Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 3, с. 197 – 204

Взаимодействие двух заряженных диэлектрических шаров с сильно отличающимися радиусами

А. В. Филиппов[1)]

Государственный научный центр РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований, 108840 Троицк, Москва, Россия

Объединенный институт высоких температур РАН, 125412 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 ноября 2021 г.
После переработки 2 декабря 2021 г.
Принята к публикации 16 декабря 2021 г.

Рассмотрено взаимодействие двух заряженных диэлектрических шаров на малых расстояниях между их поверхностями в случае, когда радиус одного из них много больше радиуса второго. Впервые найдены аналитические решения для коэффициентов разложения потенциала для больших мультипольных моментов. Получены точные аналитические выражения для силы взаимодействия в методе разложения потенциала в бисферической системе координат в случае совпадения диэлектрической проницаемости одного из шаров с диэлектрической проницаемостью среды, в которой находятся шары. Выполнен переход к случаю бесконечного радиуса шара с диэлектрической проницаемостью, отличной от диэлектрической проницаемости среды. Показано, что эти решения совпадают с известными решениями задач о взаимодействии точечного заряда с диэлектрическим шаром и с плоской заряженной границей диэлектриков. Выполнен переход к бесконечному радиусу одного из шаров в случае, когда диэлектрические проницаемости обоих шаров отличны от диэлектрической проницаемости среды и впервые найдено аналитическое решение задачи о взаимодействии заряженного диэлектрического шара с плоской заряженной границей однородных диэлектриков.

DOI: 10.31857/S1234567822030107

1. Введение. Точное описание взаимодействия двух заряженных диэлектрических шаров с сильно отличающимися радиусами является актуальной задачей в связи с тем, что такая задача возникает при описании процесса взаимодействия наночастиц со стенкой в технологиях производства наночастиц с уникальными свойствами [1, 2] и в технологии нанесения нанослоев [3], при калибровке атомных силовых микроскопов и при точном выделении ван-дер-ваальсовского взаимодействия на малых расстояниях [4–8], изучении адгезии заряженных частиц тонера к пластине [9], моделировании процесса удаления мелких пылевых частиц из воздуха [10] и т.д. Эта задача может быть решена с использованием бисферической системы координат, в которой система уравнений для коэффициентов разложения потенциала по мультипольным моментам имеет блочно-диагональный вид и может быть решена методом матричной прогонки. При этом в случае сильно отличающихся радиусов частиц возникает проблема задания значений коэффициентов разложения при больших номерах мультипольного момента, которая вызвана медленным убыванием выражений вида $e^{-(2\ell+1)\xi_1}$ (более подробно см. в работе [11]). Здесь ℓ – номер мультипольного момента, а ξ_1 – координата в бисферической системе координат поверхности шара большего радиуса, которая является малой величиной при малых расстояниях между поверхностями макрочастиц L. Например, при радиусе малого шара $a_2 = 100$ нм, радиусе большого $a_1 = 10^4 a_2$ и $L = 0.1$ нм имеем $\xi_1 = 4.473 \times 10^{-6}$, а координата поверхности малого шара равна $\xi_2 = 4.473 \times 10^{-2}$. Именно на расстояниях $L = 0.1{-}1$ нм силы электростатического и ван-дер-ваальсовского взаимодействия оказываются сравнимыми друг с другом [5], поэтому эти расстояния и вызывают повышенный интерес.

Настоящая работа посвящена решению задачи о взаимодействии двух заряженных диэлектрических шаров на малых расстояниях между их поверхностями в случае, когда радиус одного из них много больше радиуса второго, включая предельный случай плоской границы между однородными диэлектриками. Для упрощения выкладок рассматривается случай однородного распределения свободных зарядов по поверхностям шаров. Также принято, что

[1)]e-mail: fav@triniti.ru

внешнее электрическое поле отсутствует. Для решения задачи используется метод разложения потенциала по гармоникам в бисферической системе координат. Этим же методом данная задача решалась в работах [12, 13], а в работах [15, 14] решалась с использованием разложения в сферической системе координат. В последних работах отмечается трудность решения данной задачи методом разложения в сферической системе координат. Нужно отметить, что во всех этих работах взаимодействие заряженного шара с плоской границей между однородными диэлектриками рассматривалось как взаимодействие заряженного шара с другим шаром большего радиуса (например, в работе [15] радиус большего шара был в 64 раза больше радиуса малого). Трудность решения рассматриваемой задачи связана с тем, что при использовании метода разложения в сферической системе координат для коэффициентов разложения потенциала возникает система уравнений с квадратной матрицей, порядок которой для достижения требуемой точности при уменьшении межчастичного расстояния быстро растет, а коэффициенты разложения все медленнее убывают с ростом номера. При использовании метода разложения в бисферической системе координат система уравнений для коэффициентов разложения потенциала, как уже отмечалось выше, становится блочно-диагональной, которая при сравнимых размерах шаров успешно решается, например, методом матричной прогонки [11]. Но при сильно отличающихся размерах и здесь, как будет показано ниже, возникают проблемы, которые остались незамеченными в работах [12, 13].

2. Решение задачи о взаимодействии двух диэлектрических заряженных шаров с сильно отличающимися радиусами. Геометрия рассматриваемой задачи в бисферической системе координат представлена на рис. 1. Здесь и далее a_1, a_2, q_1, q_2, ε_1, ε_2 – радиусы, заряды и диэлектрические проницаемости частиц, соответственно, ε – диэлектрическая проницаемость среды, R – расстояние между центрами частиц, L – расстояние между поверхностями частиц: $L = R - a_1 - a_2$. Переход к пределу $a_1 \to \infty$ при конечных L и плотности свободного заряда $\sigma_1 = q_1/(4\pi a_1^2)$ в сферической системе координат затруднен (см., например, [15, 14]), поэтому рассмотрим задачу с использованием бисферической системы координат [11]. В настоящей работе не будем приводить общее решение задачи, которое приведено, например, в работе [11], а запишем окончательные уравнения для определения коэффициентов мультипольного разложения потенциала по полиномам Лежандра для рассматриваемой

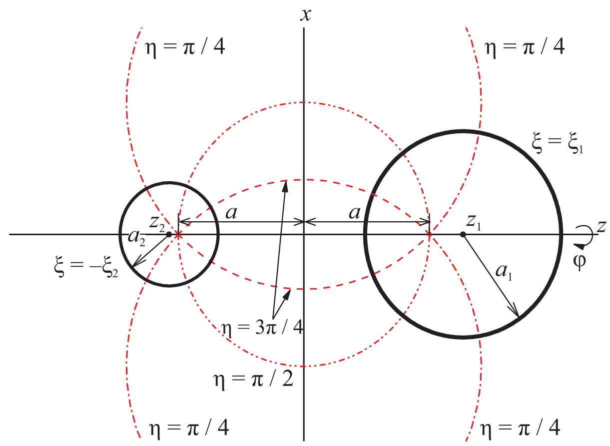

Рис. 1. (Цветной онлайн) Геометрия взаимодействия двух шаров радиусами a_1 и a_2 в бисферической системе координат (ξ, η, φ); $\xi = \xi_1$ и $\xi = -\xi_2$ – координаты поверхностей шаров, a – параметр бисферической системы координат: $a = a_1 \sinh \xi_1 = a_2 \sinh \xi_2$, расстояние между центрами шаров $R = (z_1 - z_2)$

здесь аксиально-симметричной задачи с однородным распределением свободных зарядов. В этом случае решение для потенциала в однородной диэлектрической среде (вакууме) в области вне частиц определяется выражением [16]:

$$\phi(\xi, \eta) = \sqrt{\cosh \xi - \cos \eta} \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \Big[C_l e^{-(\ell+1/2)\xi} + D_l e^{(\ell+1/2)\xi} \Big] P_l(\cos \eta), \quad (1)$$

ξ и η – ортогональные координаты в бисферической системе координат [17]. Граничные условия непрерывности потенциала и разрыва нормальных составляющих вектора электрической индукции приводят к системе уравнений [11] для нахождения коэффициентов разложения (1) $(\ell = 0, 1, \ldots, \infty)$:

$$- \ell e^{-\xi_1} D_{\ell-1} + [-\tau_1 \sinh \xi_1 + (2\ell+1)\cosh \xi_1] D_\ell - \\ - (\ell+1) e^{\xi_1} D_{\ell+1} = \frac{2\sqrt{2}\sinh \xi_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} \frac{q_1}{a_1} e^{-(2\ell+1)\xi_1} + \\ + \tau_1 \big\{ \ell e^{\xi_1} C_{\ell-1} + [\sinh \xi_1 - (2\ell+1)\cosh \xi_1] C_\ell + \\ + (\ell+1) e^{-\xi_1} C_{\ell+1} \big\} e^{-(2\ell+1)\xi_1}, \quad (2)$$

$$- \ell e^{-\xi_2} C_{\ell-1} + [-\tau_2 \sinh \xi_2 + (2\ell+1)\cosh \xi_2] C_\ell - \\ - (\ell+1) e^{\xi_2} C_{\ell+1} = \frac{2\sqrt{2}\sinh \xi_2}{\varepsilon + \varepsilon_2} \frac{q_2}{a_2} e^{-(2\ell+1)\xi_2} + \\ + \tau_2 \big\{ \ell e^{\xi_2} D_{\ell-1} + [\sinh \xi_2 - (2\ell+1)\cosh \xi_2] D_\ell + \\ + (\ell+1) e^{-\xi_2} D_{\ell+1} \big\} e^{-(2\ell+1)\xi_2}. \quad (3)$$

Здесь σ_1, σ_2 – плотности свободных зарядов на поверхностях частиц, соответственно: $\sigma_i = q_i/4\pi a_i^2$,

$i = 1, 2$; $\xi = \xi_1$, $\xi = -\xi_2$ – координаты поверхностей частиц в бисферической системе координат, соответственно; величины τ_1 и τ_2 определены соотношениями:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \; \tau_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon_2 + \varepsilon}. \tag{4}$$

Выражение для силы в случае аксиально-симметричной задачи имеет вид [11]

$$F_{1z} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell \big[(2\ell+1)\, C_\ell - - \ell C_{\ell-1} - (\ell+1)\, C_{\ell+1} \big]. \tag{5}$$

Сначала рассмотрим простой случай, когда диэлектрическая проницаемость одного из шаров совпадает с диэлектрической проницаемостью среды, в которой они находятся. В этом случае не происходит поляризация заряда на поверхности этого шара и потенциал вне него совпадает с потенциалом точечного заряда, помещенного в его центр.

2.1. Случай $\varepsilon_2 = \varepsilon$. В этом случае $\tau_2 = 0$ и из уравнения (3) для C_ℓ получаем:

$$-\ell e^{-\xi_2} C_{\ell-1} + (2\ell+1) \cosh \xi_2 C_\ell - (\ell+1)\, e^{\xi_2} C_{\ell+1} = = \frac{2\sqrt{2} q_2}{a_2 \, (\varepsilon + \varepsilon_2)} \sinh \xi_2 e^{-(2\ell+1)\xi_2}. \tag{6}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$C_\ell = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \frac{q_2}{a_2} e^{-(2\ell+1)\xi_2}. \tag{7}$$

Подставим это решение в уравнение (2) и для D_ℓ получаем уравнение, которое при достаточно больших $\ell > \ell_{\min}$ приобретает следующий вид:

$$\ell e^{-\xi_1} D_{\ell-1} + \left[-\tau_1 \sinh \xi_1 + (2\ell+1) \cosh \xi_1 \right] D_\ell - - (\ell+1)\, e^{\xi_1} D_{\ell+1} = \frac{2\sqrt{2} q_1}{a_1 \, (\varepsilon + \varepsilon_1)} \sinh \xi_1 e^{-(2\ell+1)\xi_1}. \tag{8}$$

Значение $\ell_{\min}$ определяется точностью вычисления силы взаимодействия. В настоящей работе значение $\ell_{\min}$ определялось из выражения:

$$\ell_{\min} \approx -\tfrac{1}{2} \ln \delta / \left(\xi_1 + \xi_2 \right). \tag{9}$$

В расчетах задавалось $\delta = 10^{-31}$, при этом точность вычисления силы будет не такой высокой, но число учитываемых членов разложения потенциала в расчетах будет достаточным для определения силы с точностью 11–13 знаков. Такая высокая точность бывает необходимой для сравнения точности вычисления силы разными методами и в различных приближениях.

Решение уравнения (8) имеет вид, аналогичный (7):

$$D_\ell = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \frac{q_1}{a_1} e^{-(2\ell+1)\xi_1}. \tag{10}$$

Следовательно, решением системы уравнений (2), (3) для больших мультипольных моментов $\ell > \ell_{\min}$ как при $\varepsilon_2 = \varepsilon$, так и при $\varepsilon_1 = \varepsilon$ будет выражение (7) для C_ℓ и (10) для D_ℓ. В случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ эти решения будут справедливы для всех ℓ и для силы взаимодействия можно получить выражение:

$$F_{1z} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon a_1 a_2} \frac{\sinh \xi_1 \sinh \xi_2}{\sinh^2 (\xi_1 + \xi_2)}. \tag{11}$$

Используя соотношения, связывающие бисферические координаты с радиусами частиц и расстоянием между их центрами (см. [18, 19]):

$$\begin{gathered} \sinh \xi_1 = \frac{a}{a_1}, \;\; \sinh \xi_2 = \frac{a}{a_2}, \\ \sinh (\xi_1 + \xi_2) = \frac{R}{a_2} \sinh \xi_1 = \frac{R}{a_1} \sinh \xi_2, \end{gathered} \tag{12}$$

из (11) можно легко получить закон Кулона:

$$F_C = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R}. \tag{13}$$

2.2. Общий случай $\varepsilon_2 \neq \varepsilon$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$. Анализ уравнений (2) и (3) показывает, что при достаточно больших $\ell > \ell_{\min}$ члены при τ_1 и τ_2 в правых частях этих уравнений при сравнимых радиусах частиц и, соответственно, сравнимых ξ_1 и ξ_2 убывают как $e^{-(2\ell+1)(\xi_1+\xi_2)}$ и ими можно пренебречь. Следовательно, решение этих уравнений при больших $\ell > \ell_{\min}$ будет иметь вид (7) и (10). В работе [11] система уравнений (2), (3) решалась методом матричной прогонки, используя нулевые значения коэффициентов C_ℓ и D_ℓ в качестве граничных значений при $\ell = \ell_{\min}$, что, как видно из (7) и (10), оправдано при сравнимых радиусах частиц. Отметим, что нулевые граничные значения можно использовать для любого соотношения радиусов частиц при достаточно больших $\ell \gtrsim \ell_{\max}$, где число $\ell_{\max}$ определено соотношением:

$$\ell_{\max} \approx -\tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{\delta}{\xi_{\min}} \right), \quad \xi_{\min} = \min\{\xi_1, \xi_2\}. \tag{14}$$

Для упомянутых выше радиусов малого шара $a_2 = 100$ нм и большого $a_1 = 10^4 a_2$, при $L = 0.1$ нм и точности $\delta = 10^{-31}$ из (14) находим, что $\ell_{\max} \approx 7.98 \cdot 10^6$, в то время как (9) дает на четыре порядка меньшее число: $\ell_{\min} \approx 798$.

В настоящей работе численное решение системы уравнений для коэффициентов разложения методом матричной прогонки начиналось со значений (7) и (10) при $\ell = \ell_{\min}$.

2.3. Переход к пределу $a_1 \to \infty$. Из определения координат частиц в бисферической системе координат [17]:

$$\cosh\xi_1 = \frac{R^2 + a_1^2 - a_2^2}{2Ra_1}, \quad \cosh\xi_2 = \frac{R^2 - a_1^2 + a_2^2}{2Ra_2}, \tag{15}$$

следует, что

$$\lim_{a_1\to\infty}\xi_1 = 0, \quad \lim_{a_1\to\infty}\cosh\xi_2 = 1 + \frac{L}{a_2}. \tag{16}$$

При этом произведение $a_1\sinh\xi_1 = a_2\sinh\xi_2 \equiv a$ остается конечной величиной, что будет учтено в выкладках ниже.

При выполнении условия $\ell > \ell_{\min}$, как уже отмечалось выше, решением уравнений (2) и (3) будут выражения (7) и (10). Из последнего выражения в пределе $a_1 \to \infty$ можно получить:

$$D_\ell^0 = \lim_{a_1\to\infty} D_\ell = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\varepsilon}\sigma_1\bigl[a_1 - (2\ell+1)\,a\bigr]. \tag{17}$$

Поэтому введем новые новые коэффициенты:

$$d_\ell = D_\ell - D_\ell^0, \tag{18}$$

подставим в уравнение (2) и после несложных преобразований в пределе $a_1 \to \infty$ получим:

$$\begin{aligned} &-\ell d_{\ell-1} + (2\ell+1)\,d_\ell - (\ell+1)\,d_{\ell+1} = \\ &= \tau_1\left[\ell C_{\ell-1} - (2\ell+1)\,C_\ell + (\ell+1)\,C_{\ell+1}\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) следует, что коэффициенты $\tau_1 C_\ell$ и d_ℓ отличаются только на постоянную (не зависящую от ℓ) величину, которая из вида решений (7) и (10) при $\ell > \ell_{\min}$ должна быть положена равной нулю. Следовательно, мы имеем равенство для всех $\ell = 0, 1, \ldots$

$$d_\ell = -\tau_1 C_\ell. \tag{20}$$

Подстановка D_ℓ из (18) с решением (19) в (3) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} &-\ell e^{-\xi_2}\,(1-\beta_{\ell-1})\,C_{\ell-1} + \\ &+ \bigl\{(1-\tau_2)\sinh\xi_2 + (1-\beta_\ell)\times \\ &\times[(2\ell+1)\cosh\xi_2 - \sinh\xi_2]\bigr\}C_\ell - \\ &-(\ell+1)\,e^{\xi_2}\,(1-\beta_{\ell+1})\,C_{\ell+1} = \alpha_1\sinh\xi_2 e^{-(2\ell+1)\xi_2} + \\ &+ 2\alpha_2\tau_2\sinh\xi_2\,[(2\ell+1)\sinh\xi_2 - \cosh\xi_2]\,e^{-(2\ell+1)\xi_2}, \end{aligned} \tag{21}$$

где введены обозначения:

$$\beta_\ell = \tau_1\tau_2 e^{-(2\ell+1)\xi_2},\ \alpha_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon+\varepsilon_2}\frac{q_2}{a_2},\ \alpha_2 = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\varepsilon}a_2\sigma_1.$$

В итоге, для нахождения коэффициентов разложения потенциала C_ℓ при $a_1 = \infty$ получилась система с трехдиагональной матрицей, которая может быть успешно решена методом простой прогонки.

Найдем решение уравнения (21) для больших ℓ, когда становятся пренебрежимо малыми β_ℓ и ими можно пренебречь. После несложных выкладок находим решение этого уравнения, которое справедливо при $\ell > \ell_{\min}$:

$$\begin{aligned} C_\ell = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}e^{-(2\ell+1)\xi_2}\Bigl\{\frac{q_2}{a_2} + \\ + 4\pi\sigma_1 a_2\frac{\varepsilon_2-\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_2}\bigl[(2\ell+1)\sinh\xi_2 - \cosh\xi_2\bigr]\Bigr\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Появление дополнительного члена в выражении (22) по сравнению с (7) связано с тем, что при $a_1 \gg a_2$ величина $e^{-2(\ell+1)\xi_1}$ практически не убывает (в пределе $a_1 \to \infty$, который мы здесь рассматриваем, она равна единице).

Сила взаимодействия через коэффициенты d_ℓ при $a_1 = \infty$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} F_{z\infty} = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\bigl[-\ell d_{\ell-1} + (2\ell+1)\,d_\ell - \\ -(\ell+1)\,d_{\ell+1} + \alpha_2\sinh\xi_2\bigr]. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя приближенное решение (22), после суммирования (23) и подстановки вместо $\cosh\xi_2$ его значение из (16), находим:

$$\begin{aligned} F_{z\infty}^a = \frac{4\pi\sigma_1 q_2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{1}{(L+a_2)^2}\frac{q_2^2}{4\varepsilon} + \\ + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_2}\frac{2\pi\sigma_1 a_2^3}{\varepsilon(L+a_2)^3}\times \\ \times\left[q_2 - \left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_2}\right)\frac{3\pi a_2^3\sigma_1}{(L+a_2)}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Верхняя строка в этом выражении совпадает с выражением для силы взаимодействия точечного заряда с заряженной плоской границей (см. [16], задача 144):

$$F_{pp} = -\frac{4\pi\sigma_1 q_2}{\varepsilon} + \frac{q_2^2}{4\varepsilon(L+a_2)^2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{\varepsilon_1+\varepsilon}. \tag{25}$$

Это выражение автоматически получается при $\varepsilon_2 = \varepsilon$. А при $\varepsilon_1 = \varepsilon$ остается только первый член вне зависимости от значения ε_2, поскольку в этом случае заряд на поверхности диэлектрика не поляризуется и однородное распределение свободного заряда создает однородное же электрическое поле. Под действием этого поля на второй частице наводится только дипольный момент, сила взаимодействия которого с однородным полем равна нулю.

Отметим, что сила взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим заряженным шаром описывается выражением [20, 16]:

$$F_{ps} = -\frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} + \\ + \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(n+1)\,(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 n + \varepsilon\,(n+1)} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{2n+1}. \quad (26)$$

3. Результаты расчетов и обсуждение. Расчеты в настоящей работе проведены для следующих параметров: радиус малой частицы $a_2 = 100$ нм, радиус крупной $a_1 = 10^4 a_2$, для крупной частицы задается однородная плотность поверхностного свободного заряда $\sigma_1 = 10^{-3} e/\text{нм}^2$, заряд малой частицы $q_2 = 100e$, их диэлектрические проницаемости, если не оговорено иное, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$, диэлектрическая проницаемость среды (вакуума) $\varepsilon = 1$, расстояние между поверхностями частиц менялось от 0.1 нм до 1 см.

На рисунках 2, 3 приведены значения коэффициентов C_ℓ и D_ℓ как функции номера мультипольного момента при $L = 0.1$ нм, рассчитанные в различных приближениях. Видно, что данные хорошо согласуются друг с другом и выделяется только решение с нулевыми граничными значениями $C_\ell = 0$ и $D_\ell = 0$ при $\ell = \ell_{\min}$. При этом решение с $C_\ell = 0$ и со значением D_ℓ при $\ell = \ell_{\min}$ согласно (10) практически ничем не отличается от точного решения системы (2), (3) с граничными значениями при $\ell = \ell_{\min}$ из (7), (10).

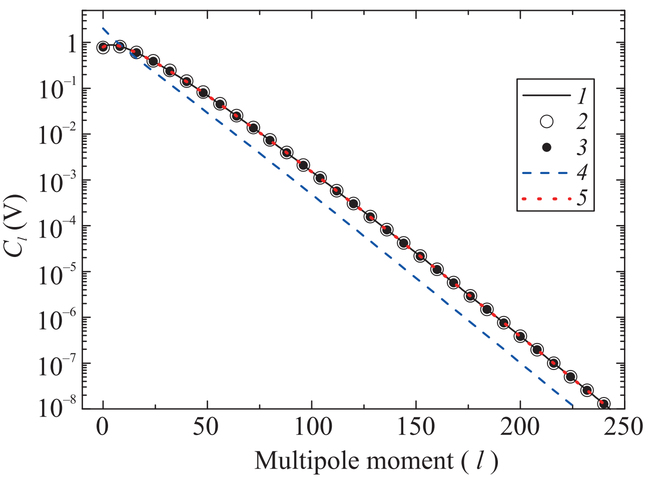

Рис. 2. (Цветной онлайн) Коэффициенты разложения потенциала C_ℓ при $L = 0.1$ нм, $a_2 = 100$ нм, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$, $\sigma_1 = 10^{-3}e$, $q_2 = 100e$: кривая *1* – решение уравнений (2) и (3) со значениями при $\ell = \ell_{\min}$ из (7) и (10); *2* – выражение (22); *3* – решение уравнения (21); *4* – решение уравнений (2) и (3) с нулевыми значениями при $\ell = \ell_{\min}$: $C_{\ell_{\min}} = D_{\ell_{\min}} = 0$; *5* – решение уравнений (2) и (3) с граничными значениями для D_ℓ при $\ell = \ell_{\min}$ из (10) и $C_{\ell_{\min}} = 0$

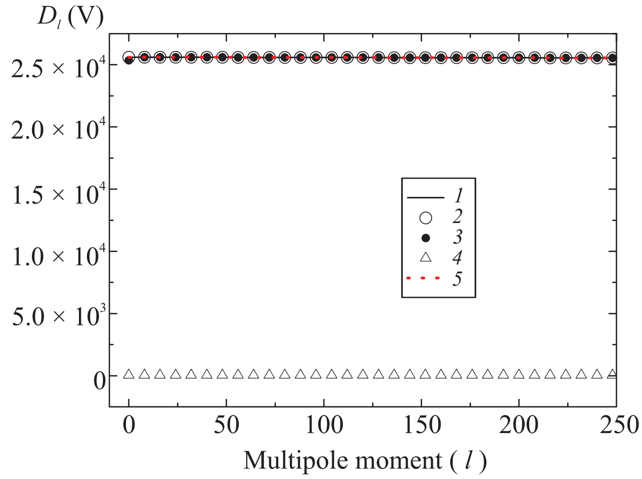

Рис. 3. (Цветной онлайн) Коэффициенты разложения потенциала D_ℓ: кривая *1* – решение уравнений (2) и (3) со значениями при $\ell = \ell_{\min}$ из (7) и (10); *2* – выражение (10); *3* – решение уравнения (21); *4* – решение уравнений (2) и (3) с нулевыми значениями при $\ell = \ell_{\min}$: $C_{\ell_{\min}} = D_{\ell_{\min}} = 0$; *5* – решение уравнений (2) и (3) с начальными значениями для D_ℓ при $\ell = \ell_{\min}$ из (10) и $C_{\ell_{\min}} = 0$

В таблице 1 приведены значения силы взаимодействия частиц при $L = 0.1$ нм, а на рис. 4 и 5 – зависимости силы от L, рассчитанные для различных параметров и в различных приближениях. Из 1-го ряда таблицы 1 видно, что конечный размер (или учет ее поляризуемости) 2-й частицы оказывает заметное влияние на силу взаимодействия (отличие значений как F_{1z} и F_{ps} друг от друга, так и $F_{z\infty}$ и F_{pp} составляет почти 8 %). В то же время отличие между F_{1z} при $a_1 = 10^4 a_2$ и $F_{z\infty}$ при $a_1 = \infty$ проявляется только в третьем знаке после десятичной точки и относительное их отличие составляет величину порядка 0.03 %. Такого же порядка относительное отличие имеет место для сил взаимодействия точечного заряда со сферой радиуса $a_1 = 1$ мм и точечного заряда с плоской границей диэлектриков.

При задании нулевых значений для коэффициентов разложения потенциала $C_\ell = D_\ell = 0$ при $\ell = \ell_{\min}$, как видно из табл. 1, сила взаимодействия оказывается на порядок меньше, чем при задании асимптотических значений этих коэффициентов из (7), (10). В то же время, если задавать нулевое значение при $\ell = \ell_{\min}$ только для C_ℓ, то для силы взаимодействия получается не отличающаяся в 11 десятичных знаках величина.

При $\varepsilon_1 = 1$ учет размера 2-й частицы при $a_1 = 10^4 a_2$ приводит к незначительному изменению силы

Таблица 1. Силы взаимодействия частиц в 10^{-10} Н при $L = 0.1$ нм, $a_2 = 100$ нм, вычисленные с $\ell_{\min} = 1081$

	$a_1 = 1$ мм		$a_1 = \infty$	
	F_{1z} из (5)	F_{ps} из (26)	$F_{z\infty}$ из (23)	F_{pp} из (25)
$\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 4$	2.77719582129	2.55322165285	2.77812264405	2.55378813877
$C_\ell = D_\ell = 0$ при $\ell = \ell_{\min}$	0.23691354841	–	–	–
$C_\ell = 0$ при $\ell = \ell_{\min}$	2.77719582129	–	–	–
$\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$	2.89821402039	2.89818502941	2.89915862150	2.89915862150
$\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 1$	2.55322151314	2.55322165285	2.55378813877	2.55378813877
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$	2.89857815821	2.89857829708	2.89915862150	2.89915862150

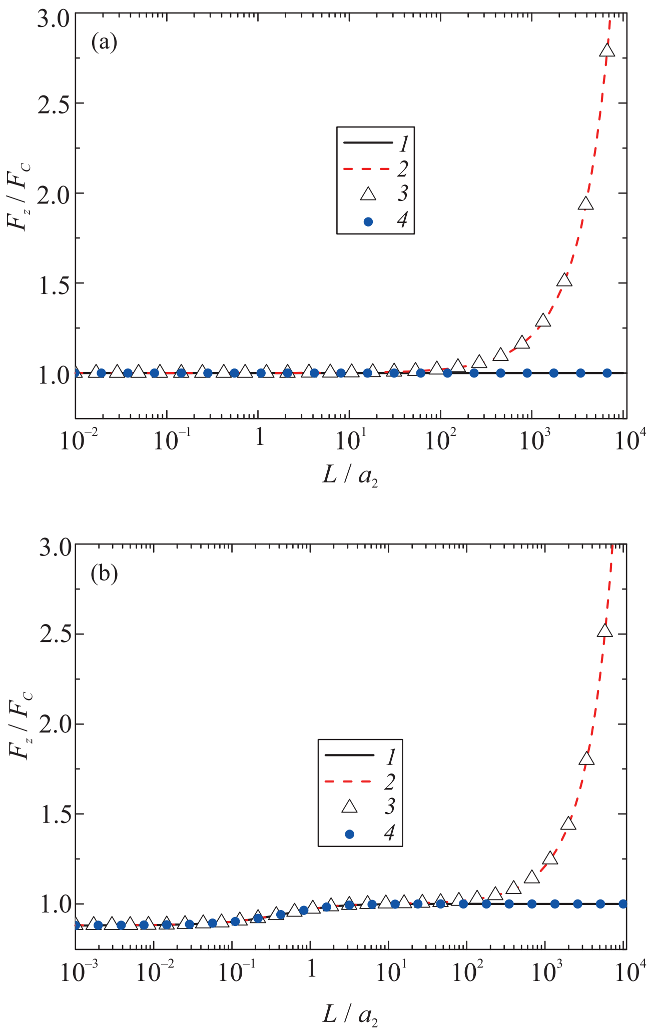

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость силы взаимодействия частиц, приведенной к кулоновской, от приведенного расстояния между их поверхностями при $a_2 = 100$ нм: (a) – $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$; (b) – $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 1$. Кривая *1* – из (5) при $a_1 = 10^4 a_2$; *2* – из (23) при $a_1 = \infty$; *3* – сила взаимодействия точечного заряда с плоской заряженной границей диэлектриков (25); *4* – сила взаимодействия точечного заряда с шаром (26)

взаимодействия (в 4-м знаке после десятичной точки), причем сила оказывается больше при $a_2 = 0$.

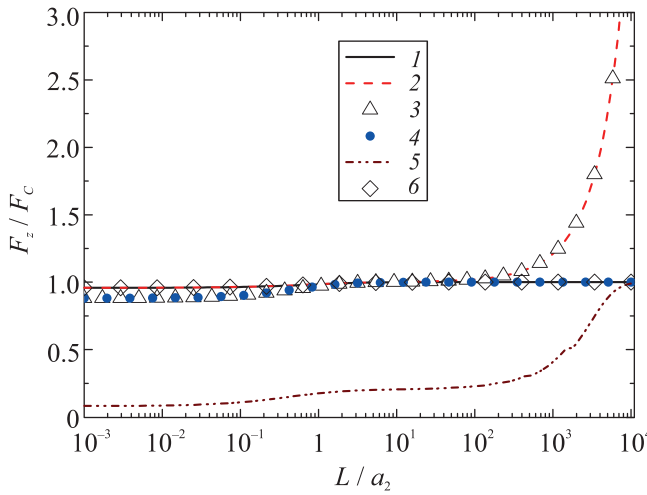

Рис. 5. (Цветной онлайн) Зависимость силы взаимодействия частиц, приведенной к кулоновской, от приведенного расстояния между их поверхностями при $a_2 = 100$ нм и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$. Кривая *1* – из (5) при $a_1 = 10^4 a_2$; *2* – из (23) при $a_1 = \infty$; *3* – сила взаимодействия точечного заряда с плоской заряженной границей диэлектриков из (25); *4* – сила взаимодействия точечного заряда с шаром (26); *5* – из (5) при $a_1 = 10^4 a_2$ и $C_{\ell_{\min}} = D_{\ell_{\min}} = 0$; *6* – из (5) при $a_1 = 10^4 a_2$ и $C_{\ell_{\min}} = 0$, $D_{\ell_{\min}}$ из (10)

В то же время при $a_1 = \infty$ значения силы совпадают в обоих случаях: как при конечном a_2, так и при точечном заряде $a_2 = 0$, причина чего отмечалась выше.

В случае $\varepsilon_2 = 1$ должны совпадать значения силы как при $a_1 = 10^4 a_2$, рассчитанные из (26) и (5), так и при $a_1 = \infty$, рассчитанные из (25) и (23). Из таблицы 1 видно, что значения силы совпадают с высокой точностью при $a_1 = \infty$, а при $a_1 = 10^4 a_2$ отличие появляется в 7-м знаке после десятичной точки, что позволяет судить о точности решения блочно-диагональной системы (2), (3) методом матричной прогонки и точности вычисления силы взаимодействия. Отметим, что при сравнимых радиусах частиц, как было показано в работе [11], этот метод оказывался значительно точнее.

На рисунке 6 проводится сравнение решения системы (2), (3) методом матричной прогонки при раз-

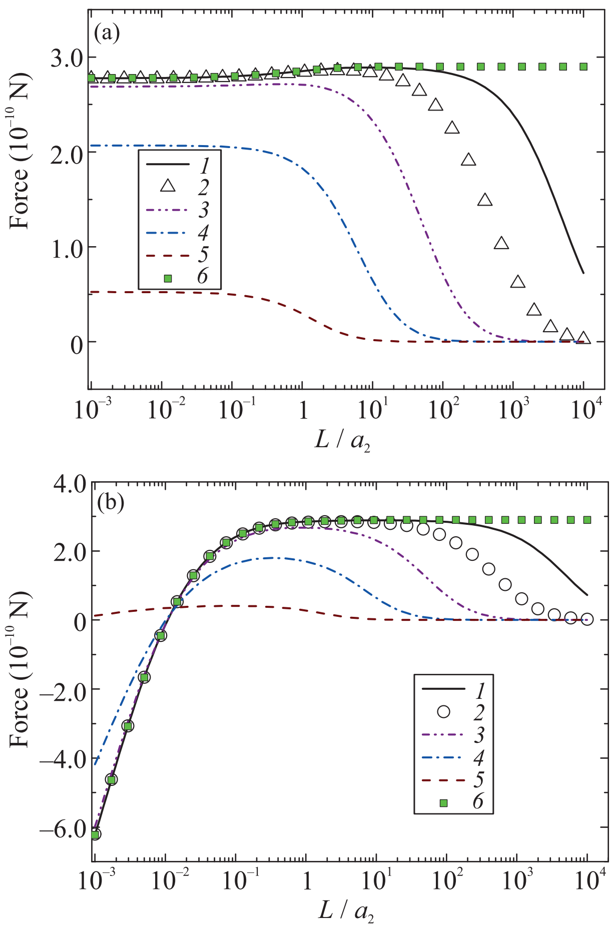

Рис. 6. (Цветной онлайн) Сила взаимодействия как функция от приведенного расстояния между поверхностями частиц L/a_2 при $a_2 = 100$ нм и следующих параметрах: (a) – $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$; (b) – $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 80$; кривая *1* – $a_1 = 10^4 a_2$; *2* – $a_1 = 10^3 a_2$; *3* – $a_1 = 10^2 a_2$; *4* – $a_1 = 10 a_2$; *5* – $a_1 = a_2$; *6* – $a_1 = \infty$ из (23)

личных радиусах большей частицы и уравнения (21) методом простой прогонки при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 80$. Видно, что отличие этих решений на малых расстояниях становится заметным при $a_1 = 100 a_2$ и отклонения растут по мере уменьшения радиуса большей частицы. На больших расстояниях сила взаимодействия частицы с плоской границей медленнее убывает и, как видно из рис. 6, выходит на решение (25) на расстояниях $L \sim a_2$. Следовательно, можно сделать вывод, что для получения хорошей точности для силы взаимодействия заряженного шара с плоской заряженной границей задачу о взаимодействии двух шаров необходимо решать при $a_1 \gtrsim 10^3 a_2$ и расстоянии $L \lesssim a_2$. Отметим, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 80$ переход от отталкивания на больших расстояниях к притяжению на малых для рассмотренных здесь зарядов не наблюдается только при $a_1 = a_2$, а при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ этот переход вообще не имеет места.

4. Заключение. В настоящей работе впервые найден ряд аналитических решений для коэффициентов разложения потенциала в бисферической системе координат для больших номеров мультипольного момента. Выполнен переход к бесконечному радиусу одного из шаров и впервые найдено аналитическое решение данной задачи. Показано, что найденные аналитические решения позволяют с высокой точностью рассчитать силу взаимодействия заряженной диэлектрической частицы сферической формы с частицей, значительно большего радиуса или с плоской границей диэлектриков при расстояниях между их поверхностями в области 0.1–1 нм, в которой силы электростатического и ван-дер-ваальсовского взаимодействия сравнимы друг с другом.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение # 075-15-2020-785).

---

1. T. B. Jones, *Electromechanics of Particles*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
2. A. Castellanos, Adv. Phys. **54**(4), 263 (2005).
3. X. Meng, J. Zhu, and J. Zhang, J. Phys. D **42**, 065201 (2009).
4. B. Gady, D. Schleef, R. Reifenberger, D. Rimai, and L. P. DeMejo, Phys. Rev. B **53**, 8065 (1996).
5. B. Gady, R. Reifenberger, D. S. Rimai, and L. P. DeMejo, Langmuir **13**, 2533 (1997).
6. Y. Liu, C. Song, G. Lv, N. Chen, H. Zhou, and X. Jing, Applied Surface Science **433**, 450 (2018).
7. M. C. Stevenson, S. P. Beaudoin, and D. S. Corti, J. Phys. Chem. C **124** 3014 (2020).
8. M. C. Stevenson, S. P. Beaudoin, and D. S. Corti, J. Phys. Chem. C **125** 20003 (2021).
9. H. Zhou, M. Götzinger, and W. Peukert, Powder Technology **135–136**, 82 (2003).
10. Y. Gao, E. Tian, and J. Mo, ACS EST Engg. **1**(10), 1449 (2021).
11. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, ЖЭТФ **144**, 931 (2013).
12. A. Khachatourian, H.-K. Chan, A. J. Stace, and E. Bichoutskaia, J. Chem. Phys. **140**, 074107 (2014).
13. A. T. Pérez and R. Fernández-Mateo, Journal of Electrostatics **112** 103601, (2021).
14. E. Bichoutskaia, A. L. Boatwright, A. Khachatourian, and A. J. Stace, J. Chem. Phys. **133**, 024105 (2010).

15. Y. Nakajima and T. Sato, Journal of Electrostatics **45**, 213 (1999).
16. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, М. (1970).
17. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, N.Y. (1953).
18. А. В. Филиппов, ЖЭТФ **136**, 601 (2009).
19. A. V. Filippov, Contributions to Plasma Physics **49**, 433 (2009).
20. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Иностранная литература, М. (1954).