Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 4, с. 207 – 212 © 2022 г. 25 февраля

Оптические солитоны с наклонными волновыми фронтами

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 января 2022 г.
После переработки 10 января 2022 г.
Принята к публикации 11 января 2022 г.

Исследовано распространение нерезонансных солитонов с наклонными по отношению друг к другу фазовыми и групповыми волновыми фронтами. Показано, что наклон фронтов приводит к переопределению параметра дисперсии групповой скорости, внося в него дополнительный аномальный вклад. Следствием этого является возможность формирования светлых временных и пространственно-временных солитонов при нормальной дисперсии групповой скорости и фокусирующей нелинейности, включая случаи отсутствия данной дисперсии. Пространственно-временной солитон представляет собой структуру, вытянутую вдоль групповых фронтов, нормально к плоскости поляризации, и локализованную во всех направлениях, перпендикулярных к направлению вытянутости солитона.

DOI: 10.31857/S1234567822040012

Введение. Оптические солитоны бывают пространственными и временными. Пространственные солитоны представляют собой непрерывные пучки световой энергии, бесконечно вытянутые в направлении распространения и ограниченные в поперечных направлениях. Они формируются в результате взаимной компенсации нелинейной поперечной самофокусировки и дифракционной расходимости. Временные солитоны – это короткие импульсы, локализованные в направлении распространения и бесконечно вытянутые в поперечных направлениях. Данные солитоны являются результатом взаимной компенсации нелинейного самосжатия и дисперсионного расплывания. Важно, что при фокусирующей нелинейности временной солитон формируется, если дисперсия групповой скорости (ДГС) является аномальной. Если же нелинейность носит дефокусирующий характер, ДГС должна быть нормальной. Таким образом, в формировании пространственных солитонов принимают участие фокусирующая нелинейность и дифракция, а в формировании временных солитонов – нелинейность и дисперсия.

Пространственно-временной солитон (или световая пуля) представляет собой распространяющийся в пространстве устойчивый локализованный во всех направлениях сгусток энергии. Рассматривая световую пулю как симбиоз пространственного и временного солитона, приходим к выводу, что для ее формирования в однородной среде необходимо присутствие фокусирующей нелинейности, аномальной ДГС и дифракции.

В настоящее время в лабораторных условиях для различных целей используются лазерные импульсы с наклонными волновыми фронтами [1–8]. Фазовые и групповые волновые фронты в таких импульсах неколлинеарны по отношению друг к другу, образуя между собой угол θ. Понятно, что такой же угол образуется между направлениями фазовой v_{ph} и групповой v_g скоростей импульса.

Влияние дифракции сводится к искривлению фазовых волновых фронтов. Это, в свою очередь, приводит к поперечному уширению импульса. Из-за наклона фазовых волновых фронтов проекция дифракционного уширения на направление групповой скорости сигнала приводит к его расплыванию в направлении распространения. Такое расплывание аналогично влиянию дисперсии. Таким образом, изменяя угол между фазовыми и групповыми волновыми фронтами, за счет дифракции можно управлять эффективной дисперсией, включая ее знак. Способна ли в таком случае дифракция заменить дисперсию и выступить, таким образом, одним из механизмов формирования временных и пространственно-временных солитонов? Ответу на этот вопрос посвящена данная работа.

2. Уравнение для огибающей нерезонансного импульса. Пусть фазовые волновые фронты импульса с несущей частотой ω, подаваемого на

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

изотропную нерезонансную среду, распространяются вдоль оси z'. При этом групповая скорость направлена вдоль оси z, лежащей в плоскости (z', x') декартовой системы координат и образующей угол θ с осью z' (рис. 1). Плоскость поляризации импульса будем

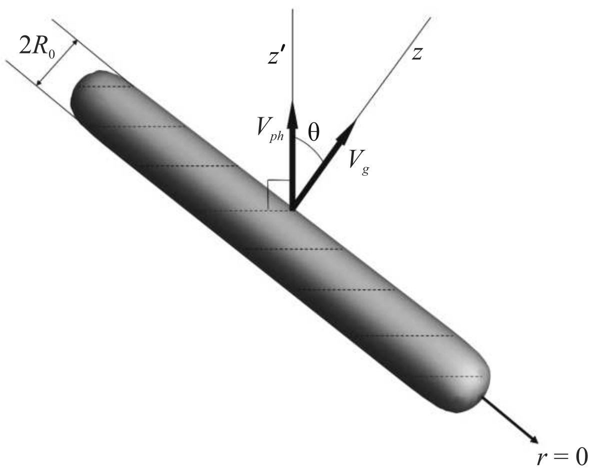

Рис. 1. Схематическое изображение пространственно-временного солитона с наклонными по отношению друг к другу под углом θ фазовыми (пунктирные линии) и групповыми волновыми фронтами

считать параллельной оси y. В соответствии со сказанным представим электрическое поле E импульса в виде

$$E = \psi e^{i(\omega t - kz')} + \psi^* e^{-i(\omega t - kz)}, \tag{1}$$

где $\psi(z, x, y, t)$ – медленно меняющаяся огибающая (ММО) поля импульса, k – волновое число.

Из-за быстрых осцилляций в (1) мнимых экспонент относительно координаты z' выделим в волновом уравнении вторую производную по данной координате:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta'_\perp E. \tag{2}$$

Здесь c – скорость света в вакууме, $\Delta'_\perp = \partial^2/\partial x'^2 + \partial^2/\partial y'^2$ – поперечный по отношению к оси z' лапласиан, P – поляризационный отклик среды, индуцированный электрическим полем импульса.

Далее стандартным образом представим поляризационный отклик P в виде суммы его линейной и нелинейной частей, учтем по теории возмущений временную дисперсию его линейной части и пренебрежем дисперсией нелинейной части. В результате после подстановки (1) в (2), пренебрегая производными от ψ выше второй степени, будем иметь (см., например, [9])

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial z'} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{c}{2n\omega}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{v_g^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) - \\ - \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + F(|\psi|^2)\psi + \frac{c}{2n\omega}\Delta'_\perp\psi. \tag{3}$$

Здесь n – показатель преломления, соответствующий частоте ω, $\beta = \partial(1/v_g)/\partial\omega$ – коэффициент ДГС второго порядка, $F(|\psi|^2)$ – функция, описывающая оптическую нелинейность.

Перейдем к системе координат z, x, повернутой относительно системы z', x' на угол θ, используя формулы преобразования $z = z'\cos\theta + x'\sin\theta$, $x = -z'\sin\theta + x'\cos\theta$. Тогда (3) примет вид

$$i\left(\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = i\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{c}{2n\omega}\times \\ \times\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z} - \frac{1}{v_g^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \Delta_\perp\psi\right) - \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + F(|\psi|^2)\psi, \tag{4}$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – лапласиан, поперечный по отношению к оси z.

Правая часть уравнения (4) содержит относительно малые слагаемые в виде производных по поперечным к направлению групповой скорости координатам, а также слагаемые, малые по параметру $(\omega\tau_p)^{-1}$, где τ_p – временная длительность импульса. В этих условиях применимо приближение однонаправленного распространения вдоль оси z [10], что соответствует, в частности, учету поперечной динамики импульса в параксиальном приближении. Как видно из левой части (4), скорость такого распространения равна $v_g\cos\theta$. Поэтому в правой части (4) можно положить приближенно $\frac{\partial\psi}{\partial z} \approx -\frac{1}{v_g\cos\theta}\frac{\partial\psi}{\partial t}$. В результате придем к уравнению

$$i\left(\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} - \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \\ = -\frac{\beta_{\text{ef}}}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + F(|\psi|^2)\psi + \frac{c}{2n\omega}\Delta_\perp\psi, \tag{5}$$

где $\tau = t - z/v$,

$$v = v_g\cos\theta, \tag{6}$$

$$\beta_{\text{ef}} = \beta - \frac{c}{n\omega v_g^2}\tan^2\theta. \tag{7}$$

Второе, слагаемое в (7), возникшее из-за дифракции, вносит вклад в ДГС второго порядка. Так как данный вклад отрицателен, дифракция импульса с наклонными волновыми фронтами способствует формированию аномальной ДГС. Ниже второе слагаемое в (7) будем называть дифракционной ДГС.

Похожая ситуация отмечалась ранее в [1, 11] при рассмотрении оптического метода генерации терагерцового излучения.

3. Временной солитон. Рассмотрим (5) при керровской нелинейности, когда $F(|\psi|^2) = \alpha|\psi|^2$, где $\alpha = 6\pi\omega\chi^{(3)}/cn$, $\chi^{(3)}$ – нелинейная оптическая восприимчивость третьего порядка. В этом случае (5) принимает вид

$$i\left(\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} - \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \\ = -\frac{\beta_{\rm ef}}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + \alpha|\psi|^2\psi + \frac{c}{2n\omega}\Delta_\perp\psi. \tag{8}$$

Положив здесь $\partial\psi/\partial x = \Delta_\perp\psi = 0$, получим решение уравнения (8) в виде одномерного (временного) солитона

$$\psi = \psi_m e^{i\frac{\beta_{\rm ef}z}{2\tau_p^2\cos\theta}}\,{\rm sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \tag{9}$$

где амплитуда

$$\psi_m = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{-\frac{\beta_{\rm ef}}{\alpha}}, \tag{10}$$

а скорость распространения определяется выражением (6).

Отсюда видно, что светлый временной солитон (9) существует, если $\beta_{\rm ef}/\alpha < 0$. В большинстве твердых диэлектриков керровская нелинейность имеет фокусирующий характер ($\alpha \sim \chi^{(3)} > 0$). Следовательно, должно быть $\beta_{\rm ef} < 0$. Пусть, в частности, несущая частота такова, что $\beta = 0$. Например, для плавленого кварца данное равенство выполняется при $\omega \approx 1.0\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ [12]. Тогда, воспользовавшись (7), (10) и выражением для α, запишем

$$\psi_m = \frac{c\tan\theta}{v_g\omega\tau_p\sqrt{6\pi\chi^{(3)}}}. \tag{11}$$

Для пиковой интенсивности $I = c\psi_m^2/2\pi$ солитона имеем

$$I = \frac{1}{nn_2}\left(\frac{c\tan\theta}{nv_g\omega\tau_p}\right)^2. \tag{12}$$

Здесь n_2 – нелинейный показатель преломления, определяющий аддитивную добавку n_2I к линейному показателю n и связанный с $\chi^{(3)}$ соотношением $cn^2n_2 = 12\pi^2\chi^{(3)}$ [13].

Взяв для плавленого кварца $nn_2 \approx 5 \times 10^{-16}$ см^2/Вт [13], при длительности $\tau_p \sim 10^{-12}$ с и угле наклона $\theta = 45°$ найдем $I \sim 10^9$–10^{10} Вт/см^2.

Таким образом, дифракционная ДГС в условиях реального эксперимента вполне способна содействовать формированию временного солитона с наклонными волновыми фронтами.

4. Пространственно-временной солитон. Так как дифракционная ДГС является аномальной, то она должна способствовать формированию пространственно-временного солитона [14–20]. Для соответствующего исследования, следуя стандартному подходу [14, 18], представим огибающую ψ в виде

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{iqx - n\omega\varphi/c}, \tag{13}$$

где ρ и φ – неизвестные функции переменных z, y и

$$\xi = \sqrt{\frac{c}{n\omega|\beta_{\rm ef}|}}\tau. \tag{14}$$

При этом эффективная ДГС считается аномальной ($\beta_{\rm ef} < 0$).

Очевидно, что величина ρ пропорциональна локальной интенсивности импульса.

Подставляя (13) в (5) с учетом (14), после отделения действительной и мнимой частей придем к системе уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial\zeta} + \nabla_2(\rho\nabla_2\varphi) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{(\nabla_2\varphi)^2}{2} - \frac{c}{n\omega}F(\rho) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\left(q^2 + \frac{2n\omega}{c}q\sin\theta\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{\Delta_2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{16}$$

Здесь $\zeta = z/\cos\theta$, ∇_2 – дифференциальный оператор "набла" в плоскости переменных y и ξ, Δ_2 – лапласиан в плоскости этих же переменных.

Пусть функция оптической нелинейности имеет вид

$$F(|\psi|)^2) = \alpha|\psi|^2 - \sigma|\psi|^4 = \alpha\rho - \sigma\rho^2. \tag{17}$$

Здесь $\sigma = -20\pi\omega\chi^{(5)}/cn$, $\chi^{(5)}$ – нелинейная оптическая восприимчивость пятого порядка, а коэффициент α был определен выше и связан с керровской нелинейностью.

Если $\chi^{(5)} < 0$, что встречается довольно часто [14], то оптическая нелинейность имеет характер насыщения. В этом случае $\sigma > 0$.

Рассматривая аксиально-симметричное решение системы (15), (16) с учетом (17), используем цилиндрические координаты $r = \sqrt{y^2 + \xi^2}$ и ζ. Полагая при этом

$$\varphi = \frac{c}{n\omega}gz = \frac{c}{n\omega}g\cos\theta\zeta, \tag{18}$$

где g – положительная постоянная, будем иметь $\nabla_2\varphi = 0$. Тогда из (15) следует, что $\partial\rho/\partial\zeta = 0$. Таким образом, переменная ρ зависит только от y и ξ.

Уравнение (16) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\Delta_2 Q = \frac{1}{R_0^2} Q - \frac{2n\omega}{c}(\alpha Q^2 - \sigma Q^4), \tag{19}$$

где $Q = \sqrt{\rho}$,

$$\frac{1}{R_0^2} = q^2 + \frac{2n\omega}{c}(g\cos\theta + q\sin\theta) \approx$$

$$\approx \frac{2n\omega}{c}(g\cos\theta + q\sin\theta). \tag{20}$$

Здесь мы пренебрегли q^2, так как по смыслу параксиального приближения и приближения ММО справедливы неравенства q, $g \ll n\omega/c$ (см. (13) и (20)).

Уравнение (19) при $R_0^2 > 0$ имеет локализованные, исчезающие на бесконечности ($r \to \infty$), решения [14]. При этом R_0 имеет смысл характерного размера области локализации в плоскости (y, ξ). Вдоль поперечной оси x локализация световой энергии не происходит из-за наклона волновых фронтов (см. второе слагаемое в скобках уравнения (5)). Таким образом, пространственно-временной солитон уравнения (5) с наклонными волновыми фронтами имеет форму "сигары", вытянутой вдоль направления, ортогонального к скорости и к плоскости поляризации солитона (рис. 1).

Перейдем к рассмотрению вопроса об устойчивости данного солитона. Для этого используем аксиально-симметричное автомодельное решение уравнения (15) [21–23]

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} G\left(\frac{r}{R}\right), \quad \varphi = f(\zeta) + \frac{r^2}{2R}\frac{dR}{d\zeta}. \tag{21}$$

Здесь ρ_0 – величина, пропорциональная интенсивности световой энергии на центральной оси ($r = 0$) пространственно-временного солитона (рис. 1) при равновесном значении R_0 его радиуса, R – радиус данного солитона, зависящий от координаты ζ, $f(\zeta)$ и $G(r/R)$ – произвольные гладкие функции своих аргументов.

Так как решение локализовано в плоскости (y, ξ), аппроксимируем функцию гауссовой экспонентой [14]:

$$G = e^{-r^2/R^2}. \tag{22}$$

Тогда в правой части (16) имеем

$$\frac{\Delta_2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\Delta_2\sqrt{G}}{\sqrt{G}} = -\frac{2}{R^2} + \frac{r^2}{R^4}.$$

При подстановке (21) и (22) при учете (17) в левую часть (16) используем приосевое приближение [21], согласно которому в выражении для G существенны только первые два члена разложения в ряд Тейлора по параметру r^2/R^2: $G \approx 1 - r^2/R^2$, $G^2 \approx 1 - 2r^2/R^2$. Приравнивая затем коэффициенты при r^0 и r^2 в левой и правой частях (16), получим

$$\frac{df}{d\zeta} = -\frac{c}{n\omega}\left(\frac{c}{n\omega} - \alpha\rho_0 R_0^2\right)\frac{1}{R^2} + \frac{c}{n\omega}\sigma\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\left(q^2 + \frac{2n\omega}{c}q\sin\theta\right), \tag{23}$$

$$\frac{d^2R}{d\zeta^2} = -\frac{\partial U}{\partial R}, \tag{24}$$

$$U = \frac{c}{2n\omega}\left(\frac{c}{n\omega} - 2\alpha\rho_0 R_0^2\right)\frac{1}{R^2} + \frac{c}{n\omega}\sigma\rho_0^2\frac{R_0^4}{R^4}. \tag{25}$$

Уравнение (24) формально схоже с уравнением движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем силовом поле с потенциальной энергией (25).

Устойчивому пространственно-временному солитону должен соответствовать локальный минимум в зависимости $U(R)$. Как видно из (25), при наличии только фокусирующей керровской нелинейности ($\sigma = 0$) такого минимума нет. Следовательно, в этом случае, как и в отсутствие наклона волновых фронтов [14], формирование пространственно-временного солитона невозможно. Если $\sigma = 0$, то при $2\alpha\rho_0 R_0^2 > c/n\omega$ возникает самофокусировка импульса, в противоположном случае – дефокусировка. Использовав выражение для α и связь между $\chi^{(3)}$ и n_2, перепишем данное неравенство в виде условия на интенсивность импульса

$$IR_0^2 > \frac{c^2}{2n^3\omega^2 n_2}. \tag{26}$$

Заметим, что левая часть (26) отнюдь не пропорциональна мощности солитона, как это имеет место в случае световых импульсов без наклона волновых фронтов. Дело в том, что R_0 – это радиус сечений импульса не поперек, а вдоль распространения импульса (рис. 1). Данный радиус можно оценить, используя (14) и (7) при $\beta = 0$. Тогда имеем $R_0 \sim v_g\tau_p\cot\theta$. Взяв $\theta = 45°$ и $\tau_p \sim 10^{-12}$ с, найдем $R_0 \sim 10^{-2}$ см. Используя, кроме того, приведенные выше оценки параметров для плавленого кварца, из (26) будем иметь для интенсивности $I > 10^{10}$ Вт/см^2.

Из (25) легко видеть, что функция $U(R)$ имеет локальный минимум при $\sigma > 0$, т.е при насыщающей нелинейности. Используя это, мы можем выразить параметр σ через α и интенсивность насыщения I_s. Действительно, при насыщающей нелинейности

$$F(|\psi|^2) = \frac{\alpha|\psi|^2}{1 + I/I_s} \approx \alpha|\psi|^2\left(1 - \frac{I}{I_s}\right) =$$

$$= \alpha|\psi|^2\left(1 - \frac{c|\psi|^2}{2\pi n I_s}\right) = \alpha|\psi|^2 - \sigma|\psi|^4.$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{c\alpha}{2\pi n I_s}. \qquad (27)$$

Используя условие минимума $(\partial U/\partial R)_{R=R_0} = 0$, придем из (25) к квадратному уравнению $\rho_0^2 - \frac{\alpha}{2\sigma}\rho_0 + \frac{c}{4n\omega\sigma R_0^2} = 0$. Отсюда и из (27) видно, что данное уравнение имеет вещественные корни при условии $R_0^2 > \frac{2c^2}{\pi n^2 \omega \alpha I_s}$. После использования выражения для α перепишем это условие в виде

$$R_0 > R_{\min} = \frac{2c}{n\omega\sqrt{nn_2 I_s}}. \qquad (28)$$

Взяв $I_s \sim 10^{12}$ Вт/см^2 [14] и другие приведенные выше параметры для плавленого кварца, будем иметь $R_{\min} \sim 10^{-3}$ см.

Условия (26) и (28) играют ключевую роль в возможности формирования пространственно-временных солитонов с наклонными волновыми фронтами в виде "сигар", вытянутых поперек их распространения.

При $R_0 = R_{\min}$ из (26) имеем $I > I_s/8$. Если $R_0 > R_{\min}$, условие на интенсивность (26) является менее жестким. Таким образом, приведенные выше условия вполне удовлетворительно согласуются с использованными приближениями.

Заключение. Проведенное в настоящей работе исследование показывает, что наклон волновых фронтов оптического импульса может существенным образом влиять на характер формирования и распространения как временных, так и пространственно-временных солитонов. Дифракционное уширение импульса вдоль фазовых волновых фронтов в проекции на направление групповой скорости выглядит подобно его дисперсионному расплыванию. Формально это приводит к переопределению коэффициента ДГС второго порядка в виде соотношения (7). Таким образом, появляется возможность управления дисперсией групповой скорости изменением угла наклона волновых фронтов. Важно, что аддитивная добавка, вызванная дифракционной ДГС, является отрицательной. Как результат, эффективная ДГС может стать аномальной. Это, в свою очередь, способствует формированию солитонов в средах с фокусирующей керровской нелинейностью при $\beta > 0$, когда временные и пространственно-временные солитоны с волновыми фронтами без наклона образоваться не могут. Такая ситуация имеет место, например, при распространении лазерных импульсов видимого частотного диапазона в плавленом кварце. Подобрав в этих случаях угол наклона так, чтобы выполнилось условие $\beta_{\text{ef}} < 0$, можно создать благоприятные условия для солитонных режимов распространения. В качестве частного случая можно рассматривать возможность солитонного режима при $\beta = 0$. Здесь мы говорим о бездисперсионных солитонах с наклонными волновыми фронтами.

Наклон волновых фронтов приводит к тому, что пространственно-временные солитоны представляют собой структуры, по форме напоминающие "сигары", сильно вытянутые вдоль групповых фронтов, перпендикулярно к плоскости поляризации. В то же время они локализованы во всех направлениях, перпендикулярных к направлению вытянутости солитона.

Здесь не исследована устойчивость пространственно-временных солитонов по отношению к азимутальным возмущениям [24], а также по отношению к возмущениям изгибного типа, соответствующим искривлениям групповых волновых фронтов [25–28]. Эти важные вопросы мы планируем рассмотреть отдельно.

В настоящей работе рассмотрена возможность формирования нерезонансных квазимонохроматических солитонов с наклонными волновыми фронтами. В дальнейшем также представляет интерес аналогичное исследование резонансных солитонов в режиме самоиндуцированной прозрачности. Особенно это касается исследования возможности формирования резонансных световых пуль с наклонными волновыми фронтами.

С укорочением временной длительности оптических солитонов возникает необходимость учета ДГС высших порядков. Следует ожидать, что наклон волновых фронтов должен играть существенную роль и в этих случаях вплоть до световых импульсов длительностью в несколько периодов колебаний.

---

1. J. Hebling, G. Almasi, I. Z. Kozma, and J. Kuhl, Opt. Express **10**, 1161 (2002).
2. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **85**, 279 (2007) [A. G. Stepanov, A. A. Mel'nikov, V. O. Kompanets, and S. V. Chekalin, JETP Lett. **85**, 227 (2007)].
3. G. Kh. Kitaeva, Laser Phys. Lett. **5**, 559 (2008).
4. M. I. Bakunov, S. B. Bodrov, and V. V. Tsarev, J. Appl. Phys. **104**, 073105 (2008).
5. J. Hebling, K.-L. Yeh, M. C. Hoffmann, B. Barta, and K. A. Nelson, JOSA B **25**, 6 (2008).
6. S. W. Huang, E. Granados, W. R. Huang, K. H. Hong, L. E. Zapata, and F. X. Kaertner, Opt. Lett. **38**, 796 (2013).
7. M. A. Porras, Phys. Rev. A **104**, L061502 (2021).
8. А. Н. Бугай, ЭЧАЯ **50**, 185 (2019) [A. N. Bugay, Physics of Particles and Nuclei **50**, 210 (2019)].

9. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М. (1988), 312 с. [S. A. Akhmanov, V. A. Vysloukh, and A. S. Chirkin, *Optics of Femtosecond Laser Pulses*, Nauka, Moscow (1988) [in Russian]].
10. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, ЖЭТФ **55**, 1430 (1968) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and A. S. Chirkin, Sov. Phys. JETP **28**, 748 (1969)].
11. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, А. Ю. Шашков, Квантовая электроника **42**, 1027 (2012) [A. N. Bugay, S. V. Sazonov, and A. Yu. Shashkov, Quantum Electron. **42**, 1027 (2012)].
12. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997) [S. A. Kozlov and S. V. Sazonov, JETP **84**, 221 (1997)].
13. Д. В. Сизмин, *Нелинейная оптика*, Саровский физико-технический институт-филиал НИЯУ МИФИ, Саров (2015).
14. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005) [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
15. Ya. V. Kartashov, G. E. Astrakharchik, B. A. Malomrd, and L. Torner, Nat. Rev. Phys. **1**, 185 (2019).
16. Е. Д. Залозная, А. Е. Дормидонов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, Письма в ЖЭТФ **113**, 787 (2021).
17. А. Е. Дормидонов, Е. Д. Залозная, В. П. Кандидов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **115**, 15 (2022).
18. Y. Silberberg, Opt. Lett. **15**, 1282 (1990).
19. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
20. С. В. Сазонов, М. В. Комиссарова, Письма в ЖЭТФ **111**, 355 (2020) [S. V. Sazonov and M. V. Komissarova, JETP Lett. **111**, 320 (2020)].
21. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, Sov. Phys.-Uspekhi **10**, 609 (1968)].
22. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **130**, 145 (2006) [S. V. Sazonov, JETP **103**, 126 (2006)].
23. S. V. Sazonov, Laser Phys. Lett. **17**, 095401 (2020).
24. D. V. Petrov, L. Torner, J. Martorell, R. Vilaseca, J. P. Torres, and C. Cojocaru, Opt. Lett. **23**, 1444 (1998).
25. B. A. Malomed, D. Mihalache, F. Wise, and L. Torner, J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **7**, R53 (2005).
26. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, ЖЭТФ **65**, 99 (1973) [V. E. Zakharov and A. M. Rubenchik, Sov. Phys. JETP **38**, 494 (1974)].
27. D. E. Pelinovsky, Math. Comput. Simul. **55**, 585 (2001).
28. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **112**, 305 (2020) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **112**, 283 (2020)].