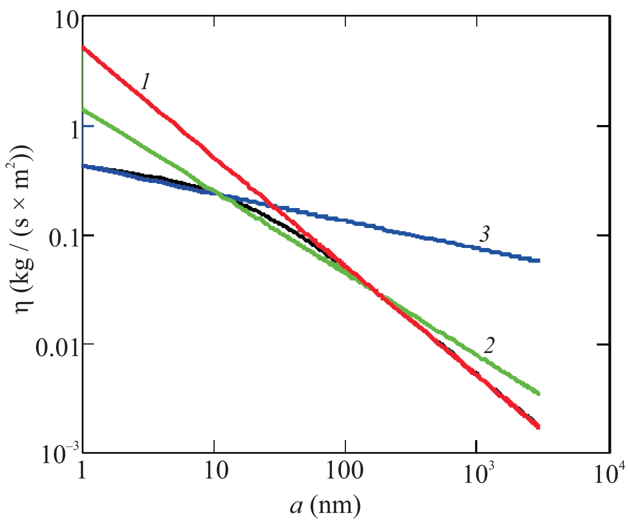

Рис. 2. (Цветной онлайн) Коэффициент трения (черная кривая) пластин золота как функция ширины щели ($T = T_0 = 1$ К). Линии *1–3* соответствуют аналитическим аппроксимациям $5a^{-1}$, $1.37a^{-0.75}$, $0.41a^{-0.25}$

Учитывая результаты расчета, можно сделать вывод о том, что при уменьшении температуры от 100 до 1 К сила трения Ван-дер-Ваальса для пластин золота с малым числом дефектов и остаточным сопротивлением ρ_0 может возрастать на 6–8 порядков. Величина максимума силы трения пропорциональна ${\rho_0}^{-4/5}$. Для сверпроводящих металлов рост силы трения будет происходить при снижении температуры до величины критической температуры перехода, после чего трение исчезнет. Заметим, что в [17, 18] этот вывод не был сделан, хотя увеличение трения при низких температурах также отмечалось.

Неожиданный, на первый взгляд, рост трения при $T < 100$ К (69 К для золота), имеет достаточно простое физическое обоснование. В соответствии с планковским распределением, плотность флуктуационных мод максимальна на низких частотах $\omega < T/\hbar$. Но при нормальных условиях и достаточно высоком сопротивлении металла выполняется соотношение $\nu > T/\hbar$ ($\alpha > 1$), а характерной частотой поглощения является виновская частота $T/\hbar$. Соответственно, трение уменьшается при уменьшении температуры. С уменьшением температуры T частота релаксации убывает быстрее, чем виновская часто-

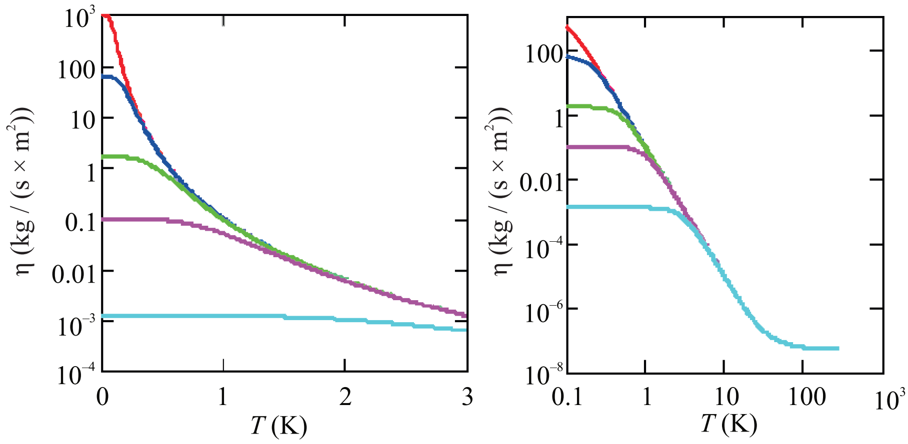

Рис. 3. (Цветной онлайн) Коэффициент трения пластин золота как функция температуры при $a = 10$ нм. Кривые в порядке следования сверху-вниз соответствуют значениям $T_0 = 0.1$, 0.2, 0.5, 1.0, 3 K

та, соотношение между ними изменяется ($\alpha < 1$), и характерная частота поглощения смещается в сторону низких частот с высокой плотностью электромагнитных мод. Одновременно с этим возрастает глубина проникновения S-мод. И хотя длина свободного пробега электронов растет, а сопротивление постоянному току уменьшается, все большее число электронов испытывает малоугловое рассеяние под действием многочисленных мелкомасштабных локальных флуктуаций электромагнитного поля и плотности заряда. В итоге джоулева диссипация и трение растут до наступления порога насыщения, обусловленного остаточным сопротивлением. В целом эти процессы контролируются параметром α. В рамках данной схемы легко объясняется и резкое падение силы трения в пределе $T \to 0$, $\nu \to 0$: поле S–волны переходит в постоянное магнитное поле, свободно проникающее в образец, и диссипация энергии электронов исчезает.

Заметим, что экспериментальные исследования диссипативных сил Ван-дер-Ваальса до сих пор отсутствуют. Так, измеренный в [30] коэффициент трения при колебаниях покрытой золотом сферы вблизи поверхности золота оказался равным $2.5 \cdot 10^{-14}$ кг/с (при $T = 77$ K и $a = 10$ нм) с зависимостью $\eta(a) \propto$ $\propto a^{-1.3\pm0.2}$ от расстояния a и убывающей зависимостью $\eta(T)$ при уменьшении T (в 6 раз при изменении T от 295 до 77 K). Однако механизм диссипации колебаний зонда не был установлен, а измерения при температурах ниже 4.2 K не проводились. Эти результаты не согласуются с теоретическими оценками настоящей работы (при сопоставимой величине коэффициента η). Так, при $T = T_0 = 3$ K, $a =$ $= 100$ нм, радиусе зондирующей сферы $R = 50$ мкм и эффективной площади контакта πRa получим оценку $\eta = 10^{-14}$ кг/с. При этом, в силу более медленного убывания силы трения с расстоянием, эффективная площадь контакта и величина η могут быть увеличены за счет увеличения a (в два-три раза при $a < 0.5$ мкм). Одновременно с этим будет уменьшаться влияние шероховатости поверхности, а требования к точности позиционирования станут менее жесткими.

Заключение. В заключение сформулируем основные выводы. (1) Для пластин нормальных металлов с малым числом дефектов и малым остаточным сопротивлением ρ_0 при уменьшении температуры от 100 до 1 K сила трения Ван-дер-Ваальса может возрастать на 6–8 порядков величины. Максимальное значение коэффициента трения η лимитируется величиной ρ_0, причем $\eta \propto \rho_0^{-4/5}$. Механизм возрастания силы трения обусловлен значительным увеличением плотности мод и объема проникновения неоднородных низкочастотных мод S-поляризации в сочетании с джоулевыми потерями электронов проводимости; (2) коэффициент трения медленно уменьшается с расстоянием: $\eta(a) \propto a^{-q}$ ($q = 0.25 \div 1$ при $a < 3$ мкм); (3) абсолютные значения силы трения достижимы в современных экспериментах с применением атомно-силовых микроскопов.

1. H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B **51**, 793 (1948).
2. E. M. Lifshitz, ZhETF **29**, 94 (1955) [Sov. Phys. JETP **2**, 73 (1956)].
3. Ю. С. Бараш, *Силы Ван-дер-Ваальса*, Наука, М. (1988).
4. E. V. Teodorovich, Proc. R. Soc. A **362**, 71 (1978).
5. L. S. Levitov, Eur. Phys. Lett. **8**, 499 (1989).

6. V. G. Polevoy, ZhETF **98**, 190 (1990) [Sov. Phys. JETP **71**, 1119 (1990)].
7. V. E. Mkrtchian, Phys. Lett. A **209**, 299 (1995).
8. J. B. Pendry, J. Phys. C.: Condens. Matter **9**, 10301 (1997).
9. M. Kardar and R. Golestanian, Rev. Mod. Phys. **71**, 1233 (1999).
10. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, J. Phys. C.: Condens. Matter **9**, 345 (1999).
11. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Rev. Mod. Phys. **79**, 1291 (2007).
12. T. G. U. Leonhardt, New. J. Phys. **11**, 033035 (2009).
13. J. B. Pendry, New. J. Phys. **12**, 033028 (2010).
14. G. Barton, Phys. C.: Condens. Matter **23**, 335004 (2011).
15. J. S. Høye, I. Brevik, and K. A. Milton, Eur. Phys. J. D **66**, 365004 (2012).
16. J. S. Høye and I. Brevik, Eur. Phys. J. D **68**, 61 (2014).
17. G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, Chin. Phys. **56**, 3002 (2018).
18. Г. В. Дедков, А. А. Кясов, Физика твердого тела **60**, 2311 (2018) [G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, Phys. Solid. State **60**, 2349 (2018)].
19. J. S. Høye, I. Brevik, and K. A. Milton, Symmetry **29**, 8 (2016).
20. G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, Phys.-Uspekhi **60**, 1 (2017).
21. G. Pieplow and C. Henkel, New J. Phys. **15**, 023027 (2013).
22. G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko, Contemp. Phys. **47**, 131 (2006).
23. J. S. Høye, I. Brevik, and K. A. Milton, J. Phys. Math. Gen. **39**, 6031 (2006).
24. K. A. Milton, Y. Li, P. Kalauni, P. Parashar, P. Guerodt, G.-L. Ingold, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Fortschr. Phys. **65**, 1600047 (2017).
25. G. Bimonte, T. Emig, M. Kardar, and M. Kruger, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **8**, 119 (2017).
26. V. M. Mostepanenko, Universe **7**, 704084 (2021).
27. M. L. Levin, V. G. Polevoy, and S. M. Rytov, ZhETF **79**, 2087 (1980) [Sov. Phys. JETP **52**, 1054 (1980)].
28. *Handbook of Physics*, ed. by E. U. Condon and H. Odishaw, McGrow Hill, N.Y. (1967).
29. I. S. Gradshteyn and I. M. Rhyzik, *Table of integrals, series and products*, Acad. Press, N.Y. (2000).
30. B. C. Stipe, T. D. Stowe, T. W. Kenny, and D. Rugar, Phys. Rev. Lett. **87**, 096801 (2001).