Теория голоморфных отображений двумерных комплексных многообразий в торические многообразия и теория мультиструн типа A

О. С. Чекерес[a1)], *А. С. Лосев*[b,c,d1)], *П. Н. Мнев*[e,f1)], *Д. Р. Юманс*[g1)]

[a] *University of Connecticut, Department of Mathematics, Storrs, CT 06269, USA*

[b] *Wu Wen-Tsun Key Lab of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, USTC, Hefei, 230026, Anhui, P.R.China*

[c] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"*
Лаборатория зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, 119048 Москва, Россия

[d] *Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН), 117218 Москва, Россия*

[e] *University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA*

[f] *Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 191023 С.-Петербург, Россия*

[g] *Albert Einstein Center for Fundamental Physics, Institute for Theoretical Physics, University of Bern, 3012 Bern, Switzerland*

Поступила в редакцию 13 ноября 2021 г.
После переработки 19 ноября 2021 г.
Принята к публикации 20 ноября 2021 г.

Мы изучаем обобщение A-модели – теорию поля, локализующуюся на голоморфные отображения комплексных многообразий размерности 2 в торический таргет. Поля модели – отображения в $(\mathbb{C}^*)^N$, и мы вставляем специальные наблюдаемые на вещественно-двумерных подмногообразиях типа (1, 1). Эти наблюдаемые эффективно описывают отображения на торическую компактификацию. Мы также строим зеркально двойственную модель. Оказывается, что это свободная теория, взаимодействующая с N_{comp} топологическими струнами типа A. Здесь N_{comp} – число компактифицирующих дивизоров торического таргета. До зеркального преобразования эти струны являются вихревыми (более точно, голомортексными) струнами.

DOI: 10.31857/S1234567822010104

1. Введение. Цель данной работы – обобщить на комплексную размерность 2 теорию голоморфных отображений римановых поверхностей в торические многообразия (как аналог теории Громова–Виттена или инстантонной теории). Эта работа – первый шаг в построении 4-мерной квантовой теории поля голоморфных отображений комплексных поверхностей в комплексные многообразия, которая будет предметом будущей статьи.

Здесь мы рассмотрим случай торических таргетов и воспользуемся методом [1]. В этом подходе мы сможем описать модель через теорию свободного поля, и тем не менее обнаружить интересные явления. В частности, мы увидим, что соответствующая 4-мерная теория является калибровочной теорией и что конструкция зеркальной симметрии A-I-B [1] дает мультиструнную версию теории топологических струн типа A.

Мы начнем с краткого обзора основной конструкции [1], затем покажем, как она обобщается на случай комплексной размерности 2, обсудим новые явления и укажем интересные направления дальнейшего развития.

2. Краткий обзор зеркальной симметрии A-I-B. В работе [1] Френкель и Лосев исследовали голоморфные отображения римановой поверхности в торическое многообразие (в качестве примера мы возьмем таргет $\mathbb{C}P^1$). Торическая структура на $\mathbb{C}P^1$ позволяет рассматривать его как $\mathbb{C}^*$, компактифицированное двумя точками (дивизорами), которые мы будем называть 0 и ∞. Естественная линейная структура на $\mathbb{C}^* \overset{\log}{\simeq} \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ позволяет ввести вещественные координаты R и Φ, принимающие значения в $\mathbb{R}$ и S^1 соответственно. Комплексная (логарифмическая) координата на таргете рав-

1) e-mail: olga.chekeres@uconn.edu; aslosev2@yandex.ru; pmnev@nd.edu; youmans@itp.unibe.ch

на $Z = R + i\Phi$. Основная идея работы [1] состоит в том, чтобы рассматривать каждое голоморфное отображение в $\mathbb{C}P^1$ как голоморфное отображение из $\Sigma - \{P_{0,1}, P_{\infty,1}, \ldots, P_{0,d}, P_{\infty,d}\}$ в $\mathbb{C}^*$, где Σ – риманова поверхность (для простоты мы возьмем $\Sigma = \mathbb{C}P^1$). Множество $\{P_{0,1}, \ldots, P_{0,d}\}$ – это прообраз дивизора 0 на $\mathbb{C}P^1$ и множество $\{P_{\infty,1}, \ldots, P_{\infty,d}\}$ – это прообраз дивизора ∞. В этом случае степень отображения равна d. Функциональный интеграл содержит интегрирование по конфигурационному пространству набора $2d$ точек $\{P_{0,1}, \ldots, P_{\infty,d}\}$ в римановой поверхности Σ (точки могут сталкиваться)[2)] Теперь мы можем написать представитель Матаи–Квиллена для голоморфных отображений в $\mathbb{C}^*$ и добавить специальные наблюдаемые $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_\infty$ (так называемые *голомортексы*) в точках прообраза, которые приводят к голоморфному отображению в рассмотренную выше компактификацию. Действие модели:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma p\bar{\partial} Z - \bar{p}\partial \bar{Z} - \pi \bar{\partial}\psi + \bar{\pi}\partial\bar{\psi}. \qquad (1)$$

Здесь p – $(1,0)$-форма и $\bar{p}$ – $(0,1)$-форма; p и $\bar{p}$ – множители Лагранжа для уравнений голоморфности. Фермионы ψ и $\bar{\psi}$ – это суперпартнеры координат Z и $\bar{Z}$, а фермионы π и $\bar{\pi}$ – суперпартнеры множителей Лагранжа. Интегральное представление для дельта-формы на голоморфных отображениях имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\delta(\text{hol maps } \Sigma \to \mathbb{C}P^1 \text{ of degree } d) = \\ &= \int_{\Sigma^{2d} \ni (P_{0,1}, \ldots P_{\infty,d})} \int \mathcal{D}p\, \mathcal{D}\bar{p}\, \mathcal{D}\pi\, \mathcal{D}\bar{\pi}\, e^{-S} \times \\ &\times \prod_{k=1}^{D} \mathcal{O}_0(P_{0,k}) \mathcal{O}_\infty(P_{\infty,k}). \end{aligned} \qquad (2)$$

Заметим, что бозонная часть действия также может быть переписана как

$$S_{\text{bos}} = \frac{i}{2\pi} \int_\Sigma -P d\Phi + P * dR. \qquad (3)$$

Здесь $P = p + \bar{p}$.

Возьмем набор каких-нибудь кривых γ_i, соединяющих точки $P_{0,i}$ и $P_{\infty,i}$, и вставим в функциональный интеграл выражение

$$\exp \sum_k i \int_{\gamma_k} P. \qquad (4)$$

[2)] Когда род Σ равен нулю, положения прообразов не ограничены, в противном случае они находятся в ядре отображения Абеля–Якоби. В этой статье для простоты мы рассмотрим случай односвязного Σ.

Простое вычисление показывает, что в присутствии такой наблюдаемой классическое решение имеет вид

$$Z = \log \prod_{k=1}^{d} \frac{(z - P_{0,k})}{(z - P_{\infty,k})} + C. \qquad (5)$$

Это – голоморфное отображение $\mathbb{C}P^1$ в $\mathbb{C}P^1$ степени d.

Теперь мы опишем зеркальное преобразование. Интегрируя по Φ (для простоты мы предполагаем, что функциональный интеграл не содержит наблюдаемых, зависящих от Φ, т.е. все наблюдаемые являются $U(1)$-инвариантными), мы получаем

$$dP = 0, \qquad (6)$$

откуда следует (для $\Sigma = \mathbb{C}P^1$)

$$P = dY. \qquad (7)$$

Это определяет зеркальную координату Y, принимающую значения в окружности[3)]. Случай Σ старшего рода будет обсуждаться в другой статье.

Наблюдаемые $\exp \sum_k i \int_{\gamma_k} P$, которые выглядели нелокальными, становятся произведениями локальных наблюдаемых

$$\exp \sum_k i \int_{\gamma_k} P = \prod_{k=1}^{d} \exp\big(-iY(P_{0,k})\big) \exp\big(iY(P_{\infty,k})\big). \qquad (8)$$

Бозонная часть действия имеет вид $\frac{i}{2\pi} \int dY * dR$, и интегрирование по положениям прообразов превращается в деформацию теории суперпотенциалом $\exp(iY) + \exp(-iY)$, см. подробности в работе [1].

Обобщение на общие торические многообразия почти очевидно. $\mathbb{C}^*$ обобщается на $(\mathbb{C}^*)^N$ с координатами R^a, Φ^a, $a = 1, \ldots, N$. Компактифицирующие дивизоры задаются N-мерными целочисленными векторами $\mathbf{D}_\beta$ (здесь β – индекс, нумерующий компактифицирующие дивизоры $\{D_\beta\}$); в приведенном выше примере $N = 1$, $D_1 = 0$ с $\mathbf{D}_1 = +1$ и $D_2 = \infty$ с $\mathbf{D}_2 = -1$. Зеркальный суперпотенциал равен $\sum_\beta \exp \sum_{a=1}^{N} D_\beta^a Y_a$.

3. Обобщение на комплексные поверхности. Из предыдущего ясно, как модифицировать теорию на случай голоморфных отображений ϕ комплексной поверхности X_4 (индекс 4 – вещественная размерность) в торическое многообразие. Мы вырежем из

[3)] Наблюдаемая, зависящая от Φ, например $e^{i\Phi}$, становится вихрем для поля Y в зеркальной теории.

поверхности прообразы компактифицирующих дивизоров $\phi^{-1}D_\beta$ (голоморфные кривые в X_4) и на дополнении получим теорию голоморфных отображений в $(\mathbb{C}^*)^N$. Ниже мы рассмотрим случай $N = 1$; случай общего торического таргета будет приведен в формуле (17).

Аналогично (1) мы можем написать представитель Матаи–Квиллена для дельта-формы на голоморфных отображениях:

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int_{X_4} p\bar{\partial}Z - \bar{p}\partial\bar{Z} - \pi\bar{\partial}\psi + \bar{\pi}\partial\bar{\psi}. \qquad (9)$$

Здесь p – (2,1)-форма на X_4, а $\bar{p}$ – (1,2)-форма. Аналогично, мы вводим 3-форму $P = p + \bar{p}$.

Тут возникает новое явление: эта теория обладает калибровочной симметрией (такая симметрия известна в многомерной теории кирального поля, см. работу [2])

$$p \to p + \bar{\partial}\nu, \quad \bar{p} \to \bar{p} + \partial\bar{\nu}. \qquad (10)$$

Здесь ν и $\bar{\nu}$ – (2,0)- и (0,2)-формы на X_4 соответственно; для фермионов есть аналогичная калибровочная симметрия.

Геометрически эта симметрия в нашем случае соответствует сизигиям уравнений голоморфности, поэтому можно было бы предположить, что в теории в два раза больше уравнений, чем переменных. Поэтому на первый взгляд для почти комплексных многообразий виртуальная размерность пространства псевдоголоморфных отображений равна $-\infty$. Однако, в случае интегрируемых комплексных структур на X_4 и на таргете, уравнения голоморфности линейно зависимы, и эта зависимость приводит к сизигиям, которые мы рассматриваем как калибровочную симметрию для лагранжевых множителей. Мы обсудим представитель Матаи–Квиллена в присутствии сизигий в будущей работе.

Используя линейную структуру на таргете, мы можем зафиксировать калибровочную симметрию стандартным способом – например, наложить калибровку Лоренца, используя кэлерову метрику на X_4.

Теперь, обобщая 1-мерный случай, мы добавляем нелокальную наблюдаемую

$$\exp\left(i\int_{\Gamma_3} P\right), \qquad (11)$$

где Γ_3 – 3-многообразие, такое, что его граница – набор голоморфных кривых в X_4. Заметим, что тип границы диктуется калибровочной инвариантностью наблюдаемой – при калибровочном преобразовании (10) наблюдаемая умножается на

$$\exp\left(i\int_{\partial\Gamma_3} (\nu + \bar{\nu})\right). \qquad (12)$$

Этот множитель равен 1, если граница Γ_3 имеет тип $(1,1)$ (т.е. касательная плоскость к границе имеет тип $(1,1)$ в касательном пространстве к X_4).

Более точно, Γ_3 может быть 3-цепью на X_4 с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, с границей $\partial\Gamma_3 = \Sigma_{(0)} - \Sigma_{(\infty)}$, где $\Sigma_{(0)}$, $\Sigma_{(\infty)}$ – $(1,1)$-циклы с положительными целочисленными коэффициентами.

Можно проверить, что классическое решение Z оказывается голоморфным отображением комплексной поверхности X_4 в $\mathbb{C}P^1$.

Далее, мы можем построить зеркальное преобразование. Действительно, интегрируя по Φ, мы получаем

$$dP = 0. \qquad (13)$$

Если у X_4 нет третьих когомологий, это означает, что

$$P = d\Omega, \qquad (14)$$

где Ω – 2-форма. Таким образом, наблюдаемая принимает вид

$$\exp\left(-\int_{\Sigma_{(0)}} \Omega\right)\exp\left(\int_{\Sigma_{(\infty)}} \Omega\right).$$

Бозонная часть действия становится равной

$$\frac{1}{\pi}\int_{X_4} \Omega\partial\bar{\partial}R. \qquad (15)$$

Из уравнений движения для R мы видим, что R является вещественной частью голоморфной функции.

Заметим, что здесь бозонные калибровочные степени свободы соответствуют $(2,0)$- и $(0,2)$-компонентам Ω, которые не участвуют в действии. Отметим, что в бозонном секторе возникает новая калибровочная симметрия

$$\Omega \to \Omega + d\Lambda. \qquad (16)$$

Мы описали случай $N = 1$. Для общего N, поле Ω взаимодействует с прообразами компактифицирующих дивизоров через наблюдаемые

$$\prod_\beta \exp\left(\int_{\Sigma_\beta}\sum_{a=1}^{N} D^a_\beta\, \Omega_a\right), \qquad (17)$$

где $\mathbf{D}_\beta$ снова понимаются как векторы в $\mathbb{Z}^N$; Σ_β – $(1,1)$-цикл на X_4 – прообраз дивизора D_β.

Примечание 1. Если $H^{1,1}(X_4) \neq 0$, т.е. другая глобальная симметрия, заданная сдвигом на элемент когомологий:

$$\Omega \to \Omega + \omega^{(1,1)}, \qquad \omega^{(1,1)} \in H^{1,1}(X_4). \tag{18}$$

Эта симметрия приводит к следующему правилу отбора: коррелятор, включающий наблюдаемую (17), может быть отличен от нуля только если

$$\sum_\beta \mathbf{D}_\beta \, [\Sigma_\beta] = 0 \quad \in \quad H_2(X_4) \otimes \mathbb{Z}^N. \tag{19}$$

4. Взгляд на новую теорию с высоты птичьего полета.

1. Мы построили теорию голоморфных отображений односвязных $2_{\mathbb{C}}$-мерных комплексных многообразий в торические многообразия как квантовую теорию поля.

2. Эта конструкция свидетельствует о существовании теории голоморфных отображений между комплексными многообразиями во всех измерениях. Мы построим такую теорию для отображений из $2_{\mathbb{C}}$-мерного комплексного многообразия в следующей работе. Эта теория будет обобщением двумерной BF теории, а именно теории

$$\int p\bar{\partial}X + \text{c.c.} + \text{fermions}$$

с калибровочной симметрией $p \to p + \bar{D}\epsilon$.

Это обобщение двоякое: с одной стороны $\int BdA$ рассматривается как $\int AdB$ – представитель Матаи–Квиллена дельта-формы на постоянных отображениях, где калибровочная симметрия происходит из сизигий уравнений ($\int d\epsilon \, dB = 0$). Мы также объясним обобщение плоской суперсимметричной теории BF на общие искривленные таргеты[4)].

С другой стороны в комплексной размерности 2 внешняя производная d заменяется оператором Дольбо $\bar{\partial}$.

Предположим, что X_4 является многообразием Калаби–Яу с формой Калаби–Яу ω_{CY}. Тогда мы можем ввести новые переменные

$$\begin{gathered} p = \omega_{\text{CY}}\bar{A}, \;\; \pi = \omega_{\text{CY}}\psi_{\text{DW}}, \\ \nu = \omega_{\text{CY}}\epsilon_{\text{Maxwell}}, \;\; H = \omega_{\text{CY}}Z, \;\; \lambda = \omega_{\text{CY}}\psi. \end{gathered} \tag{20}$$

[4)] Абелева BF с искривленным таргетом, она же пуассонова сигма-модель с нулевым пуассоновым бивектором, была изучена с точки зрения формальной геометрии таргета, [3]. Похоже, что для суперсимметричной сигма-модели Пуассона можно использовать более простой подход. Аналог такого упрощения в контексте инстантонных теорий см. в [4]. С другой стороны, несуперсимметричная искривленная $\beta\gamma$-система требует подхода формальной геометрии, см. [5]; см. также [6–8].

Действие принимает вид

$$\int H\bar{\partial}\bar{A} + \lambda\bar{\partial}\psi_{\text{DW}}, \tag{21}$$

что соответствует представителю Матаи–Квиллена для абелевой теории Дональдсона–Виттена голоморфных расслоений по модулю комплексной калибровочной группы. Эта теория эквивалентна (на кэлеровых многообразиях) теории самодуальных связностей по модулю компактной группы[5)].

Однако, несмотря на то, что теории одинаковы, их Q-дифференциалы разные. Дифференциал Q_{HM} теории голоморфных отображений действует как

$$Q_{\text{HM}}(Z) = \psi, \;\; Q_{\text{HM}}(\pi) = p. \tag{22}$$

В то же время дифференциал теории Дональдсона–Виттена действует противоположным образом:

$$Q_{\text{DW}}\bar{A} = \psi_{\text{DW}}, \;\; Q_{\text{DW}}\lambda = H, \tag{23}$$

потому что в теории голоморфных отображений Z – поле и p – множитель Лагранжа, в то время как в теории Дональдсона–Виттена $\bar{A}$ (пропорциональное p) является полем и H (пропорциональное Z) – множителем Лагранжа.

Мы ожидаем увидеть аналогичную ситуацию в суперсимметричной пуассоновой сигма-модели в вещественной размерности 2.

Поскольку теория Дональдсона–Виттена может быть обобщена на неабелев случай, а теория голоморфных отображений в свою очередь может быть обобщена на неторические таргеты, мы предполагаем существование универсальной обобщенной калибровочной теории, которая содержит теорию Дональдсона–Виттена и теорию голоморфных отображений в качестве специальных пределов. Мы ожидаем, что такая теория будет содержать два дифференциала – один, обобщающий дифференциал Дональдсона–Виттена, и другой, обобщающий дифференциал де Рама теории голоморфных отображений.

Мы ожидаем, что двумерный аналог такой теории – суперсимметричная пуассонова сигма-модель, которую мы изучим в отдельной статье.

3. Для торических таргетов мы построили аналог зеркальной теории, в которой газ точек (приводящий к суперпотенциалу) заменяется мультиструнной теорией.

[5)] Наблюдение, что 4-мерная голоморфная теория BF с полями материи связана с теорией голоморфных отображений в торический таргет, было сделано в [9] (с. 10).

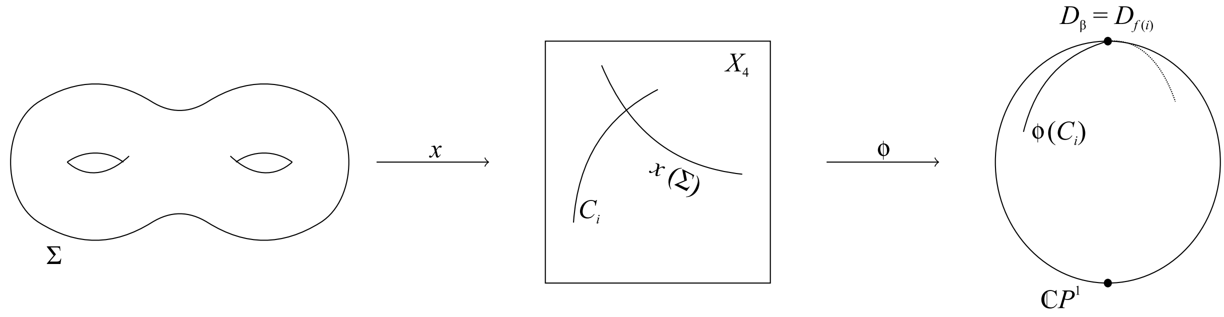

Рис. 1. Голоморфное отображение ϕ параметризуется прообразами компактифицирующих дивизоров, которые в свою очередь являются струнами – образами римановых поверхностей в X_4

Более точно, голоморфные отображения из X_4 в торическое многообразие $\mathcal{T}$ реализуются $N_{\rm comp}$ типами топологических струн типа A с таргетом X_4. Здесь $N_{\rm comp}$ – число компактифицирующих дивизоров в $\mathcal{T}$.

Кроме того, рассмотрим естественные наблюдаемые вычисления в теории голоморфных отображений $\phi\colon X_4 \to \mathcal{T}$, $\int_C \mathcal{O}^{(\dim C)}_{D_\beta}$, где C – цикл в X_4. А именно, рассмотрим отображение $f\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,N_{\rm comp}\}$, отправляющее $i \mapsto \beta = f(i)$, и рассмотрим коррелятор

$$\left\langle \prod_{i=1}^{k} \int_{C_i} \mathcal{O}^{(\dim C_i)}_{D_{f(i)}} \mathcal{O}^{(0)}_{p_\mathcal{T}}(p_{X_4}) \right\rangle$$

– это количество отображений ϕ, таких, что $\phi(C_i)$ пересекает $D_{f(i)}$ для всех i и таких, что $\phi(p_{X_4}) = p_\mathcal{T}$ (здесь $p_{X_4}, p_\mathcal{T}$ – отмеченные точки в X_4 и $\mathcal{T}$; это условие фиксирует действие $(\mathbb{C}^*)^N$ на пространстве голоморфных отображений, соответствующих множеству заданных прообразов компактифицирующих дивизоров, ср. сдвиг на константу в (5)).

Для каждого β рассмотрим коррелятор типа A в теории отображений $\Sigma \to X_4$, $n_\beta = \left\langle \prod_{i\in f^{-1}(\beta)} \int_\Sigma \mathcal{O}^{(2)}_{C_i} \right\rangle$ – число голоморфных отображений, проходящих через циклы C_i, с $f(i) = \beta$. В n_β мы также интегрируем по комплексным структурам на Σ и суммируем по топологическим типам Σ (возможно, несвязным, со связными компонентами любого рода).

Связь между теорией голоморфных отображений $X_4 \to \mathcal{T}$ и теорией отображений $\Sigma \to X_4$ схематически дается соотношением

$$\left\langle \prod_{i=1}^{k} \int_{C_i} \mathcal{O}^{(\dim C_i)}_{D_{f(i)}} \mathcal{O}^{(0)}_{p_\mathcal{T}}(p_{X_4}) \right\rangle = \prod_{\beta=1}^{N_{\rm comp}} n_\beta. \qquad (24)$$

В некотором смысле теория голоморфных отображений $X_4 \to \mathcal{T}$ выглядит как вторично квантованная теория поля для $N_{\rm comp}$ типов струн, см. рис. 1. Мы планируем изучить это неожиданное явление в будущем.

4. Возникает соблазн сделать следующее предположение. Зеркальная теория – это теория нескольких типов струн, взаимодействующих с теорией свободного поля. Это аналогично компактификациям M-теории, которые можно рассматривать как лагранжевы теории поля, взаимодействующие с набором протяженных объектов. Хотелось бы – но неизвестно как – понять компактификации M-теории как теорию поля в смысле Сигала. Теория, которую мы рассматриваем, по-видимому, представляет собой гораздо более простой пример этого явления. Можно пойти еще дальше. Среди подобных примеров, моделирующих M-теорию, – инстантонные струны (инстантоны существуют в коразмерности 4) в 6-мерных калибровочных теориях. Интересно, что такие струны можно рассматривать как фундаментальные струны, связанные на 6-мерной NS5-бране в теории типа IIB (отсюда название "маленькие струны" в работе [10]). В последнее время в литературе изучались вихревые струны. Поскольку вихри имеют коразмерность 2, они существуют в 4-мерных теориях, и есть веские аргументы в пользу того, что они также являются связанными состояниями фундаментальных струн [11, 12]. Струны, которые мы рассматриваем, также являются вихревыми струнами (в [1] соответствующий объект назывался "голомортекс") и, по-видимому, являются топологическим сектором "маленьких струн" Шифмана–Юнга. Мы планируем изучить это явление в ближайшем будущем.

5. Очень интересно изучить тропикализацию [13, 14] построенной теории. Тропикализация не только позволяет производить вычисления и превращает алгебраическую геометрию в комбинаторику – тропикализация теории струн к тому же является теорией поля. Таким образом, после тропикализации 4-мерная теория со струнами становится 2-

мерной теорией с частицами, которые могут быть поняты как диаграммы Фейнмана в обычной 2-мерной теории, несмотря на то, что они не являются Лоренц-инвариантными. Мы планируем изучить такую тропикализацию в другой статье. Тропикализация может дать аналог теории Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде (Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde – WDVV) в старшей размерности. Тропикализация теории на торическом многообразии – это теория поля на его многограннике моментов. В частности, в случае отображений из многообразия комплексной размерности 2, мы получим теорию поля на выпуклом многоугольнике. Диаграммы Фейнмана будут представлять собой тропические кривые – специальные графы с прямыми ребрами. Суммирование по этим графам позволит заменить тропические струны функциональным интегралом по дополнительному полю – это аналог непертурбативного суммирования инстантонов в комплексной размерности 1. Теория такого типа была построена в [15].

6. Из обсуждения выше ясно, что можно рассматривать и голоморфные отображения из многообразия комлексной размерности больше 2. Однако это может быть технически сложнее. Например, в тропикализации графы с прямыми ребрами заменяются полиэдральными комплексами. Поэтому мы ограничиваемся комплексным измерением 2.

7. Примечание A. На самом деле мы имеем дело не с голоморфными отображениями, а скорее с голоморфными квазиотображениями Дринфельда (так как, например, для таргета $\mathbb{C}P^1$ допускается пересечение прообразов $\{0\}$ и $\{\infty\}$).

Примечание B. Ситуация усложняется, когда X_4 неодносвязно. В частности, формулы (7) и (14) имеют поправки, возникающие из-за 1-й и 3-й когомологий X_4. Мы изучим это явление в ближайшем будущем.

8. Голоморфные квазиотображения между двумя торическими многообразиями любой размерности можно эффективно описать, и можно построить аналог теории Гивенталя–Некрасова [16, 17]. Это дает другой возможный подход к теории WDVV в старшей размерности.

Авторы облагодарны Антону Алексееву за плодотворные дискуссии.

Работа А. С. Лосева финансировалась в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Проведение фундаментальных научных исследований (47 ГП) по теме # FNEF-2021-0007 “Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления. 0580-2021-0007”, Рег. # 121031300051-3). Работа Д. Р. Юманса выполнена при поддержке гранта NCCR SwissMAP Швейцарского Национального Научного Фонда.

1. E. Frenkel and A. S. Losev, Commun. Math. Phys. **269**(1), 39 (2007).
2. A. Losev, G. Moore, N. Nekrasov, and S. Shatashvili, Nucl. Phys. B **484**(1–2), 196 (1997).
3. F. Bonechi, A. Cattaneo, and P. Mnev, JHEP **2012**(1), 1 (2012).
4. E. Frenkel, A. S. Losev, and N. Nekrasov, arXiv preprint hep-th/0803.3302.
5. V. Gorbounov, O. Gwilliam, and B. Williams, arXiv preprint arXiv:1610.09657 (2016).
6. N. Nekrasov, arXiv preprint hep-th/0511008 (2005).
7. M. V. Movshev, arXiv preprint arXiv:1602.04673 (2016).
8. V. Gorbounov, F. Malikov, and V. Schekhtman, arXiv:math.AG/0008154 (2000).
9. C. Elliott, P. Safronov, and B. Williams, arXiv:2002.10517 [math-ph].
10. A. Losev, G. Moore, and S. Shatashvili, Nucl. Phys. B **522**(1–2), 105 (1998).
11. A. Hanany and D. Tong, JHEP **07**, 037 (2003).
12. M. Shifman and A. Yung, Phys. Rev. D **96**, 046009 (2017).
13. М. Э. Казарян, *Тропическая геометрия*, МЦНМО (2012).
14. G. Mikhalkin, JAMS **18**(2), 313 (2005).
15. A. Losev and S. Shadrin, Commun. Math. Phys. **271**(3), 649 (2007).
16. A. Givental, arXiv preprint alg-geom/9603021 (1996).
17. N. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 831 (2003).