Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 11, стр. 623 — 625 10 декабря 1991 г.

ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРОВ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С СИЛЬНОЙ ДЛИННОВОЛНОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

А.М.Быков

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе АН СССР
194021 Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 28 октября 1991 г.

Получены энергетические спектры нетепловых заряженных частиц с учетом непертурбативных эффектов конечного изменения энергии частицы на длине корреляции случайного электромагнитного поля в плазме. Показано, что в области малых переданных импульсов стационарный спектр частиц имеет универсальную логарифмическую особенность.

Кинетика заряженных частиц в случайных электромагнитных полях различных физических систем детально изучалась в рамках приближения Фоккера - Планка [1,2]. Условие применимости этого приближения сводится, как правило, к требованию малости изменения импульса и (или) энергии частицы на длине корреляции L_c или за время корреляции τ_c случайного поля. Поэтому использование приближения Фоккера - Планка ограничено либо рассмотрением частиц с достаточно большой энергией, либо систем с короткокоррелированными полями. С другой стороны решение многих задач, укажем, в частности, на проблему формирования спектров космических лучей низких энергий ($E \leq 1$ ГэВ) в Галактике, требуют выхода за пределы приближения Фоккера - Планка. В данной работе мы обсудим особенности спектров заряженных частиц, связанные с сильным изменением энергии частиц на длине корреляции в системе с сильной длинноволновой турбулентностью МГД-типа.

Рассмотрим плазменную систему с развитой, статистически однородной, изотропной МГД-турбулентностью. Электрические поля, индуцированные турбулентными движениями идеально проводящей среды с вмороженным магнитным полем, приводят к статистическому изменению энергии надтепловых заряженных частиц. Флуктуации магнитного поля с масштабами меньше или порядка гирорадиуса частицы ведут (в отсутствие кулоновских соударений) к эффективной изотропизации импульсов частиц и определяют их транспортный пробег λ. Будем называть длинноволновыми флуктуации с масштабами $L_c \gg \lambda$. Функция распределения $G(\vec{r}, \eta, t)$ надтепловых частиц, усредненная по ансамблю турбулентных флуктуаций всех масштабов, удовлетворяет уравнению, полученному в работе [3]:

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta' \chi_{\alpha\beta}(\eta - \eta') \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \eta', t)}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 3\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} D(\eta - \eta') G(r, \eta', t) d\eta' =$$
$$= Q\delta(\eta), \qquad (1)$$

где вместо импульса частицы p, введена переменная $\eta = \ln(p/p_0)$, Q - темп генерации моноэнергичных частиц с импульсом p_0 стационарным источником. Уравнение (1) удобно решать в фурье-представлении по переменной η, образ которой обозначим через s. Фурье-образы ядер интегрального уравнения (1) выражаются через корреляционные функции турбулентности [3].

Исследуем весьма общий случай сжимаемой системы с протяженным спектром флуктуаций скорости:

$$W(k) = \frac{< u^2 >}{4} C(\nu) \frac{k_0^{\nu-1}}{(k^2+k_0^2)^{\nu/2+1}}, \qquad k \leq k_{max} \tag{2}$$

и лоренцевской формой частотной зависимости, характеризуемой законом дисперсии $\omega_0 = uk$, а также "шириной резонанса" $\gamma/2 = uk_0(k/k_0)^{(3-\nu)/2}$, где $u \equiv < u^2 >^{1/2}$, $C(\nu) \approx \frac{4\Gamma(\nu/2+1)}{3\pi^{3/2}\Gamma(\nu/2-1/2)}$ - нормировочная постоянная. В этом случае, следуя (3), с учетом эффектов конечного изменения энергии частицы на длине корреляции поля, для фурье-образов ядер получим систему трансцендентных уравнений

$$D_1(s) = \epsilon + C(\nu) \int_0^b \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{\nu/2+1}} \left\{ \frac{\psi}{\psi^2+\omega_0^2} - \frac{2}{3} D_1 x^2 \left(\frac{\lambda}{6}+1\right) \times \right.$$

$$\left. \frac{\psi^2-\omega_0^2}{(\psi^2+\omega_0^2)^2} + \frac{4}{9}\lambda D_1^2 x^4 \frac{\psi^3 - 3\psi\omega_0^2}{(\psi^2+\omega_0^2)^3} \right\}, \tag{3}$$

$$D_2(s) = \frac{C(\nu)}{9} \int_0^b \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^{\nu/2+1}} \; \frac{\psi}{\psi^2+\omega_0^2}. \tag{4}$$

Безразмерные переменные в (3) и (4) введены следующим образом: $\chi_{\alpha\beta}(s) \equiv uk_0^{-1} D_1(s)\delta_{\alpha\beta'}$, $D(s) \equiv uk_0 D_2(s)$, $b = k_{max}/k_0$, $x = k/k_0$, $\epsilon = \kappa k_0/u$. Здесь κ - "затравочный" коэффициент диффузии ($\kappa \propto \lambda$), обусловленный рассеянием частиц мелкомасштабными флуктуациями магнитного поля.

$$\psi(x,\lambda) = D_1(s)x^2 + \lambda D_2(s) + \frac{\gamma(x)}{2}, \qquad \lambda \equiv s(s+3i). \tag{5}$$

Кинетическое уравнение (1) с ядрами, определенными из соотношений (3) и (4), описывает энергетические спектры, формируемые посредством стохастического изменения энергии частиц (исходно моноэнергичных) длинноволновыми флуктуациями электрического поля. Вывод уравнения (1) предполагает, что скорости надтепловых частиц превышают турбулентные скорости среды u. Величина параметра ϵ при этом может быть произвольной.

Если $\epsilon > 1$, то есть превалирует перенос частиц за счет рассеяния на мелкомасштабных флуктуациях магнитного поля, то решения уравнений (3) и (4) можно аппроксимировать как $D_1(s) \approx \epsilon$ и $D_2(s) \approx (9\epsilon)^{-1}$. Таким образом, имеем $\chi_{\alpha\beta}(\eta-\eta') \approx \kappa\delta(\eta-\eta')\delta_{\alpha\beta'}$ $D(\eta-\eta') \approx u^2(9\kappa)^{-1}\delta(\eta-\eta')$. Уравнение (1) при этом сводится к виду Фоккера - Планка.

Если $\epsilon \ll 1$, перенос частиц определяется длинноволновыми флуктуациями скорости среды. В этом случае существенна перенормировка ядер уравнения (1). Зависимости D_1 и D_2 от s нетривиальны. При $s \leq 3$ образы ядер слабо зависят от s: $D_1(s) \approx D_1(0)$ и $D_2(s) \approx D_2(0)$. Далее характер зависимости существенно зависит от протяженности спектра флуктуаций, характеризуемой параметром $b (b > 1)$. Если $\epsilon b^{(\nu+1)/2} < 1$, то при $s \leq a(\nu)$ (где $a(\nu) = \sqrt{\frac{9(3-\nu)}{C(\nu)}} \sim 10$) зависимость ядер от s слабая. При $s \gg a(\nu)$ имеем следующие асимптотические выражения для фурье-образов ядер:

$$D_1(s) \to \epsilon/2, \tag{6}$$

$$D_2(s) \to b^{(3-\nu)/2}(a(\nu)\sqrt{\lambda})^{-1}. \tag{7}$$

В случае протяженного спектра флуктуаций $\epsilon b^{(\nu+1)/2} \gg 1$ асимптотические зависимости (6) и (7) имеют место для $s \gg a(\nu)\epsilon b^{(\nu+1)/2}$. Поведение функций $D_1(s)$ и $D_2(s)$ при $s \geq 3$, но до выхода на асимптотики, зависит от конкретной формы "ширины резонанса" $\gamma(k)$, а также параметров ϵ и b. В частности, поведение $D_2(s)$ в указанной области может быть немонотонным с несколькими максимумами. Характерно, что предельное значение (6) меньше затравочного коэффициента диффузии ϵ. Это свойство обусловлено сжимаемостью системы и носит общий характер [4].

Аналитические выражения (6) и (7) позволяют исследовать спектры заряженных частиц в области импульсов, близких к импульсу инжекции. Для простоты, но не ограничивая существенно общности результатов, можно заменить в (1) оператор пространственной диффузии на его собственное значение. Тогда фурье-образ стационарной функции распределения частиц (здесь это функция Грина) имеет вид:

$$G(s) = \frac{Q(uk_0)^{-1}}{\xi D_1(s) + \lambda D_2(s)}, \tag{8}$$

где $\xi \approx (k_0 R)^{-2}$, а R - размер области занятой турбулентными флуктуациями. Используя (6), (7) и (8) получим асимптотическое выражение для спектра частиц при импульсах близких к импульсу инжекции p_0.

$$G(p, p_0) \propto -Q(uk_0)^{-1} b^{(\nu-3)/2} a(\nu) \ln|\ln(p/p_0)|, \quad p \to p_0. \tag{9}$$

Спектр (9) имеет в окрестности p_0 интегрируемую логарифмическую особенность, связанную с возможностью конечного изменения энергии частицы на корреляционном масштабе. В области импульсов $p \gg p_0$ спектр частиц (8) определяется поведением $D_1(s)$ и $D_2(s)$ при $s \to 0$:

$$G(p, p_0) \propto Q(uk_0 D_2(0))^{-1} (p/p_0)^{\mu}, \quad \mu = -1,5 - (2,25 + \xi D_1(0) D_2^{-1}(0))^{0,5}. \tag{10}$$

Соотношения (10) описывают спектр Фоккера - Планка при всех $p \geq p_0$. При $p \to p_0$, в отличие от (9), функция распределения Фоккера - Планка имеет конечный предел и слабую зависимость от протяженности спектра флуктуаций b.

Заметим в заключение, что описанные выше результаты могут быть использованы при расчете спектров фотонов, формирующихся за счет томсоновского рассеяния в оптически плотной среде с макроскопическими турбулентными движениями. В этом случае затравочный коэффициент диффузии κ определяется концентрацией электронов (см., например, [5]).

1. Gardiner C.W., Handbook of stochastic methods. Springer, 1985.
2. Blandford R.D., Eichler D., Phys. Rep., 1987, 154, 1.
3. Быков А.М., Топтыгин И.Н., ЖЭТФ, 1990, 97, 195.
4. Bouchaud J.P., Georges A., Phys. Rep., 1990, 195, 131.
5. Blandford R.D., Payne D.G., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1981, 194, 1041.