Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 11, стр. 603 — 607 10 декабря 1991 г.

О ПРИЧИНАХ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ЗАКОНА ПУАССОНА ФЛУКТУАЦИЙ МНОЖЕСТВЕННОСТИ ГРУПП МЮОНОВ В КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ

С.Н.Бозиев

Институт ядерных исследований АН СССР
117312, Москва

Поступила в редакцию 17 октября 1991 г.

Выявлен механизм, приводящий к возможности фитирования флуктуаций множественности групп мюонов отрицательным биномиальным распределением.

Первый анализ распределений групп мюонов по множественности был проделан в работе [1]. В ней предполагалось, что флуктуации множественности мюонов, генерированных нуклонами заданной энергии подчиняются закону Пуассона. Однако, как показали недавние расчеты [2-4], флуктуации множественности мюонов не всегда являются пуассоновскими и в общем случае описываются отрицательным биномиальным распределением

$$B(n,\bar{n},k) = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \left(\frac{\bar{n}/k}{1+\bar{n}/k}\right)^n \frac{1}{(1+\bar{n}/k)^k}, \tag{1}$$

где $k = \bar{n}^2/(D-\bar{n})$, $\bar{n}$ - величина среднего, D - дисперсия.

В этой работе укажем на причины, обуславливающие отклонение от закона Пуассона. Для этого воспользуемся одной из возможных математических интерпретаций отрицательного биномиального распределения (см., например, [5]). Пусть x - случайная величина, имеющая гамма-распределение с плотностью

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \left(\frac{k}{\bar{n}}\right)^k x^{k-1} e^{-\frac{k}{\bar{n}}x}, \quad x \geq 0.$$

Пусть n - случайная величина, при фиксированном значении x имеющая распределение Пуассона $P(n) = e^{-x}x^n/n!$. Тогда, свертка гамма- и P-распределений дает отрицательное биномиальное распределение

$$B(n,\bar{n},k) = \int g(x,\bar{n},k)P(x,n)dx. \tag{2}$$

Величина дисперсии отрицательного биномиального распределения, при этом определяется согласно теореме сложений дисперсий: $D = D_g + D_p = \bar{n}^2/k + \bar{n}$.

Для событий, инициированных протонами заданной энергии интерпретация отрицательного биномиального распределения (2), предлагаемая в данной работе состоит в следующем: $P(x,n)$ - распределение по числу мюонов, рожденных в событиях с одинаковым суммарным числом ν адронов (подразумеваются заряженные пионы и каоны), энергия которых превышает порог E_t регистрации мюонов ($E_\mu \geq E_t$); x - среднее число мюонов в событиях с одинаковым числом ν. $g(x,\bar{n},k)$ - плотность событий со средней множественностью мюонов x.

ν	x	D_x	$N^{1)}$
21 – 40	2.38 ± 0.20	2.04 ± 0.41	50
41 – 60	4.19 ± 0.12	4.47 ± 0.35	326
61 – 80	5.35 ± 0.06	4.99 ± 0.20	1309
81 – 100	6.70 ± 0.05	5.98 ± 0.17	2589
101 – 120	7.78 ± 0.05	7.10 ± 0.20	2415
121 – 140	8.86 ± 0.07	8.47 ± 0.30	1647
141 – 160	9.71 ± 0.11	10.50 ± 0.50	874
161 – 180	10.75 ± 0.16	10.97 ± 0.16	445
181 – 200	11.56 ± 0.24	11.28 ± 1.14	198
201 – 220	12.70 ± 0.37	14.19 ± 2.10	92
221 – 240	12.93 ± 0.60	10.93 ± 2.87	30
241 – 260	14.00 ± 1.18	16.83 ± 7.18	12

[1] N - число событий.

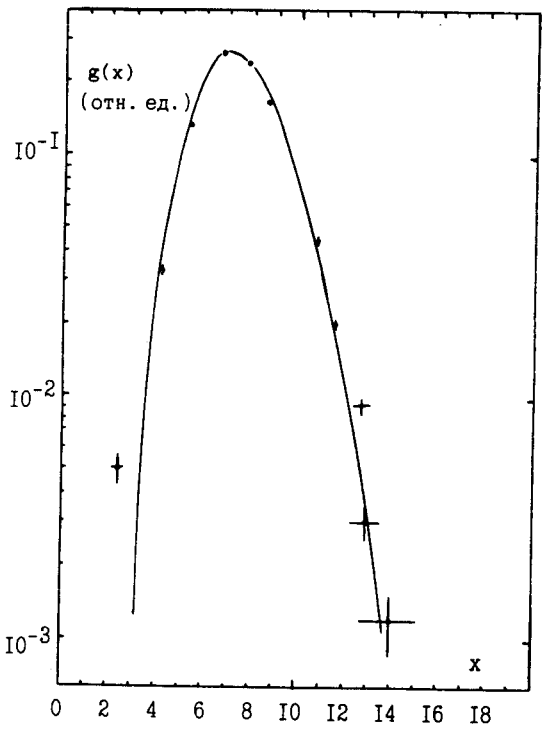

Рис. 1. Аппроксимация расчетной зависимости $N(x)$ в таблице гамма-распределением $g(x)$

Для проверки этого предположения в таблице приведены результаты розыгрыша 10^4 событий, генерированных протонами с энергией $E = 100$ ТэВ, зенитным углом прихода $\theta = 0°$ и $E_t = 0,22$ ТэВ (средний порог для подземного сцинтилляционного телескопа ИЯИ АН СССР). Глубина первого взаимодействия протонов одинакова для всех этих событий и соответствует $z = 50$ г/см^2. В этой таблице делается сравнение величин среднего (x) и дисперсии (D_x) распределений по числу мюонов в событиях с числом адронов в интервале $\nu \div \nu + \Delta\nu$. Из такого сравнения следует, что в каждом интервале спектры мюонов описываются распределением Пуассона. На рис.1 приводится распределение по числу событий в узких интервалах по ν. По оси абсцисс отложено среднее число мюонов в этих интервалах. Видно, что расчетные точки на этом рисунке удовлетворительно фитируются гамма-распределением с параметрами $\bar{n}_1 = 7,7$ и $k_1 = 20$. Отклонение первой расчетной точки от гладкого распределения объясняется нелинейностью в области малых ν за-

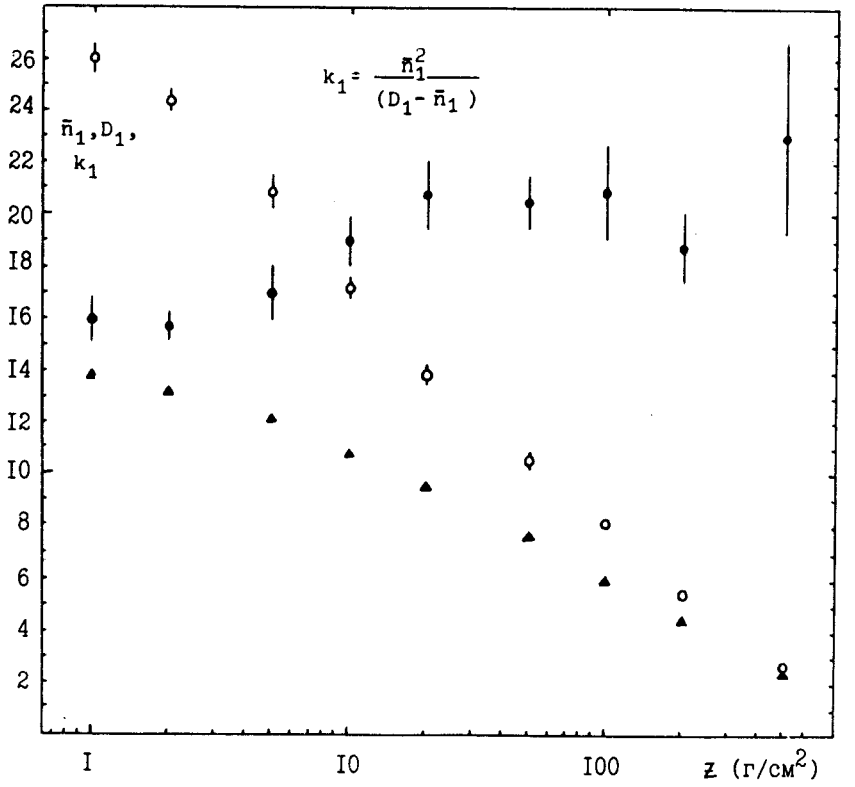

Рис. 2. Зависимость параметров $\bar{n}_1(\Delta)$, $D_1(\circ)$, $k_1(\bullet)$ от глубины z

висимости $x(\nu)$, приведенной в таблице. Мы рассмотрели случай генерации групп мюонов в ливнях, инициированных протонами на глубине $z = 50$ г/см^2 в атмосфере.

На рис.2 приводятся зависимости параметров от z. Отметим, что величина k_1 на этом рисунке близка к константе. Слабое отклонение k_1 от постоянного значения при малых z объясняется тем, что на больших высотах в атмосфере вероятность распада адронов увеличивается. Это приводит к тому, что в узких интервалах по ν имеет место слабое отклонение от пуассоновских флуктуаций, поскольку рождение мюона становится менее редким событием. Так для $z = 1$ г/см^2 вероятность этого процесса равна 0,13.

Перейдем теперь к рассмотрению более общего случая. А именно, проделаем анализ аналогичный изложенному, но для случая, когда глубина первого взаимодействия первичного протона флуктуирует по экспоненциальному закону. На рис.3 приведены результаты розыгрыша 15000 событий генерированных первичными протонами с $E = 100$ ТэВ; $E_t = 0,22$ ТэВ, $\theta = 0°$. Из сравнения величин $\bar{n}_2$ и D_2 на этом рисунке следует, что "включение" дополнительного источника флуктуаций приводит к непуассоновости распределений событий по числу мюонов в узких интервалах по величине ν. Для интерпретации этого результата предположим по аналогии с (2), что флуктуации, обусловленные различием пробегов первого взаимодействия описываются гамма-распределением с независящим от ν значением $k_2 = \bar{n}_2^2/(D_2 - \bar{n}_2)$, что подтверждается результатами, приведенными на рис.3. Обобщение (2) в этом случае имеет вид

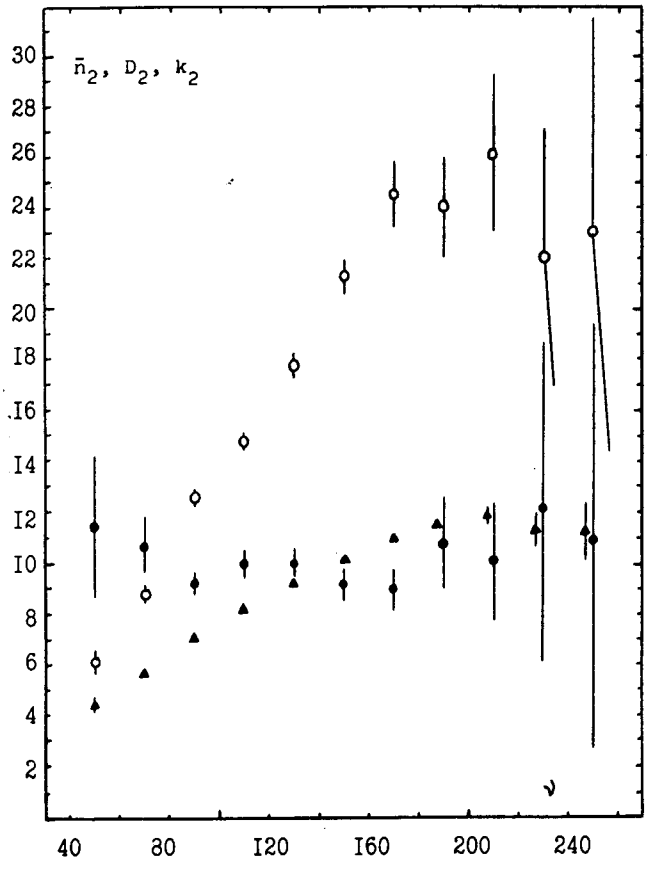

Рис. 3. Зависимость параметров $\bar{n}_2(\Delta)$, $D_2(\circ)$, $k_2(\bullet)$ от ν в случае флуктуаций z

$$B(n,\bar{n},k) = \int g(y,\bar{n},k_2)dy \int g(x,y,k_1)\frac{e^{-x}x^n}{n!}dx, \tag{3}$$

где $k = f(k_1,k_2)$. Этот интеграл сводится к вырожденной гипергеометрической функции и не является табличным. Поэтому проделаем следующий анализ. Поскольку отрицательное биномиальное распределение характеризуется параметрами $\bar{n}$ и k, то для определения параметра k в (3) вычислим его дисперсию через характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn}B(n,\bar{n},k) = \left(\frac{k_2}{\bar{n}}\right)^{k_2}\frac{k_1^{k_1}}{\Gamma(k_2)}\int y^{k_2-k_1-1}e^{-\frac{k_2}{\bar{n}}y}\frac{dy}{\left(\frac{k_1}{y}+1-e^{it}\right)^{k_1}}. \tag{4}$$

Дисперсия выражается через производные $\varphi(t)$ в точке $t=0$ (см. [6]):

$$D = -\varphi''(0) + [\varphi'(0)]^2.$$

Имеем $\varphi'(0) = i\bar{n}$, $\varphi''(0) = -\bar{n}^2(1+k_1)(1+k_2)/k_1k_2 - \bar{n}$,

$$D = \bar{n}^2\frac{1+k_1+k_2}{k_1k_2} + \bar{n}. \tag{5}$$

Сравнивая (5) с дисперсией отрицательного биномиального распределения получим: $k = \frac{k_1k_2}{1+k_1+k_2}$.

Мы получили выражение параметра k отрицательного биномиального распределения через параметры k_1 и k_2.

Определим, теперь, величину квадрата относительных флуктуаций для отрицательного биномиального распределения через параметры k_1, k_2, $\bar{n}$. Из определения дисперсии отрицательного биномиального распределения и (5) имеем

$$\delta^2 = \frac{D}{\bar{n}^2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{\bar{n}}. \tag{6}$$

Для количественной оценки δ^2 воспользуемся результатами на рис.2,3. Из расчетной величины средней множественности $\bar{n} \simeq 8,0$ и величин $k_1 \simeq 20$ и $k_2 \simeq 9,5$ имеем $\delta^2 \simeq 0,28$. В этом случае максимальный вклад в δ^2 дает член $1/\bar{n}$.

Таким образом, на флуктуации множественности групп мюонов влияют три процесса: 1) флуктуации глубины зарождения ливня; 2) флуктуации суммарного числа адронов, посредством которых образуются мюоны; 3) флуктуации в распадах адронов. Как показано выше, последний источник дает флуктуации множественности мюонов, близкие к распределению Пуассона. Однако, наличие первых двух источников флуктуаций приводит к отклонению от закона Пуассона и более точному фитированию спектра мюонов по множественности отрицательным биномиальным распределением.

Автор благодарен А.Е.Чудакову, А.В.Воеводскому и С.П.Михееву за полезные обсуждения.

---

1. Chudakov A.E., Proc. of 16-th ICRC, 1979, 10, 192.
2. Бозиев С.Н., Воеводский А.В., Чудаков А.Е., Препринт ИЯИ АН СССР, П-0630, 1989; Письма в ЖЭТФ, 1989, 50, 6.
3. Бозиев С.Н., ЯФ, 1990, 52, 500.
4. Bilokon. H., Gaiser T. et al., Proc. of. 21-th ICRC, 1990, 9, 366.
5. Королюк В.С., Портенко Н.И. и др., Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985, 111.
6. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988, 212.