Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 1, с. 51 – 58 © 2022 г. 10 января

Резонансное взаимодействие векторных бризеров

А. А. Раковалов[+*×], *А. А. Гелаш*[+○1)]

[+] *Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия*

[*] *Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения РАН, 620108 Екатеринбург, Россия*

[×] *Физико-технологический институт, Уральский федеральный университет, 620002 Екатеринбург, Россия*

[○] *Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 21 октября 2021 г.
После переработки 17 ноября 2021 г.
Принята к публикации 19 ноября 2021 г.

Теоретически исследованы векторные солитоны на неустойчивом постоянном фоне (векторные бризеры) в рамках фокусирующего двух-компонентного нелинейного уравнения Шредингера. На основе упрощенной версии метода обратной задачи рассеяния – схемы "одевания" – получены точные решения, описывающие резонансное взаимодействие векторных бризеров. Резонанс представляет трех-бризерный процесс, т.е. слияние двух бризеров в один, либо распад одного бризера на два. Процесс происходит таким образом, что для соответствующих бризерам волновых чисел и частот выполняются условия резонанса.

DOI: 10.31857/S1234567822010098

Введение. Одномерное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) представляет одну из наиболее универсальных и фундаментальных моделей нелинейной физики при описании распространения узкополосного волнового пакета в слабо нелинейной среде [1–3]. С. В. Манаков изучил двух-компонентный (векторный) аналог НУШ, который в настоящее время известен как система Манакова [4]. В данной работе мы исследуем систему Манакова с фокусирующей нелинейностью в присутствии постоянного модуляционно неустойчивого фона (конденсата). В безразмерных переменных система Манакова имеет вид:

$$i\psi_{1t} - \frac{1}{2}\psi_{1xx} - (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - A^2)\psi_1 = 0, \qquad (1)$$
$$i\psi_{2t} - \frac{1}{2}\psi_{2xx} - (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - A^2)\psi_2 = 0.$$

Здесь t – время, x – пространственная координата; $\psi_{1,2}$ – компоненты комплексного волнового поля; $A_{1,2} = \mathrm{const}$ представляют вещественные амплитуды конденсата; $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Наличие конденсата в модели (1) приводит к граничным условиям: $|\psi_{1,2}|^2 \to A_{1,2}^2$ при $x \to \pm\infty$.

Система (1) широко используется в нелинейной оптике как модель распространения света в двулучепреломляющем оптоволокне [3]. В этом случае компоненты ψ_1, ψ_2 отвечают различным световым поляризациям, взаимодействие которых продуцирует богатый набор нелинейных явлений [1].

Система Манакова, как и скалярное НУШ, относится к классу уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР), что позволяет построить ее точные многосолитонные решения [5, 4]. Ключевую роль в построении МОЗР для системы Манакова играет вспомогательная линейная система 3×3 для матричной волновой функции Йоста. Согласно теории МОЗР, каждый солитон волнового поля характеризуется определенным комплексным собственным числом λ вспомогательной системы. Величина λ задает форму и скорость движения солитона. Взаимодействие поляризованных солитонов впервые изучено С. В. Манаковым [4]. На настоящее время векторным солитонам посвящено большое число работ, см., например, [6, 3].

При наличии фона решения скалярного НУШ трансформируются в осциллирующие волновые структуры – бризеры. Фундаментальными составляющими семейства бризеров скалярного НУШ служат солитоны Кузнецова [7], Ахмедиева [8], Перегрина [9] и Таджири–Ватанабе [10]. Бризерные решения могут аналитически описывать формирование волн-убийц [11] и развитие модуляционной неустойчивости [8, 12]. Бризеры и их взаимодействие интенсивно исследуются в эксперименте, см. [13–15]. В [16] представлены векторные аналоги бризеров Кузнецова, Ахмедиева и Перегрина. В

[1)] e-mail: agelash@gmail.com

работе [17] в рамках МОЗР проведен детальный анализ начально-краевой задачи для системы (1) на основе задачи Римана и дана общая классификация типов векторных бризеров на основе аналитических свойств функций Йоста. Согласно этой классификации, векторные бризеры системы Манакова делятся на три типа: I, II и III, причем солитоны II и III не имеют аналогов в скалярном фокусирующем НУШ.

В интегрируемых моделях солитоны (бризеры) обычно взаимодействуют упруго, а число взаимодействующих солитонов не меняется со временем. Однако, как показано В. Е. Захаровым и С. В. Манаковым [18] (см. также работу Д. Дж. Каупа [19]), взаимодействие солитонов в интегрируемой системе трех волн может приводить к их слиянию, либо распаду. Позже нетривиальные взаимодействия солитонов были обнаружены в двумерной теории поля [20]. Подобный нелинейный волновой процесс запрещен для скалярного НУШ и системы Манакова с нулевыми граничными условиями. Тем не менее, при добавлении в систему Манакова постоянного фона слияние либо распад различных когерентных структур оказывается возможным [21, 22].

В данной работе мы представляем точное решение системы (1), описывающее резонансное взаимодействие бризеров типов I, II и III. Под резонансным взаимодействием мы понимаем трех-бризерный процесс, т. е. слияние двух бризеров в третий или распад одного бризера на два. Участвующие во взаимодействии бризеры имеют каждый свой тип: I, II или III. Мы установили, что волновые вектора k_{I}, k_{II}, k_{III} и частоты ω_{I}, ω_{II}, ω_{III} удовлетворяют типичному условию резонанса.

Метод “одевания” для векторных бризеров. Для построения бризерных решений системы Манакова мы используем процедуру “одевания”. Данный метод, известный также как схема одевания Дарбу, в различных вариантах служит популярным средством построения точных решений интегрируемых нелинейных моделей, см. [5, 23–25]. Мы используем векторный аналог метода одевания, развитого ранее для скалярного НУШ в работе [26].

В этом разделе мы кратко опишем метод “одевания”, позволяющий построить точные бризерные решения системы Манакова (1) при наличии постоянного фона. Рассмотрим вспомогательную линейную систему для 3×3 матричной волновой функции $\mathbf{\Phi}$, зависящей от x, t и от комплексного спектрального параметра λ:

$$\mathbf{\Phi}_x = \mathbf{U}\mathbf{\Phi}, \tag{2}$$

$$\mathbf{\Phi}_t = \mathbf{V}\mathbf{\Phi} = -(\lambda\mathbf{U} + i\mathbf{W}/2)\mathbf{\Phi}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ представляют собой следующие 3×3 матрицы:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -i\lambda & \psi_1 & \psi_2 \\ -\psi_1^* & i\lambda & 0 \\ -\psi_2^* & 0 & i\lambda \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} |\psi_1|^2+|\psi_2|^2-A^2 & \psi_{1x} & \psi_{2x} \\ \psi_{1x}^* & -|\psi_1|^2+A^2 & -\psi_1^*\psi_2 \\ \psi_{2x}^* & -\psi_1\psi_2^* & -|\psi_2|^2+A^2 \end{pmatrix}.$$

Система Манакова (1) служит условием совместности уравнений (2) и (3):

$$\mathbf{\Phi}_{xt} = \mathbf{\Phi}_{tx}.$$

Из уравнений (2), (3) также следуют дополнительные соотношения для функций $\mathbf{\Phi}^{-1}$ и $\mathbf{\Phi}^{\dagger}$:

$$\mathbf{\Phi}_x^{-1} = -\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{U}, \qquad \mathbf{\Phi}_t^{-1} = -\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{V}, \tag{5}$$

$$\mathbf{\Phi}_x^{\dagger} = \mathbf{\Phi}^{\dagger}\mathbf{U}^{\dagger}, \qquad \mathbf{\Phi}_t^{\dagger} = \mathbf{\Phi}^{\dagger}\mathbf{V}^{\dagger}. \tag{6}$$

Здесь знак † означает эрмитово сопряжение. Сравнивая (5) и (6), из условий симметрии $\mathbf{U}^{\dagger}(\lambda^*) = -\mathbf{U}(\lambda)$, $\mathbf{V}^{\dagger}(\lambda^*) = -\mathbf{V}(\lambda)$, находим, что функция $\mathbf{\Phi}$ удовлетворяет редукции:

$$\mathbf{\Phi}^{\dagger}(\lambda^*) = \mathbf{\Phi}^{-1}(\lambda). \tag{7}$$

На первом этапе процедуры “одевания” мы находим решение $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{c}}$ системы (2), (3) на фоне конденсата $\psi_{1,2} = A_{1,2}$:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{c}}(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0, & e^{\varphi}, & -\mathrm{i}\,re^{-\varphi} \\ -\frac{A_2}{A}\,e^{-\varphi_0}, & -\frac{A_1}{A}\,\mathrm{i}\,re^{\varphi}, & \frac{A_1}{A}\,e^{-\varphi} \\ \frac{A_1}{A}\,e^{-\varphi_0}, & -\frac{A_2}{A}\,\mathrm{i}\,re^{\varphi}, & \frac{A_2}{A}\,e^{-\varphi} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\varphi_0 = -\mathrm{i}\,\lambda\,x + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\lambda^2+\zeta^2\right)t, \qquad \varphi = -\mathrm{i}\zeta\,x + \mathrm{i}\,\lambda\,\zeta\,t,$$

и

$$r = A/(\lambda+\zeta), \qquad \zeta = \sqrt{\lambda^2+A^2}.$$

Решение $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{c}}(x,t,\lambda)$ удовлетворяет вспомогательной системе:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{c}\,x} = \mathbf{U}_{\mathrm{c}}\mathbf{\Phi}, \qquad \mathbf{\Phi}_{\mathrm{c}\,t} = \mathbf{V}_{\mathrm{c}}\mathbf{\Phi}, \tag{9}$$

где $\mathbf{V}_{\mathrm{c}} = -(\lambda\,\mathbf{U}_{\mathrm{c}} + \mathrm{i}\mathbf{W}_{\mathrm{c}})$, и

$$\mathbf{U}_c = \begin{pmatrix} -i\lambda & A_1 & A_2 \\ -A_1 & i\lambda & 0 \\ -A_2 & 0 & i\lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^2 & -A_1A_2 \\ 0 & -A_1A_2 & A_1^2 \end{pmatrix}.$$

Затем мы вводим "одевающую" функцию

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{\Phi}_0^{-1}, \tag{10}$$

удовлетворяющую асимптотическим условиям:

$$\boldsymbol{\chi}(\lambda) \to \mathbf{E} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \qquad \text{при} \quad |\lambda| \to \infty, \tag{11}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ – постоянная матрица (независящая от λ), $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Из (7) находим, что функция $\boldsymbol{\chi}(x,t,\lambda)$ удовлетворяет редукции:

$$\boldsymbol{\chi}^\dagger(\lambda^*) = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\lambda). \tag{12}$$

Из (2), (3), (5), (6) получаем уравнения:

$$\boldsymbol{\chi}_x^{-1} = -\boldsymbol{\chi}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{U}_c\boldsymbol{\chi}^{-1}, \tag{13}$$
$$\boldsymbol{\chi}_t^{-1} = -\boldsymbol{\chi}^{-1}\mathbf{V} + \mathbf{V}_c\boldsymbol{\chi}^{-1}.$$

Затем, выбирая $\boldsymbol{\chi}$ так, чтобы матрицы U и V были мероморфны в λ-плоскости, получаем новое решение уравнений (2), (3). Подставляя разложение (11) в уравнение (13), получаем окончательную формулу для вычисления компонент $\psi_{1,2}$:

$$\psi_1 = A_1 + 2i\tilde{\chi}_{12}, \qquad \psi_2 = A_2 + 2i\tilde{\chi}_{13}. \tag{14}$$

Предположим, что функция $\boldsymbol{\chi}$ имеет единственный полюс $\lambda = \lambda_1$:

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{N}}{\lambda - \lambda_1}, \tag{15}$$

где $\mathbf{N}$ – постоянная матрица. Тогда из (12) получаем, что:

$$\boldsymbol{\chi}^{-1} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{N}^\dagger}{\lambda - \lambda_1^*}. \tag{16}$$

Из условия $\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\chi}^{-1} = \mathbf{E}$ находим:

$$\boldsymbol{\chi}(\lambda_1)\,\mathbf{N}^\dagger(\lambda_1) = 0. \tag{17}$$

Отсюда следует, что матрицы $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^\dagger$ вырождены и их можно выразить через трех-компонентные векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{N}_{\alpha\beta} = p_\alpha q_\beta, \qquad \mathbf{N}^\dagger = q_\alpha^* p_\beta^*, \qquad \alpha,\beta = 1,2,3.$$

Для устранения в выражении (13) лишнего полюса в точке $\lambda = \lambda_1^*$ мы должны наложить на вектор $\mathbf{q}(x,t)$ условие,

$$\partial_x \mathbf{q}^* - \mathbf{U}_c(x,t,\lambda_1^*)\mathbf{q}^* = 0.$$

Отсюда мы находим вектор $\mathbf{q}$ в виде

$$\mathbf{q}(x,t) = \boldsymbol{\Phi}_c^*(x,t,\lambda_1^*)\mathbf{C}, \tag{18}$$

где $\mathbf{C}$ – произвольный трех-компонентный комплексный вектор. Окончательно из (17) получаем вектор $\mathbf{p}$ в виде:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}^*}{|\mathbf{q}|^2}(\lambda_1 - \lambda_1^*).$$

Таким образом, однополюсная функция $\boldsymbol{\chi}(x,t,\lambda)$ (15) полностью определена. Используя формулу (14), получаем компоненты $\psi_{1,2}$ соответствующего (15) однополюсного решения системы Манакова (1) на фоне конденсата:

$$\psi_1 = A_1 + \frac{2\,i\,(\lambda - \lambda^*)\,q_1^* q_2}{|\mathbf{q}|^2}, \tag{19}$$
$$\psi_2 = A_2 + \frac{2\,i\,(\lambda - \lambda^*)\,q_1^* q_3}{|\mathbf{q}|^2}.$$

Данное решение параметризуется комплексным собственным числом λ и содержит произвольный комплексный трех-компонентный вектор $\mathbf{C} = (C_0, C_1, C_2)^T$ (здесь символ T означает транспонирование). Здесь и далее мы полагаем $\lambda_1 \equiv \lambda$. Мы используем обозначения

$$\zeta = \sqrt{\lambda^2 + A^2}, \qquad r = A/(\lambda + \zeta). \tag{20}$$

Компоненты вектора $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$, см. уравнение (18), можно записать в следующем виде:

$$q_1 = e^{-\varphi}C_1 + i\,re^{\varphi}\,C_2, \tag{21}$$
$$q_2 = \frac{1}{A}\big[-A_2e^{\varphi_0}C_0 + A_1\big(i\,re^{-\varphi}C_1 + e^{\varphi}C_2\big)\big],$$
$$q_3 = \frac{1}{A}\big[A_1e^{\varphi_0}C_0 + A_2\big(i\,re^{-\varphi}C_1 + e^{\varphi}C_2\big)\big],$$

где функции φ_0 и φ определяются так:

$$\varphi_0 = -i\,\lambda\,x + \frac{i}{2}\left(\lambda^2 + \zeta^2\right)t = u_0 - iv_0, \tag{22}$$
$$\varphi = -i\zeta\,x + i\,\lambda\,\zeta\,t = u - iv,$$

с помощью функций u, v, u_0, v_0:

$$u_0 = \mathrm{Im}[\lambda]x - \frac{1}{2}\mathrm{Im}[\lambda^2 + \zeta^2]t, \tag{23}$$
$$v_0 = \mathrm{Re}[\lambda]x - \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\lambda^2 + \zeta^2]t,$$
$$u = \mathrm{Im}[\zeta]x - \mathrm{Im}[\lambda\zeta]t,$$
$$v = \mathrm{Re}[\zeta]x - \mathrm{Re}[\lambda\zeta]t.$$

Здесь и далее, Re и Im означают вещественную и мнимую части комплексного числа.

Отметим, что преобразования

$$\mathbf{q}_n \to c\mathbf{q}_n, \tag{24}$$

где c – произвольная комплексная константа, не меняют решения (19). Это значит, что при произвольном выборе вектора $\mathbf{C}$ решение содержит четыре вещественных свободных параметра. Отметим также, что система Манакова имеет нетривиальные решения, только когда вектор $\mathbf{C}$ содержит по крайней мере две ненулевые компоненты. Далее мы обсудим физический смысл параметров решения (19) и различные возможности выбора вектора $\mathbf{C}$.

Бризеры типов I, II и III. В этом разделе мы исследуем простейшие пространственно локализованные бризеры системы Манакова. В работе [17] предложена классификация, согласно которой они названы бризерами типов I, II и III. Мы покажем, что все они описываются формулой (19) в случаях, когда одна из компонент вектора $\mathbf{C}$ обращается в нуль. Мы также используем следующую параметризацию для спектрального параметра λ и связанных с ним функций (детали см. в [26]):

$$\lambda = A\sinh(\xi + \mathrm{i}\,\alpha),$$
$$\zeta = A\cosh(\xi + \mathrm{i}\,\alpha),$$
$$r = e^{-\xi - \mathrm{i}\alpha}.$$

Мы начнем со случая $C_0 = 0$. Ему соответствует бризер типа I – простое векторное обобщение решения скалярного НУШ, в котором две компоненты системы Манакова не взаимодействуют и удовлетворяют соотношению

$$\psi_2 = (A_2/A_1)\psi_1. \tag{25}$$

Другими словами, каждая компонента волнового поля представляет хорошо известный бризер скалярного НУШ, см., например, [27]. Соотношение (24) показывает, что вектор $\mathbf{C}$ теперь содержит лишь один независимый комплексный параметр. Это позволяет записать его компоненты в виде:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = C_2^{-1} = e^{\mathrm{Im}[\zeta]\delta + i\theta/2}, \tag{26}$$

где δ и θ – вещественные параметры, определяющие положение центра бризера и его фазу. Исходя из общего решения (19), вещественную и мнимую части волнового поля для бризера типа I можно записать как:

$$\mathrm{Re}\,\psi^{\mathrm{I}}_{1,2} = A_{1,2} - \tag{27}$$
$$-\frac{2A_{1,2}\sin\alpha\,\cosh\xi\,[\cos(2v_{\mathrm{I}})\cosh\xi + \cosh(2u_{\mathrm{I}})\sin\alpha]}{\cosh\xi\,\cosh(2u_{\mathrm{I}}) + \sin\alpha\,\cos(2v_{\mathrm{I}})},$$
$$\mathrm{Im}\,\psi^{\mathrm{I}}_{1,2} =$$
$$= \frac{2A_{1,2}\,\sin\alpha\cosh\xi\,[\sinh(2u_{\mathrm{I}})\cos\alpha + \sin(2v_{\mathrm{I}})\sinh\xi]}{\cosh\xi\,\cosh(2u_{\mathrm{I}}) + \sin\alpha\,\cos(2v_{\mathrm{I}})},$$

где

$$u_{\mathrm{I}} = \frac{l_{\mathrm{I}}^{-1}(x - V_{\mathrm{I}}t - \delta)}{2}, \qquad v_{\mathrm{I}} = \frac{k_{\mathrm{I}}x - \omega_{\mathrm{I}}t + \theta}{2}, \tag{28}$$

содержат характерную ширину бризера l_{I}, его групповую скорость V_{I}, характерный волновой вектор k_{I} и характерную частоту ω_{I}:

$$l_{\mathrm{I}} = (2\mathrm{Im}[\zeta])^{-1} = (2A\sin\alpha\sinh\xi)^{-1},$$
$$V_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{Im}[\lambda\zeta]}{\mathrm{Im}[\zeta]} = \frac{A\cos\alpha\cosh 2\xi}{\sinh\xi},$$
$$k_{\mathrm{I}} = 2\mathrm{Re}[\zeta] = 2A\cos\alpha\cosh\xi,$$
$$\omega_{\mathrm{I}} = 2\mathrm{Re}[\lambda\zeta] = A^2\cos 2\alpha\sinh 2\xi. \tag{29}$$

Бризер типа I имеет асимптотики

$$\psi^{\mathrm{I}}_{1,2} \to A_{1,2}\,e^{\pm 2\,\mathrm{i}\,\alpha}; \qquad x \to \pm\infty, \tag{30}$$

так что полный сдвиг фазы постоянного фона составляет 4α. Рисунок 1 демонстрирует пример бризера типа I, движущегося с ненулевой скоростью. В этой

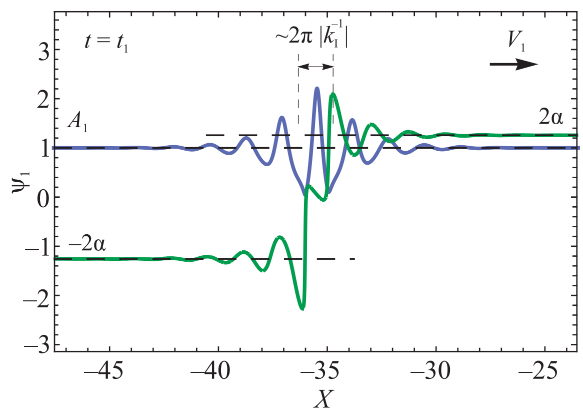

Рис. 1. (Цветной онлайн) $|\psi_1|$ (сплошная синия линия) и $\mathrm{Arg}[\psi_1]$ (штрихованная зеленая линия) для векторного бризера типа I, где Arg обозначает комплексную фазу. Параметры решения определены в (31). Горизонтальные черные штриховые линии отмечают асимптотики (30). Стрелка в верхнем углу рисунка показывает направление движения бризера. Компонента ψ_2 не показана, так как отличается от ψ_1 только масштабным преобразованием (25)

работе для иллюстраций мы всегда выбираем значения (выбор обусловлен наглядностью рисунков):

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2;$$
$$\alpha = \pi/5, \quad \xi = 1/4, \quad \theta = 0, \quad \delta = 0; \tag{31}$$
$$t_1 = -4.4, \quad t_2 = 4.5.$$

При $C_1 = 0$ мы получим другое нетривиальное решение системы Манакова, которое мы называем бризером типа II, опять же согласно классификации [17]. Записав компоненты $\mathbf{C}$ в виде

$$C_0 = e^{-\mathrm{Im}[\lambda]\delta + i\theta/2}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = e^{-\mathrm{Im}[\zeta]\delta - i\theta/2}, \tag{32}$$

из (19) получим:

$$\psi_1^{\mathrm{II}} = A_1 + \frac{4\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha\,\cosh\xi(A_1 - A_2 e^{u_{\mathrm{II}} - iv_{\mathrm{II}}})}{e^{2u_{\mathrm{II}}+\xi} + 2\cosh\xi},$$
$$\psi_2^{\mathrm{II}} = A_2 + \frac{4\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha\,\cosh\xi(A_2 + A_1 e^{u_{\mathrm{II}} - iv_{\mathrm{II}}})}{e^{2u_{\mathrm{II}}+\xi} + 2\cosh\xi}, \tag{33}$$

где

$$u_{\mathrm{II}} = \frac{l_{\mathrm{II}}^{-1}(x - V_{\mathrm{II}}t - \delta)}{2}, \quad v_{\mathrm{II}} = k_{\mathrm{II}}x - \omega_{\mathrm{II}}t - \theta. \tag{34}$$

Физические характеристики бризера типа II:

$$l_{\mathrm{II}} = (2(\mathrm{Im}[\lambda] - \mathrm{Im}[\zeta]))^{-1} = (2Ae^{-\xi}\sin\alpha)^{-1}, \tag{35}$$
$$V_{\mathrm{II}} = \frac{\mathrm{Im}[\lambda^2 + \zeta^2]/2 - \mathrm{Im}[\lambda\zeta]}{\mathrm{Im}[\lambda] - \mathrm{Im}[\zeta]} = -A\cos\alpha e^{-\xi},$$
$$k_{\mathrm{II}} = \mathrm{Re}[\lambda] - \mathrm{Re}[\zeta] = -A\cos\alpha\, e^{-\xi},$$
$$\omega_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}[\lambda^2 + \zeta^2] - \mathrm{Re}[\lambda\zeta] = \tfrac{A^2}{2}e^{-2\xi}\cos 2\alpha.$$

Бризер типа II имеет асимптотики:

$$\psi_{1,2}^{\mathrm{II}} \to A_{1,2}e^{2\,\mathrm{i}\,\alpha}; \qquad x \to -\infty, \tag{36}$$
$$\psi_{1,2}^{\mathrm{II}} \to A_{1,2}; \qquad x \to +\infty.$$

Рисунок 2 демонстрирует пример бризера типа II, движущегося с ненулевой скоростью.

При $C_2 = 0$ получаем бризер типа III. Записывая $\mathbf{C}$ в виде:

$$C_0 = e^{-\mathrm{Im}[\lambda]\delta - i\theta/2}, \tag{37}$$
$$\mathrm{i}rC_1 = e^{\mathrm{Im}[\zeta]\delta + i\theta/2}, \quad C_2 = 0,$$

из (19) находим:

$$\psi_1^{\mathrm{III}} = A_1 - 4\mathrm{i}\sin\alpha e^{-\mathrm{i}\alpha}\cosh\xi\frac{A_1 + A_2 e^{u_{\mathrm{III}} - \mathrm{i}v_{\mathrm{III}}}}{e^{2u_{\mathrm{III}}+\xi} + 2\cosh\xi}, \tag{38}$$
$$\psi_2^{\mathrm{III}} = A_2 - 4\mathrm{i}\sin\alpha e^{-\mathrm{i}\alpha}\cosh\xi\frac{A_2 - A_1 e^{u_{\mathrm{III}} - \mathrm{i}v_{\mathrm{III}}}}{e^{2u_{\mathrm{III}}+\xi} + 2\cosh\xi}, \tag{39}$$

где

$$u_{\mathrm{III}} = \frac{l_{\mathrm{III}}^{-1}(x - V_{\mathrm{III}}t - \delta)}{2}, \quad v_{\mathrm{III}} = k_{\mathrm{III}}x - \omega_{\mathrm{III}}t + \theta. \tag{40}$$

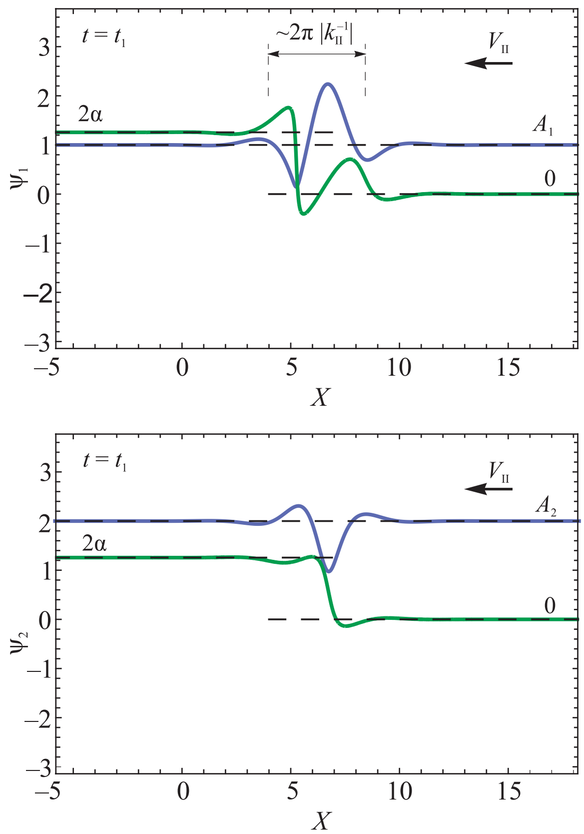

Рис. 2. (Цветной онлайн) $|\psi_{1,2}|$ (сплошная синяя линия) и $\mathrm{Arg}[\psi_{1,2}]$ (штрихованная зеленая линия) для векторного бризера типа II. Параметры решения определены в (31). Горизонтальными черными штриховыми линиями показаны асимптотики (36). Стрелка в верхнем углу рисунков указывает направление движения бризера

Физические характеристики бризера III:

$$l_{\mathrm{III}} = (2(\mathrm{Im}[\lambda] + \mathrm{Im}[\zeta]))^{-1} = (2Ae^{\xi}\sin\alpha)^{-1}, \tag{41}$$
$$V_{\mathrm{III}} = \frac{\mathrm{Im}[\lambda^2 + \zeta^2]/2 + \mathrm{Im}[\lambda\zeta]}{\mathrm{Im}[\lambda] + \mathrm{Im}[\zeta]} = Ae^{\xi}\cos\alpha,$$
$$k_{\mathrm{III}} = \mathrm{Re}[\lambda] + \mathrm{Re}[\zeta] = Ae^{\xi}\cos\alpha,$$
$$\omega_{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\lambda^2 + \zeta^2] + \mathrm{Re}[\lambda\zeta] = \frac{A^2}{2}e^{2\xi}\cos 2\alpha.$$

Бризер III имеет асимптотики:

$$\psi_{1,2}^{\mathrm{III}} \to A_{1,2}e^{-2\,\mathrm{i}\,\alpha}; \quad x \to -\infty, \tag{42}$$
$$\psi_{1,2}^{\mathrm{III}} \to A_{1,2}; \qquad x \to +\infty.$$

Рисунок 3 демонстрирует пример бризера типа III, движущегося с ненулевой скоростью. Частные случаи бризеров I, II и III с параметрами $\alpha = \pi/2$, $\xi > 0$ и $\alpha < \pi/2$, $\xi = 0$ требуют отдельного рассмотрения, которое в данной работе мы не приводим.

Резонансное взаимодействие векторных бризеров. Рассмотрим общее решение (19) в слу-

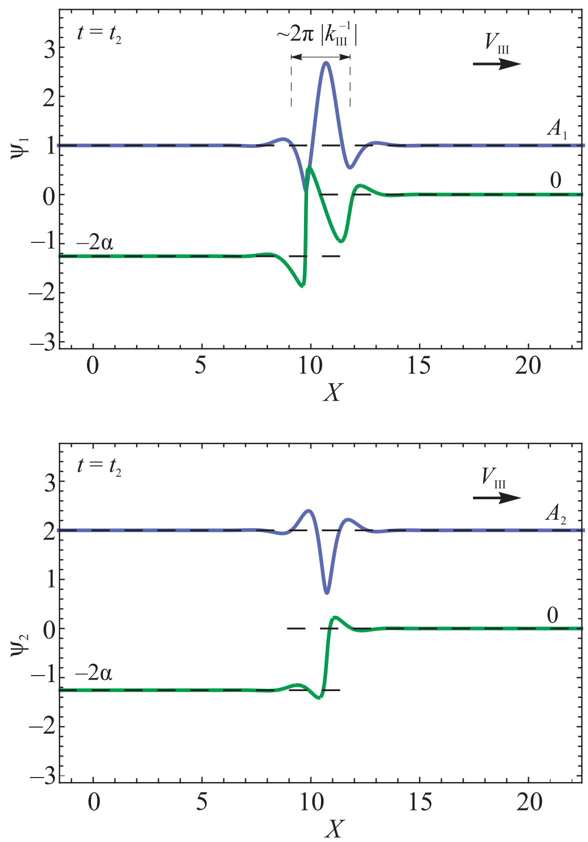

Рис. 3. (Цветной онлайн) Аналог рис. 2 для бризера типа III

чае, когда все константы C_0, C_1, C_2 отличны от нуля. Решение имеет асимптотики:

$$\psi_{1,2} \to A_{1,2} e^{-2\,\mathrm{i}\,\alpha}; \qquad x \to -\infty, \qquad (43)$$
$$\psi_{1,2} \to A_{1,2}; \qquad x \to +\infty.$$

Для определенности, положим $\alpha \in (0, \pi/2)$. Тогда решение (19) описывает слияние бризеров I и II в бризер III, см. рис. 4 и 5. Для подтверждения этого поочередно перейдем в системы отсчета:

$$u = \mathrm{const}, \qquad (44)$$
$$u_0 - u = \mathrm{const}, \qquad (45)$$

при $t \to -\infty$ и

$$u_0 + u = \mathrm{const} \qquad (46)$$

при $t \to \infty$. Напомним, что u и u_0 определены в (23).

Условия (44), (45) и (46) означают, что в выражениях (21) $e^{\varphi_0} \to 0$, $e^{-\varphi} \to 0$ и $e^{\varphi} \to 0$ соответственно. Тогда в каждой из указанных систем отсчета мы получим в точности бризерные решения (27), (33) и (39). Данное утверждение иллюстрируют приведенные ранее рис. 1–4, которые построены в оди-

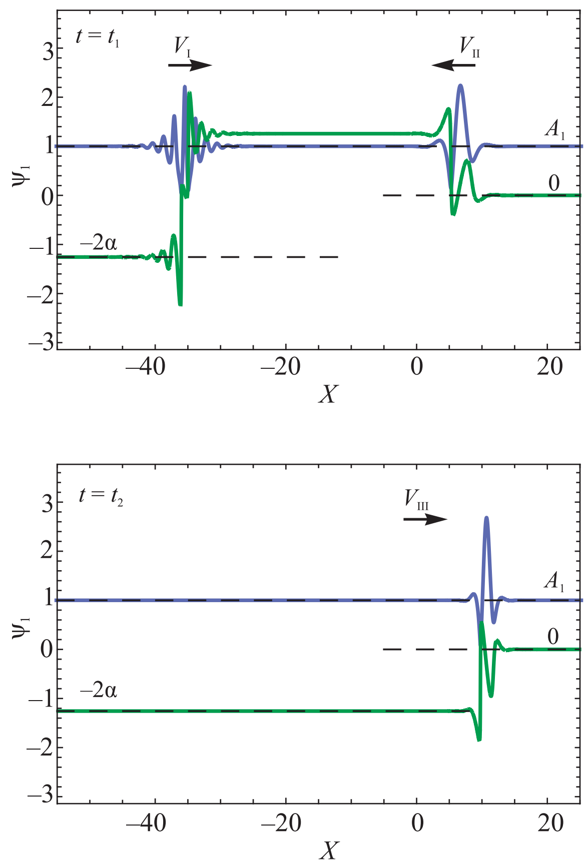

Рис. 4. (Цветной онлайн) Резонасное слияние векторных бризеров $\mathrm{I} + \mathrm{II} \to \mathrm{III}$ в моменты времени $t = t_1$ (верхний рисунок) и $t = t_2$ (нижний рисунок). Сплошная синяя линия демонстрирует $|\psi_1|$, а штрихованная зеленая линия – это $\mathrm{Arg}[\psi_1]$. Параметры решения определены в (31). Горизонтальными черными штриховыми линиями показаны асимптотики (43)

наковые моменты времени t_1 и t_2, что позволяет сопоставить асимптотические состояния резонансных бризеров (рис. 4) и одиночные бризеры (рис. 1, 2 и 3). Из явных выражений (29), (35) и (41) для волновых векторов и частот бризеров мы находим, что бризеры сливаются резонансным образом – так, что:

$$k_{\mathrm{I}} + k_{\mathrm{II}} = k_{\mathrm{III}}, \qquad (47)$$
$$\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{II}} = \omega_{\mathrm{III}}. \qquad (48)$$

Обсуждение и заключение. В данной работе мы показали, что векторные бризеры модели Манакова типов I, II и III могут участвовать в слиянии либо распаде так, что их волновые векторы и частоты удовлетворяют условиям резонанса. Мы полагаем, что аналогичный результат можно получить, исходя из двухполюсного решения системы Манакова. В таком случае, за каждый бризер типа I и II/III отвечает свое собственное число. При этом слияние

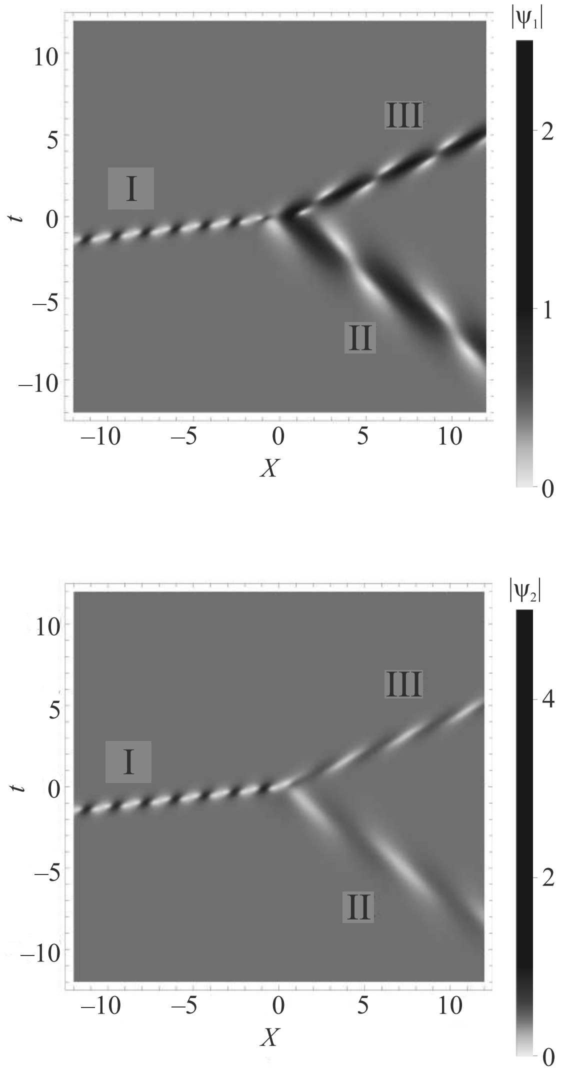

Рис. 5. Пространственно-временные портреты $|\psi_1|$ (верхний рисунок) и $|\psi_2|$ (нижний рисунок) для резонасного слияния векторных бризеров $\mathrm{I} + \mathrm{II} \to \mathrm{III}$

этих собственных чисел приводит к резонансному взаимодействию бризеров, аналогично случаю трехкомпонентных солитонов [18]. Подобное резонансное взаимодействие солитонов/бризеров обычно наблюдается в трех- (и более) компонентных системах без дисперсии, таких как модель трех волн [18, 19]. В нашем случае резонансное взаимодействие оказалось возможным в двух-компонентной системе с дисперсией благодаря наличию конденсата.

Мы полагаем, что полученный результат вносит ощутимый вклад в исследование векторных бризеров, особенно значимый ввиду недавнего прогресса в теоретическом и экспериментальном исследовании многокомпонентных моделей в гидродинамике и оптике [28–30].

Мы благодарны Е. А. Кузнецову за плодотворное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант # 19-72-30028).

1. Y. S. Kivshar and G. Agrawal, *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*, Academic Press, N.Y. (2003).
2. A. Osborne, *Nonlinear ocean waves*, Academic Press, N.Y. (2010).
3. A. Maimistov and A. Basharov, *Nonlinear optical waves*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1999).
4. S. V. Manakov, Sov. Phys. JETP **38**(2), 248 (1974).
5. S. Novikov, S. Manakov, L. Pitaevskii, and V. Zakharov, *Theory of solitons: the inverse scattering method*, Springer Science & Business Media, N.Y. (1984).
6. M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A. D. Trubatch, Inverse Problems **20**, 1217 (2004).
7. E. A. Kuznetsov, Sov. Phys. Dokl. **22**, 507 (1977).
8. N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin, Sov. Phys. JETP **62**(5), 894 (1985).
9. D. H. Peregrine, J. Austral. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math. **25**(1), 16 (1983).
10. M. Tajiri and Y. Watanabe, Phys. Rev. E **57**(3), 3510 (1998).
11. N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, and A. Ankiewicz, Phys. Rev. A **80**(4), 043818 (2009).
12. V. E. Zakharov and A. A. Gelash, Phys. Rev. Lett. **111**(5), 054101 (2013).
13. B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, G. Genty, B. Wetzel, N. Akhmediev, F. Dias, and J. M. Dudley, Sci. Rep. **2**, 463 (2012).
14. A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev, Phys. Rev. X **2**(1), 011015 (2012).
15. B. Kibler, A. Chabchoub, A. Gelash, N. Akhmediev, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. X **5**(4), 041026 (2015).
16. N. V. Priya, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan, Phys. Rev. E **88**(2), 022918 (2013).
17. D. Kraus, G. Biondini, and G. Kovačič, Nonlinearity **28**(9), 3101 (2015).
18. V. Zakharov and S. Manakov, Sov. Phys. JETP **42**, 842 (1976).
19. D. J. Kaup, Stud. Appl. Math. **55**(1), 9 (1976).
20. V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov, JETP Lett. **27**(1), 42 (1978).
21. F. Baronio, A. Degasperis, M. Conforti, and S. Wabnitz, Phys. Rev. Lett. **109**(4), 044102 (2012).
22. L.-C. Zhao and J. Liu, JOSA B **29**(11), 3119 (2012).
23. V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov, Sov. Phys. JETP **47**(6), 1017 (1978).
24. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux transformations and solitons*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
25. N. N. Akhmediev and N. V. Mitzkevich, IEEE J. Quantum Electron. **27**(3), 849 (1991).

26. A. Gelash and V. E. Zakharov, Nonlinearity **27**(4), R1 (2014).
27. C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean, Observation, Theories and Modeling*, Springer, Heidelberg (2009).
28. A. Chabchoub, K. Mozumi, N. Hoffmann, A. V. Babanin, A. Toffoli, J. N. Steer, T. S. van den Bremer, N. Akhmediev, M. Onorato, and T. Waseda, PNAS **116**(20), 9759 (2019).
29. A. I. Dyachenko, Stud. in Appl. Math. **144**(4), 493 (2020).
30. B. Frisquet, B. Kibler, J. Fatome, P. Morin, F. Baronio, M. Conforti, G. Millot, and S. Wabnitz, Phys. Rev. A **92**(5), 053854 (2015).