Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 11, стр. 647 — 650 10 декабря 1991 г.

УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СИММЕТРИЯМИ

А.А.Белов, Ю.Е.Лозовик

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики
113556, Москва

Поступила в редакцию 23 сентября 1991 г.
После переработки 14 ноября 1991 г.

Получен общий вид управляющего уравнения для конформных теорий поля с Z_3-симметрией, при условии, что поля, порождающие W_3-алгебру, принадлежат универсальной обертывающей алгебре произвольной алгебры Каца–Муди.

Классификация конформных теорий поля является, с одной стороны, фундаментом для построения эффективного лагранжиана теории струн, а с другой, необходима для более полного понимания всего многообразия критических явлений двумерных теоретико-полевых моделей. В настоящее время построено чрезвычайно большое количество различных конформных теорий поля, большинство из которых допускает $WZNW$-интерпретацию. Однако, еще большее количество конформных теорий до сих пор не обнаружено или для них неизвестна явная теоретико-полевая реализация. В этой связи представляется полезным изучение уравнений на структурные константы квантовой теории поля, построенной в виде конкретного, скажем полиномиального по алгебре токов, анзаца, влекущих конформную инвариантность.

В основе систематического поиска новых конформных теорий поля лежит анализ аффинно-вирасоровского управляющего уравнения $AVME$ (Affine-Virasoro Master Equation) впервые полученного Галперном и Киритсисом [1], а также независимо А.Морозовым с соавторами [2] (также [3–5], где найдены различные решения $AVME$). В настоящей работе будет построено управляющее уравнение для конформных теорий, обладающих дополнительной симметрией (для определенности, Z_3-симметрией).

Перейдем к построению обобщения управляющего уравнения на случай W_3-алгебры Замолодчикова, которое будем обозначать посредством AW_3ME. Для этого введем в рассмотрение наряду с $T(z)$ киральное поле $Q(z)$ спина 3:

$$T(z)Q(w) = \frac{3}{(z-w)^2}Q(w) + \frac{1}{z-w}\partial Q(w) + \text{reg.t.}, \tag{1}$$

которое мы будем строить в виде трилинейной формы на алгебре токов G^k :

$$Q(z) = q_{abc} : J^a J^b J^c : (z) \tag{2}$$

где q_{abc} - полностью симметричный бесследовый G-тензор. Операторное разложение для полей $Q(z)$ и $Q(w)$ имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} Q(z)Q(w) = {} & \frac{c}{3(z-w)^6} + \frac{2T(w)}{(z-w)^4} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)^3} + \\ & + \frac{1}{(z-w)^2}\left\{2b^2\Lambda(w) + \frac{3}{10}\partial^2 T(w)\right\} + \\ & + \frac{1}{z-w}\left\{b^2\partial\Lambda(w) + \frac{1}{15}\partial^3 T(w)\right\} + \text{reg.t.}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\Lambda(w) = (TT)(w) - \frac{3}{10}\partial^2 T(w) \quad \text{и} \quad b^2 = \frac{16}{22+5c}$$

Для получения управляющего уравнения, которое выделяет среди полей вида (2) подмножество, удовлетворяющее вместе с тензором энергии-импульса вида:

$$T(z) = t_{ab} : J^a J^b : (z),$$

W_3-алгебре, следует подставить анзац (2) в операторные разложения (1) и (3) и применить многократно теорему Вика для редукции операторных структур $< AB >_k(z)$, возникающих в правой части операторного разложения, для композитных операторов $A(z)$ и $B(z)$.

Вывод системы AW_3ME начнем с $T \circ Q \to Q$-канала. Рассмотрим уровень $(z-w)^{-1}$. На этом уровне имеются операторные структуры следующих типов: $: J^a J^b J^c J^d : (z)$, $(\partial J^a : J^b J^c :)(z)$, $(J^a \partial^2 J^b)(z)$, $: \partial J^a \partial J^b : (z)$ и $\partial^3 J^a(z)$. Исчезновение коэффициента перед 4-линейной формой дает уравнение:

$$S_{stuv} t_{ab} q_{lmn} f^{al}_s \delta^b_t \delta^m_u \delta^n_v = 0. \tag{4}$$

Требование зануления члена $\simeq: \partial J^a \partial J^b : (z)$ приводит к уравнению:

$$t_{ab} q_{lmn} f^{al}_x f^{xm}_y f^{yn}_s \delta^b_t = 0. \tag{5}$$

Условие того, что коэффициент при $(\partial J^a : J^b J^c :)(z)$ совпадает с q_{abc}, дает:

$$\begin{aligned} S_{st} t_{ab} q_{lmn} \{ -2 f^{al}_x f^{xm}_s \delta^b_u \delta^n_t + f^{al}_x f^{xb}_u \delta^m_s \delta^n_t - \\ -2 f^{al}_s f^{bm}_u \delta^n_t + 2k\eta^{al} \delta^b_u \delta^m_s \delta^n_t \} = q_{stu}. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим теперь операторную структуру вида $(J^a \partial^2 J^b)(z)$. Зануление симметричной части $\simeq S_{ab}(J^a \partial^2 J^b)(z)$ дает уравнение, являющееся следствием уравнений (4) $\div$ (6), тогда как исчезновение антисимметричной части $\simeq A_{ab}(J^a \partial^2 J^b)(z)$ дает уравнение вида:

$$\begin{aligned} A_{st} t_{ab} q_{lm} \{ \alpha f^{al}_x f^{xm}_y f^{yn}_s \delta^b_t + \beta f^{al}_x f^{xb}_y f^{ym}_t \delta^n_s + \\ + \gamma f^{al}_x f^{xm}_s f^{bn}_t + \delta k f^{al}_t \ \eta^{bm} \delta^n_s \} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-1, 5, -1, 6)$.

Итак, набор уравнений $4 \div (6)$ и (7) является полной системой, необходимой для выполнения условия (1) примарности поля $Q(z)$.

Обратимся теперь к $Q \circ Q \to T$-каналу. Подставляя анзац (2) в уравнение (3) и проводя анализ, аналогичный вышеприведенному, находим, что полная система уравнений на q_{abc}, необходимых для выполнения W_3-алгебры (3) состоит из следующих четырех уравнений:

$$\begin{aligned} S_{stuv} \{ 9 q_{abc} q_{lmn} [2 f^{al}_x f^{xb}_s \delta^c_t \delta^m_u \delta^n_v - 2 f^{al}_s f^{bm}_t \delta^c_u \delta^n_v + \\ + k\eta^{al} \delta^b_s \delta^c_t \delta^m_u \delta^n_v] - 2b^2 t_{st} t_{uv} \} = 0 \end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} S_{stu} \ \{ 6 q_{abc} q_{lmn} [f^{al}_x f^{xb}_y f^{yc}_s \delta^m_t \delta^n_u - f^{al}_x f^{xb}_y f^{yc}_u \delta^m_s \delta^n_t + \\ + 3 f^{al}_x f^{xb}_y f^{ym}_s \delta^c_u \delta^n_t - 3 f^{al}_x f^{xb}_s f^{cm}_t \delta^n_u + \\ + 3 f^{al}_x f^{xb}_u f^{cm}_s \delta^n_t + 6k f^{al}_s \eta^{bm} \delta^c_u \delta_t{}^n] - \end{aligned} \tag{8b}$$

$$-8b^2 t_{ab} t_{lm} f_s^{al} \delta_u^b \delta_t^m\} = 0$$

$$A_{st}\{9q_{abc}q_{lmn}[2f_x^{al} f_y^{xb} f_z^{ym} f_s^{zc} \delta_t^n - f_x^{al} f_y^{xb} f_s^{ym} f_t^{cn} +$$
$$+2k f_x^{al} f_s^{xb} \eta^{cm} \delta_t^n] - 4b^2 t_{ab} t_{lm} f_x^{al} f_s^{xb} \delta_t^m\} = 0 \tag{8c}$$

$$S_{st}\{9q_{abc}q_{lmn}[2f_x^{al} f_y^{xb} f_z^{ym} f_s^{zc} \delta_t^n - 2f_x^{al} f_y^{xb} f_s^{ym} f_t^{cn} +$$
$$+f_x^{al} f_s^{xb} f_y^{cm} f_t^{yn} + 4k f_x^{al} f_s^{xb} \eta^{cm} \delta_t^n + k f_x^{al} f^{xbm} \delta_s^c \delta_t^n -$$
$$-2k f_s^{al} f_t^{bm} \eta^{cn} + 2k^2 \eta^{al} \eta^{bm} \delta_s^c \delta_t^n]\} = 2t_{st}. \tag{8d}$$

Система уравнений (4) $\div$ (8) вместе с $AVME$:

$$k t_{ab} t_{cd} (f_s^{ac} f^{sbd} + 2k \eta^{ac} \eta^{bd}) = c/2$$

и

$$S_{mn} t_{ab} t_{cd} (2 f_s^{ac} f_m^{sb} \delta_n^d - f_m^{ac} f_n^{bd} + 2k \eta^{ac} \delta_m^b \delta_n^d) = t_{mn}$$

представляет собой полную систему AW_3ME.

Аналогичным образом получаются уравнения AW_3ME для расширения анзаца (2), включающего члены вида $(J^a \partial J^b)(z)$ и $\partial^2 J^a(z)$.

Анализ системы AW_3ME позволяет сделать следующие выводы относительно структуры конформных теорий поля с Z_3-симметрией.

1. *Любая* аффинная модель W_3-алгебры, имеющая центральный заряд c порождена некоторой аффинно-вирасоровской моделью (W_2-алгеброй), имеющей центральный заряд $\tilde{c} = (c+2)/4$, в том смысле, что поля $T(z)$ и $Q(z)$, образующие W_3-алгебру, являются дифференциальными полиномами от тензора энергии-импульса $T(z)$ и "поля Романса" [7] $H_R(z)$:

$$T(z) = \tilde{T}(z) + T_R(z)$$

$$Q(z) = b\sqrt{2}((H_R + \frac{1}{2}a\partial)(\tilde{T} - \frac{1}{3}T_R))(z), \tag{9}$$

где $T_R(z) = \frac{1}{2}(H_R H_R)(z) + a\partial H_R(z)$.

Таким образом, классификация аффинных W_3-алгебр полностью подобна классификации аффинно-вирасоровских моделей, что было установлено ранее только для частного случая минимальных W_3-моделей ($c < 2$).

2. Следствием изоморфизма классификаций W_2 и W_3 аффинных моделей является утверждение о несправедливости гипотезы Романса [7] о существовании квантовых "магических" W_3-алгебр, соответствующих четырем магическим иордановым алгебрам J^A, $A \in \{R, C, H, O\}$ размерности $n = 5,\ 8,\ 14,\ 26$ соответственно. Следовательно, иордановость является специфическим свойством только классических W_3-алгебр. Имеются, таким образом, исключительные классические W_3-алгебры, непродолжаемые на квантовый уровень, что является существенным моментом для анализа W-гравитаций.

3.Найденные в [8] деформируемые аффинно-вирасоровские модели CFT с пространством модулей $G_{\tilde{c}}(R^r)$ могут быть погружены в аффинные W_3-модели с центральным зарядом $c = 4\tilde{c} - 2$, что подтверждает гипотезу А.Ю.Морозова [9] о существовании многопараметрических деформаций W-алгебр.

4.При $c = 2$ конструкция Романса [7] обладает скрытой симметрией, приводящей к расширению пространства деформаций $G_1(R^r) \to G_2(R^r)$ и возможности конабелизации W_3-конструкций.

5. Ренормгрупповой поток (RG) на пространстве аффинно-вирасоровских моделей [10] допускает естественное продолжение на W_3-модели в рамках

конструкции Романса. А именно, из RG-связанности двух аффинно-вирасоровских моделей с центральными зарядами $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ вытекает RG-связанность порожденных ими W_3-моделей с центральными зарядами c_1 и c_2 $(c_i = 4\tilde{c}_i - 2)$.

6. Обобщение AW_3ME на случай высших W-алгебр позволяет получить прямые аналоги вышеприведенных утверждений для всех Wg_L-алгебр, где g_L - алгебра Ли ранга L с простыми связями (ADE-типа). В частности, при $c = L$ скрытая симметрия обобщенной конструкции Романса приводит к расширению пространства деформаций

$$G_1(R^r) \to G_L(R^r).$$

В заключение отметим, что наличие конформных теорий с дополнительными симметриями, обладающих многопараметрическими маргинальными деформациями, является принципиальным моментом при формулировке динамического принципа на пространстве моделей, включающем (как точки) конформные теории и, наряду с ними, интерполирующие между ними интегрируемые модели, что является составной частью программы построения *полной* теории струны (т.е. вне массовой поверхности). Наличие указанных спорадических деформаций с точки зрения эффективной динамической теории на пространстве моделей означает существование специфических "нулевых мод", обладающих всевозможыми расширенными симметриями.

1. Halpern M.B., Kiritsis E., Mod. Phys. Lett., A,1989, 4 1373; Erratum ibid., p. 1797.
2. Morozov A.Yu. et al. Int. J. Mod. Phys. A, 1990, 5, 803.
3. Morozov A.Yu., Shifman M.A., Turbiner A.V., Ibid., p.2953.
4. Halpern M.B., et al., Int. J. Mod. Phys. A, 1990, 5, 2275.
5. Schrans S., Troost W., Nucl. Phys. B, 1990, 345, 584.
6. Замолодчиков А.Б. ТМФ, 1985, 65, 347.
7. Romans L.J., Nucl. Phys. B, 1991, 352, 829.
8. Белов А.А., Лозовик Ю.Е., Письма в ЖЭТФ, 1990, 52, 1170, Ядерная физика, 1991, 53, 1464.
9. Morozov A.Yu., Nucl. Phys. B, 1991, 357, 619.
10. Giveon A., Ibid., p. 655.