Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 11, стр. 597 — 599 10 декабря 1991 г.

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ВАКУУМНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

*С.Б.Бейсекеев, Ц.И.Гуцунаев*

*Университет дружбы народов им. П.Лумумбы*
*117186, Москва*

Поступила в редакцию 1 ноября 1991 г.

Получен новый класс аксиально-симметричных стационарных решений уравнений Эйнштейна.

В работах [1] и [2] было показано существование аксиально-симметричного решения (отличного от керровского) вакуумных стационарных уравнений Эйнштейна, которое, по-видимому, также описывает гравитационное поле вращающейся массы.

В настоящей статье приводится класс решений вакуумных стационарных уравнений Эйнштейна, который в частном случае переходит в решение Хоэнселарса-Ямадзаки [1,2].

Известно, что метрика стационарного аксиально-симметричного гравитационного поля в координатах Вейля имеет вид

$$dS^2 = f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt - \omega d\varphi)^2, \tag{1}$$

где искомые функции $f$, $\omega$ и $\gamma$ зависят лишь от координат $\rho$ и $z$.

Обычно вводят еще функцию $\Phi(\rho, z)$, связь которой с $f$ и $\omega$ дается соотношениями

$$\Phi_{,\rho} = \rho^{-1} f^2 \omega_{,z}, \qquad \Phi_{,z} = -\rho^{-1} f^2 \omega_{,\rho}. \tag{2}$$

(Здесь и в дальнейшем запятая снизу у буквы означает операцию частного дифференцирования.)

В таком случае вакуумные уравнения Эйнштейна могут быть записаны для единственной комплексной функции $\epsilon$

$$\epsilon = f + i\Phi \tag{3}$$

в форме Эрнста

$$(\epsilon+\epsilon^*)(\epsilon_{,\rho\rho}+\epsilon_{,zz}+\rho^{-1}\epsilon_{,\rho})=2(\epsilon_{,\rho}^2+\epsilon_{,z}^2). \tag{4}$$

Метрический коэффициент $\gamma$ может быть найден, если $\epsilon$ известно.

Заметим, что если $\epsilon$ является решением уравнения (4), то

$$\tilde{\epsilon}=\epsilon^{-1} \tag{5}$$

также является решением.

Основываясь на результатах работы [3], можно представить суперпозицию решения Керра с произвольным статическим вакуумным полем $\psi$ в виде

$$\epsilon=e^{\psi}\frac{\alpha Q+\beta P-2k}{\alpha Q+\beta P+2k} \tag{6}$$

$$\alpha=\sqrt{\rho^2+(z+k)^2}, \qquad \beta=\sqrt{\rho^2+(z-k)^2}, \tag{7}$$

где $k$ - действительная константа, статическое поле $\psi$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_{,\rho\rho}+\psi_{,zz}+\rho^{-1}\psi_{,\rho}=0. \tag{8}$$

Функции $P,Q$ - определяются соотношениями

$$P=\frac{1+iA}{1-iA}, \qquad Q=\frac{1+iB}{1-iB}, \tag{9}$$

где $A,B$ - должны быть определены для заданного статического решения $\psi$ из системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
(\ln A)_{,\rho}&=\beta_{,\rho}\psi_{,z}+\beta_{,z}\psi_{,\rho}\,,\\
(\ln A)_{,z}&=\beta_{,z}\psi_{,z}-\beta_{,\rho}\psi_{,\rho}\,,\\
(\ln B^{-1})_{,\rho}&=\alpha_{,\rho}\psi_{,z}+\alpha_{,z}\psi_{,\rho}\,,\\
(\ln B^{-1})_{,z}&=\alpha_{,z}\psi_{,z}-\alpha_{,\rho}\psi_{,\rho}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Выберем в качестве статического решения $\psi$ функцию вида

$$\psi=\delta\ln\frac{S_-+\sqrt{\rho^2+S_-^2}}{S_++\sqrt{\rho^2+S_+^2}}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}S_+&=[(z+k)^2+\alpha_+\alpha_--\rho^2-\epsilon_0^2]^{1/2},\\
\sqrt{2}S_-&=[(z-k)^2+\beta_+\beta_--\rho^2-\epsilon_0^2]^{1/2},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_+&=\sqrt{\rho^2+(z+k+\epsilon_0)^2}, \qquad \alpha_-=\sqrt{\rho^2+(z+k-\epsilon_0)^2},\\
\beta_+&=\sqrt{\rho^2+(z-k+\epsilon_0)^2}, \qquad \beta_-=\sqrt{\rho^2+(z-k-\epsilon_0)^2},
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\delta$ и $\epsilon_0$ - константы, характеризующие отклонение поля от сферической симметрии. Функция (11) удовлетворяет уравнению (8) и переходит в решение Шварцшильда при $\delta=1/2$ и $\epsilon_0=0$.

Вычисленные с помощью (7), (11), (12), (13), производные $\psi_{,\rho}$, $\psi_{,z}$, $\beta_{,\rho}$, $\beta_{,z}$, $\alpha_{,\rho}$, $\alpha_{,z}$ подставляем в систему уравнений (10), после чего находим

$$\frac{1}{\delta}(\ln A)_{,\rho}=\frac{(\beta_++\beta_-)[\rho^2-(z-k)^2]+(\beta_+-\beta_-)(z-k)\epsilon_0}{2\rho\beta\beta_+\beta_-}-$$

$$-\frac{(\alpha_+ + \alpha_-)[\rho^2 - (z^2 - k^2)] + (\alpha_+ - \alpha_-)(z + k)\epsilon_0}{2\rho\beta\alpha_+\alpha_-}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\delta}(\ln A)_{,z} = \frac{2(\beta_+ + \beta_-)(z - k) + (\beta_+ - \beta_-)\epsilon_0}{2\beta\beta_+\beta_-} -$$

$$-\frac{2(\alpha_+ + \alpha_-)z - (\alpha_+ - \alpha_-)\epsilon_0}{2\beta\alpha_+\alpha_-} \tag{15}$$

Для выражений $(\ln B^{-1})_{,\rho}$ и $(\ln B^{-1})_{,z}$ имеем аналогичные формулы с заменой $\beta$ на $\alpha$ и $\beta_\pm$ на $\alpha_\pm$.

После интегрирования (14), (15) и соответствующих уравнений для $B$ окончательно получим

$$A = a\left(\frac{KR}{L}\right)^{\delta/2}, \tag{16}$$

$$B = b\left(\frac{MG}{N}\right)^{\delta/2}. \tag{17}$$

$$K = [(\beta + \beta_+)^2 - \epsilon_0^2][(\beta + \beta_-)^2 - \epsilon_0^2],$$
$$L = [(\beta + \alpha_-)^2 - 4k(k - \epsilon_0)]^{l_-}[(\beta + \alpha_+)^2 - 4k(k + \epsilon_0)]^{l_+}, \tag{18}$$
$$R = (\beta + \alpha_+)^{l_+ - 1}(\beta + \alpha_-)^{l_- - 1}\rho^{l_+ + l_- - 2},$$

$$M = [(\alpha + \alpha_+)^2 - \epsilon_0^2][(\alpha + \alpha_-)^2 - \epsilon_0^2],$$
$$N = [(\alpha + \beta_-)^2 - 4k(k - \epsilon_0)]^{l_-}[(\alpha + \beta_+)^2 - 4k(k + \epsilon_0)]^{l_+}, \tag{19}$$
$$G = (\alpha + \beta_+)^{l_+ - 1}(\alpha + \beta_-)^{l_- - 1}\rho^{l_+ + l_- - 2},$$

где $a, b$ - константы интегрирования, $l_\pm$ - имеют вид

$$l_\pm = \frac{z + k}{z - k}\,\frac{z - k \pm \epsilon_0}{z + k \pm \epsilon_0}. \tag{20}$$

Таким образом, соотношения (6), (9), (11), (16), (17) определяют новый класс аксиально-симметричных стационарных решений уравнений Эйнштейна. В частном случае $\delta = 0$ это решение переходит в известное решение Керра. В другом частном случае $\delta = -2$, $\epsilon_0 = 0$, $b = -a$, учитывая преобразование инверсии (5), найденное решение переходит в решение, полученное в работах [1,2,4]. Заметим также, что с помощью полученного нами стационарного аксиально-симметричного решения можно, основываясь на известной теореме Боннора, получить соответствующее магнитостатическое решение с помощью соотношений, использованных, например, в работе [5].


1. Hoenselaers C., Kinnersley W., Xantopolos B., J. Math. Phys., 1979, 20, 2530.
2. Yamazaki M., J. Math. Phys., 1981, 22, 133.
3. Gutsunaev Ts.I., Manko V.S., Gen. Relat. Grav., 1988, 20, 327.
4. Gutsunaev Ts.I., Manko V.S., Class. Quantum. Grav., 1989, 6, L.137.
5. Гуцунаев Ц.И., Манько В.С. ЖЭТФ, 1989, 95, 1537.