Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 7, с. 417 – 419

Статический казимировский конденсат биспинорного поля во вселенной Фридмана

А. Б. Арбузов[+*1)], *С. М. Гайдар*[×], *А. Е. Павлов*[×]

[+]*Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия*

[*]*Государственный университет "Дубна", 141982 Дубна, Россия*

[×]*Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К. А. Тимирязева, Институт механики и энергетики, 127434 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 9 февраля 2022 г.
После переработки 3 марта 2022 г.
Принята к публикации 3 марта 2022 г.

Квантовый казимировский конденсат массивного биспинорного поля в компактной вселенной Фридмана вычислен в статическом приближении. Для ренормировки расходящихся рядов использована формула Абеля–Плана.

DOI: 10.31857/S1234567822070023, EDN: fktmny

1. Введение. Квантовый конденсатный механизм происхождения массы бозона Хиггса без явного нарушения конформной симметрии был предложен в статье [1]. В этой конструкции конденсат топ-кварков заменяет тахионный массовый член в феноменологическом потенциале Хиггса. Значение кваркового конденсата не может быть напрямую вычислено в рамках КХД, поскольку соответствующие ему интегралы расходятся и требуют перенормировки с привлечением каких-либо дополнительных условий, например, экспериментальных данных. Нетривиальность топологии пространства может задать требуемое нам условие перенормировки в расчетах. Существуют различные эффективные методы регуляризации и перенормировки ультрафиолетовых расходимостей [2]. Первый такой последовательный метод был разработан в статье Я. Б. Зельдовича и А. А. Старобинского [3] в более общем случае анизотропной космологической модели типа I по Бианки, который совпадает с методом, позднее предложенным в статье [4]. Для случая топологического эффекта Казимира извлечение конечного значения фермионного конденсата можно достичь вычитанием из расходящейся суммы, определенной в пространстве-времени Фридмана соответствующего расходящегося интеграла, определенного в касательном пространстве Минковского. С этой целью применяется формула Абеля–Плана из теории аналитических функций, примененная впервые в космологическом контексте в работе [5], см. также книгу [6]. Конденсат Казимира конформного массивного скалярного поля в компактной фридмановской вселенной в статическом приближении был ранее вычислен в работе [7].

2. Конформное массивное биспинорное поле. Конформная метрика пространства-времени вселенной Фридмана $\mathcal{M} = \mathbb{R}^1 \times S^3$ имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right), \tag{1}$$

где η – конформное время; $a(\eta)$ – конформный масштабный фактор, имеющий смысл радиуса трехмерной сферы S^3; χ, θ и ϕ – угловые координаты сферы. Выполним преобразование к конформной метрике $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ и конформному биспинорному полю $\tilde{\psi}(x)$ согласно их конформным весам:

$$g_{\mu\nu}(x) = (a(\eta)/a_0)^2\,\tilde{g}_{\mu\nu}(x), \quad \psi(x) = (a_0/a(\eta))^{3/2}\,\tilde{\psi}(x). \tag{2}$$

Канонический гамильтониан частиц с растущей массой в статическом пространстве приводит к конечным значениям плотности создаваемых частиц [8]. Современная диаграмма Хаббла интерпретируется в конформных переменных без введения так называемой темной энергии [9, 10]. Статический пространственно-временной интервал отвечает вселенной с современным радиусом a_0

$$d\tilde{s}^2 = a_0^2(-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \tag{3}$$

с кривизной $\tilde{R} = 6/a_0^2$. Переход к конформным переменным приводит к наблюдаемым величинам с регулярным поведением при $a = 0$. Теперь задача формулируется для биспинорного поля с массой (ma) в

1) e-mail: arbuzov@theor.jinr.ru

статической вселенной Эйнштейна $\mathbb{R}^1 \times S^3$, где S^3 – сфера радиуса a_0.

Уравнение Дирака для массивного биспинорного поля $\psi(x)$ в пространстве-времени Фридмана [2] имеет вид

$$\gamma^0\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{3a'}{2a}\right)\psi(x)+\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial\chi}+\cot\chi\right)\psi(x)+ \\ +\gamma^2\frac{1}{\sin\chi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\right)\psi(x)+ \\ +\gamma^3\frac{1}{\sin\chi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\psi(x)+\imath am\psi(x)=0, \qquad (4)$$

где используются матрицы Дирака в стандартном представлении. Штрих означает дифференцирование по конформному времени η. Для разделения переменных возьмем анзац [6]

$$\tilde{\psi}_J(x)=\begin{pmatrix} f_{\lambda+}(\eta)I & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}(\eta)I\end{pmatrix}N_J(\chi,\theta,\phi), \qquad (5)$$

где I – единичная матрица (2×2); $N_J(\chi,\theta,\phi) = (N_1,N_2,N_3,N_4)^T$ – биспинор с комбинированным индексом $J\equiv\{\lambda,j,l,M\}$:

$$\lambda=3/2,5/2,\ldots;\quad j=1/2,3/2,\ldots, \\ \lambda-1;\quad l=j\pm1/2;\quad -j\le M\le j. \qquad (6)$$

Переменные $f_{\lambda+}$ и $f_{\lambda-}$ как функции конформного времени подчиняются осцилляторным уравнениям второго порядка

$$f''_{\lambda\pm}+\left(\omega_\lambda^2(\eta)\pm\imath ma'(\eta)\right)f_{\lambda\pm}=0, \\ \omega^2(\eta)\equiv\lambda^2+m^2a^2(\eta). \qquad (7)$$

После подстановки (5) уравнение Дирака (4) принимает вид

$$-\imath\lambda\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix}N_J+ \\ +\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0\end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial\chi}+\cot\chi\right)N_J+ \\ +\frac{1}{\sin\chi}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\right)N_J+ \\ +\frac{1}{\sin\chi\sin\theta}\begin{pmatrix} 0\sigma_3 & \\ -\sigma_3 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial N_J}{\partial\phi}=0,$$

где были использованы матрицы Паули σ_i.

3. Казимировский конденсат массивного биспинорного поля. Чтобы оценить вакуумное среднее фермионного поля (его конденсат), разложим оператор поля в виде полного набора собственных спиноров с положительной и отрицательной частотой. Затем оператор квантового поля комбинируется как сумма

$$\tilde{\psi}(x)=\sum_J\left(\tilde{\psi}_J^{(+)}(x)\hat{a}_J+\tilde{\psi}_J^{(-)}(x)\hat{b}_J^+\right). \qquad (8)$$

Здесь $\hat{a}_J$ – оператор уничтожения частиц и $\hat{b}_J^+$ – оператор рождения античастиц. Мы определяем квантовый конденсат Казимира как вакуумное среднее значение двух операторов в одной точке. После использования стандартных антикоммутационных соотношений мы получаем следующую формулу суммы мод:

$$\langle 0|\bar{\tilde{\psi}}(x)\tilde{\psi}(x)|0\rangle=\sum_J\bar{\tilde{\psi}}_J^{(-)}(x)\tilde{\psi}_J^{(-)}(x)= \\ =\sum_J\psi_J^{(-)^+}(x)\gamma^0\psi_J^{(-)}(x), \qquad (9)$$

где $\bar{\psi}\equiv\psi^+\gamma^0$. Согласно (9) можно заключить, что казимировский конденсат образован виртуальными античастицами. Представим сумму (9) в матричном виде

$$\sum_J N_J^+(\chi,\theta,\phi)\begin{pmatrix} f_{\lambda+}^{(-)}(\eta)I & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}^{(-)}(\eta)I\end{pmatrix}\gamma^0\times \\ \times\begin{pmatrix} f_{\lambda+}^{(-)}(\eta)I & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}^{(-)}(\eta)I\end{pmatrix}N_J(\chi,\theta,\phi). \qquad (10)$$

Ограничим наше внимание чисто статическим вкладом в квантовый конденсат и рассмотрим случай квазистатического состояния ($a'=0$) [2]. Решения с положительной и отрицательной частотой следующие:

$$f_{\lambda\pm}^{(+)}(\eta)=\pm\sqrt{\frac{\omega\mp ma}{\omega}}e^{\imath\omega\eta}, \\ f_{\lambda\pm}^{(-)}(\eta)=\sqrt{\frac{\omega\pm ma}{\omega}}e^{-\imath\omega\eta}. \qquad (11)$$

Отрицательно-частотные решения (11) удовлетворяют равенству

$$|f_{\lambda+}^{(-)}|^2-|f_{\lambda-}^{(-)}|^2=2ma/\omega. \qquad (12)$$

Применим формулу суммирования по квантовым числам для дальнейших расчетов квантового конденсата:

$$\sum_{j,l,M}\psi_J^{(\pm)^+}(x)\psi_J^{(\pm)}(x)=\frac{1}{\pi^2a^3}\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right). \qquad (13)$$

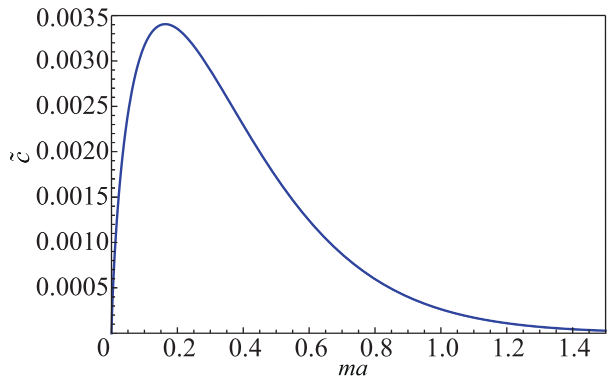

Рис. 1. (Цветной онлайн) Казимировский конденсат массивного фермионного поля как функция переменной массы частицы ma

Суммируя по квантовым числам, получаем расходящийся ряд

$$\langle 0|\bar{\tilde{\psi}}(x)\tilde{\psi}(x)|0\rangle = \frac{ma}{\pi^2}\sum_{\lambda=3/2,5/2,\ldots}^{\infty}\frac{\lambda^2-1/4}{\sqrt{\lambda^2+m^2a^2}}. \quad (14)$$

Формула Абеля–Плана для перенормировки аналитической функции [2]

$$\mathrm{ren}\sum_{\lambda=0}^{\infty}F(\lambda+1/2) \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty}F(\lambda+1/2) - \\ - \int_0^{\infty} dt\, F(t) = -\imath\int_0^{\infty} dt\,\frac{F(\imath t)-F(-\imath t)}{\exp(2\pi t)+1} \quad (15)$$

применяется в случае суммирования с полуцелыми числами. В случае трехмерного евклидова пространства, касательного к S^3, мы имеем топологический эффект Казимира, который приводит к перенормированному результату в виде следующего сходящегося интеграла:

$$\tilde{c} := \langle 0|\bar{\tilde{\psi}}(x)\tilde{\psi}(x)|0\rangle^{\mathrm{ren}} = \\ = 2\frac{ma}{\pi^2}\int_{ma}^{\infty}\frac{d\lambda\,(\lambda^2+1/4)}{\sqrt{\lambda^2-m^2a^2}(\exp(2\pi\lambda)+1)}. \quad (16)$$

В нижнем пределе интегрирования (16) стоит зависящая от масштабного фактора безразмерная масса фермиона ma. Зависимость от этой массы конформного конденсата Казимира $\tilde{c} = \tilde{c}(ma)$ показана на рис. 1.

4. Заключение. Таким образом, мы вычислили конденсат биспинорного поля во фридмановской вселенной как функцию масштабного фактора. Топологические условия Казимира в выбранной нами метрике позволили перенормировать расходящийся ряд и получить конечный конкретный ответ для искомой величины. Проведенные вычисления выполнены с использованием методов, описанных в книге [6], и дополняют представленные там результаты. Полученный нами результат будет использован для описания эволюции полей в ранней вселенной. Прямое использование нашего результата для вычисления кварковых конденсатов в КХД невозможно в силу необходимости учета там динамики сильных взаимодействий и нарушения конформной инвариантности.

1. A. B. Arbuzov, R. G. Nazmitdinov, A. E. Pavlov, V. N. Pervushin, and A. F. Zakharov, EPL **113**, 31001 (2016).
2. В. М. Мостепаненко, Н. Н. Трунов, *Эффект Казимира и его приложения*, Энергоатомиздат, М. (1990).
3. Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский, ЖЭТФ **61**, 2161 (1971).
4. L. Parker and S. A. Fulling, Phys. Rev. D **9**, 341 (1974).
5. С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, А. А. Старобинский, ЖЭТФ **70**, 1577 (1976).
6. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, Энергоатомиздат, М. (1988).
7. A. B. Arbuzov and A. E. Pavlov Mod. Phys. Lett. A **33**, 1850162 (2018).
8. A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Grav. Cosmol. **22**, 107 (2016).
9. A. F. Zakharov and V. N. Pervushin, Int. J. Mod. Phys. D **19**, 1875 (2010).
10. A. E. Pavlov, RUDN J. Math. Inform. Sc. Phys. **25**, 390 (2017).