Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 7, с. 450 – 456 © 2022 г. 10 апреля

Прямая и обратная прецессия массивного вихря в бинарном бозе-конденсате

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 3 марта 2022 г.
После переработки 5 марта 2022 г.
Принята к публикации 5 марта 2022 г.

Численно и аналитически исследуется динамика заполненного массивного вихря в двумерной модели захваченного гармонической ловушкой двух-компонентного бозе-конденсата, находящегося в режиме разделения фаз. В рамках связанных уравнений Гросса–Питаевского продемонстрировано, что в некоторой области параметров нелинейного взаимодействия прецессия достаточно массивного вихря вокруг центра сильно замедляется, а при дальнейшем увеличении массы даже меняет свое направление на обратное. Выведено приближенное обыкновенное дифференциальное уравнение, позволяющее объяснить такое поведение системы.

DOI: 10.31857/S1234567822070096

Введение. Ультрахолодные газовые смеси, состоящие либо из различных химических (щелочных) элементов, либо из различных изотопов одного и того же элемента, либо из одинаковых изотопов в двух различных (сверхтонких) квантовых состояниях, демонстрируют намного большее разнообразие статических и динамических свойств в сравнении с однокомпонентными бозе-конденсатами [1–5]. В немалой мере это обусловлено наличием нескольких параметров нелинейных взаимодействий, которые пропорциональны соответствующим длинам рассеяния и иногда могут настраиваться в широких пределах по желанию экпериментатора с использованием резонансов Фешбаха [6–10]. В частности, при достаточно сильном перекрестном отталкивании между двумя видами волн материи возможен режим пространственного разделения конденсатов [11, 12], при котором формируются доменные стенки между фазами, характеризующиеся эффективным поверхностным натяжением [4, 13]. Пространственной сегрегацией объясняются многие интересные конфигурации и явления, например, нетривиальная геометрия основного состояния бинарных несмешивающихся бозе-конденсатов в ловушках [14–16] (включая оптические решетки [17–19]), динамика пузырей [20], квантовые аналоги классических гидродинамических неустойчивостей (Кельвина–Гельмгольца [21, 22], Рэлея–Тейлора [23–25], Плато–Рэлея [26]), параметрическая неустойчивость капиллярных волн на границе раздела фаз [27, 28], сложные текстуры во вращающихся бинарных конденсатах [29–31], трехмерные топологические структуры [32–37], капиллярная плавучесть плотных капель в захваченных несмешивающихся бозе-конденсатах [38], и т.д.

В частности, значительный интерес вызывают вихри с заполненной сердцевиной в бинарных бозе-конденсатах и их динамика [3, 39–45]. Такая структура представляет собой квантованный вихрь в одной из компонент, сердцевина которого заполнена второй компонентой (см. численный пример на рис. 1). При этом провал плотности вихревой компоненты служит потенциальной ямой, удерживающей вторую ("светлую") компоненту. В свою очередь, светлая компонента создает потенциальный "холм", "расталкивающий" вихревую компоненту и тем самым увеличивающий ширину сердцевины вихря. В результате самосогласованным образом достигается некоторый равновесный профиль.

Тут надо сказать, что по сравнению с вихрями в B-фазе сверхтекучего ^{3}He, занятыми киральной A-фазой, заполненные вихри в ультрахолодных разреженных смесях бозе-газов устроены намного проще (см. для сравнения обзор [46], а также работу [47]). В частности, в сердцевине (неподвижного) холодного газового вихря сверхтекучий ток имеет простую структуру $\mathbf{j} \propto [\rho_1(r)/r]\mathbf{e}_\varphi$ (в отличие от рис. 41 из [46], где имеется участок противовращения). Более того, поскольку бинарные бозе-конденсаты холодных атомов описываются системой связанных уравнений Гросса–Питаевского, в гамильтониане которой нет перекрестных членов в кинетической энергии, здесь полностью отсутствует известный эффект

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

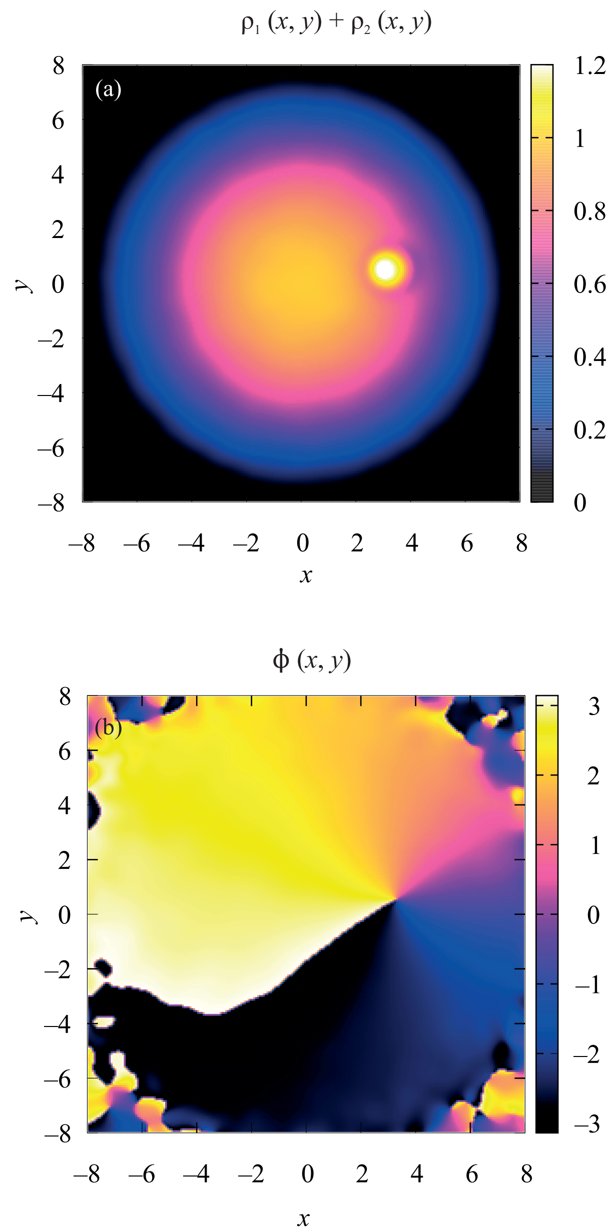

Рис. 1. (Цветной онлайн) Численный пример заполненного вихря: (a) – отнормированная суммарная плотность конденсатов; (b) – фаза вихревой компоненты

Андреева–Башкина, при котором сверхтекучая скорость одной компоненты дает вклад в ток другой компоненты [48, 49].

Находясь во внешнем потенциале ловушки и будучи выведенным из равновесного положения, вихревой комплекс приходит в движение, приблизительно как единое целое. Одной из задач исследования является теоретический анализ возникающего движения и вывод эффективных упрощенных уравнений для его описания. Например, в недавних работах [42, 43] рассматривались пространственно двумерные модели бинарных конденсатов в потенциальной яме с плоским дном, и для подобных систем были предложены обыкновенные дифференциальные уравнения, которые определяют динамику массивных “точечных” вихрей. При этом практически важный случай плавного внешнего потенциала оставался неисследованным. В данной работе этот пробел заполнен. Здесь будут выведены приближенные уравнения движения для массивных вихрей в плавно неоднородных бозе-конденсатах. Эти уравнения имеют неканоническую гамильтонову структуру и для одного вихря формально соответствуют динамике электрического заряда в некотором статическом (двумерном) неоднородном электромагнитном поле, где электростатическое поле лежит в плоскости (x, y), а магнитное поле направлено вдоль оси z и пропорционально равновесному значению плотности безвихревого конденсата $\rho(x, y)$.

Анализируя зависимость параметров этой упрощенной модели от параметров исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных (у нас это связанные двумерные уравнения Гросса–Питаевского), мы увидим интересный эффект, ранее не распознанный применительно к вихрям в бозе-конденсатах. А именно, в случае неравных нелинейных коэффициентов самотталкивания возможна такая ситуация, когда при малом заполнении вихря светлой компонентой (его малой эффективной массе), “электрическая” сила направлена от центра системы, а при увеличении массы постепенно уменьшается и затем меняет свое направление на противоположное. Это приводит к изменению направления дрейфа вихря (его прецессии вокруг начала координат). Подчеркнем, что при такой обратной прецессии не происходит какой-либо качественной перестройки внутри вихревой сердцевины. Прямое численное моделирование уравнений Гросса–Питаевского подтвердит предсказание упрощенной модели.

Исходная модель. Мы рассматриваем двумерный, достаточно разреженный бинарный бозе-конденсат в пределе нулевой температуры, когда применимы уравнения Гросса–Питаевского. Для максимальной простоты имеем в виду ситуацию с равными массами обоих типов атомов, $m_1 = m_2 = m$. Случай малой разницы в массах изотопов, как, например, ^{85}Rb и ^{87}Rb, включается сюда приближенно. Пусть гармоническая ловушка характеризуется поперечной частотой ω, одинаковой для обоих типов атомов. Выбираем масштаб $\tau = 1/\omega$ для времени, $l_{\rm tr} = \sqrt{\hbar/\omega m}$ для длины, и $\varepsilon = \hbar\omega_\perp$ для энергии. Это позволяет нам записать уравнения движения для комплексных волновых функций

$A(\mathbf{r},t)$ (вихревая компонента) и $B(\mathbf{r},t)$ (светлая компонента) в обезразмеренном виде,

$$i\dot{A} = -\frac{1}{2}\nabla^2 A + \left[V(x,y) + g_{11}|A|^2 + g_{12}|B|^2\right] A, \quad (1)$$

$$i\dot{B} = -\frac{1}{2}\nabla^2 B + \left[V(x,y) + g_{21}|A|^2 + g_{22}|B|^2\right] B, \quad (2)$$

где $V = (x^2+y^2)/2$ – потенциал ловушки, $g_{\alpha\beta}$ – симметричная матрица нелинейных взаимодействий. Физически взаимодействия определяются длинами рассеяния $a_{\alpha\beta}$ [2]:

$$g^{\rm phys}_{\alpha\beta} = 2\pi\hbar^2 a_{\alpha\beta}(m_\alpha^{-1} + m_\beta^{-1}). \quad (3)$$

Поскольку нас интересует ситуация, когда все длины рассеяния положительны, первый коэффициент самоотталкивания можно нормировать на единицу, $g_{11} = 1$. При наличии только одной компоненты A без всяких вихрей равновесная плотность конденсата была бы

$$|A_0|^2 = \rho(\mathbf{r}) \approx [\mu - V(\mathbf{r})], \quad (4)$$

где $\mu \gg 1$ – химический потенциал. Эффективный радиус конденсата $R_* = \sqrt{2\mu}$. На таком неоднородном фоне и происходит движение массивного вихревого комплекса.

Существованию заполненного вихря способствует условие разделения фаз $g = (g_{12}^2 - g_{11}g_{22}) > 0$ [11, 12]. Имеется относительно узкий переходный слой между сегрегированными конденсатами, где плотности обеих фаз спадают практически до нуля в одном либо в другом направлении. Но для применимости уравнений Гросса–Питаевского толщина этого слоя $\delta \sim \sim 1/\sqrt{g\rho}$ все же обязана многократно превышать характерную длину рассеяния a (обычно это несколько сот боровских радиусов), т.е. $\delta(l_{\rm tr}/a) \gg 1$. При этом соответствующий избыток энергии (коэффициент поверхностного натяжения) определяется формулой вида

$$\sigma = K(g_{22}/g_{11}, g_{12}/g_{11})\rho^{3/2}, \quad (5)$$

где $K \sim \sqrt{g}$ при малых g [11, 13]. Далее будет видно, что зависимость поверхностного натяжения от фоновой плотности существенно влияет на динамику массивного вихря, покольку создает градиент его эффективной потенциальной энергии.

Структура волновых функций. При выводе уравнений движения вихря мы будем пренебрегать свободными возбуждениями звуковых колебаний и отличием формы вихря от циркулярной. Решающим обстоятельством, позволяющим это сделать, будет малость отношения радиуса вихревой сердцевины w к размеру конденсата R_*, так что структура вихря почти такая же, как на однородном фоне, а скорость его движения мала в сравнении со скоростями потенциальных возбуждений. Это дает нам основание сделать упрощающее приближение, что волновые функции A и B имеют вид

$$A = \sqrt{\rho_a}e^{i\Phi_a} \approx \Psi_v(\mathbf{r},\mathbf{R})\exp[i\mathbf{U}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{R})], \quad (6)$$

$$B = \sqrt{\rho_b}e^{i\Phi_b} \approx \Psi_b(\mathbf{r},\mathbf{R})\exp[i\mathbf{U}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{R})], \quad (7)$$

где $\mathbf{R}(t)$ – положение вихря, а $\mathbf{U}(t)$ – некоторый двумерный вектор, связь которого со скоростью перемещения вихря будет выяснена позднее. Очень важно, что функция Ψ_v содержит квантованный вихрь, т.е. ее фаза $\Phi_v(\mathbf{r})$ набирает приращение 2π при обходе точки $\mathbf{R}$ против часовой стрелки. Вихревая фаза $\Phi_v(\mathbf{r})$ должным образом согласована с плотностью ρ_a, которая вдали от вихря совпадает с $\rho(\mathbf{r})$, а внутри его сердцевины $\rho_a \approx \varrho(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|,\mathbf{R})$, так что

$$\mathrm{div}(\rho_a\nabla\Phi_v) = 0. \quad (8)$$

В свою очередь, плотности $\varrho(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|,\mathbf{R})$ и ρ_b согласованы между собой так же, как и в случае заполненного вихря на локально однородном фоне плотности со значением $\varrho(\infty,\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R})$. Дополнительные функции $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ в фазах A и B связаны с теми частями полей скорости, которые появляются соответственно при движении провала плотности вихревой компоненты и при квазиоднородном движении светлой компоненты. С достаточной точностью можно считать, что $\mathbf{G} = \mathbf{r}-\mathbf{R}$, а $\mathbf{F} = (\mathbf{r}-\mathbf{R})f(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|,\mathbf{R})$, где при фиксированном $\mathbf{R}$ скалярная функция $f(\chi)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\varrho(\chi)[\chi f'' + 3f'] + \varrho'(\chi)[\chi f' + f] = \varrho'(\chi), \quad (9)$$

которое следует из уравнения непрерывности для стационарного обтекания

$$\mathrm{div}(\varrho[U_i F_{i,k} - U_k]) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (9) дополняется условием стремления f к нулю на бесконечности и условием как можно более слабой сингулярности в нуле. Очень важно, что f быстро спадает на расстояниях порядка ширины вихревой сердцевины. В качественном отношении комбинация $\mathbf{U}\cdot\mathbf{F}$ подобна тому потенциалу скорости в классической гидродинамике, который описывает обтекание цилиндра и определяет соответствующую присоединенную массу.

Упрощенные уравнения движения вихря. Вывод приближенных уравнений движения для заполненного вихря произведем на основе гамильтоновой структуры уравнений Гросса–Питаевского,

$$i\dot{A} = \delta\mathcal{H}/\delta A^*, \qquad i\dot{B} = \delta\mathcal{H}/\delta B^*, \tag{11}$$

где гамильтониан дается выражением

$$\mathcal{H} = \int \Big[\frac{|\nabla A|^2}{2} + \frac{|\nabla B|^2}{2} + V(x,y)(|A|^2 + |B|^2) + \\ + \frac{g_{11}|A|^4}{2} + g_{12}|A|^2|B|^2 + \frac{g_{22}|B|^4}{2}\Big] dxdy. \tag{12}$$

Используя уравнения (6), (7) и (11), легко получаем следующие два равенства:

$$\int \left(\dot{\rho}_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \mathbf{R}} - \dot{\Phi}_a \frac{\partial \rho_a}{\partial \mathbf{R}}\right) dxdy + \{a \to b\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{R}}, \tag{13}$$

$$\int \left(\dot{\rho}_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \mathbf{U}} - \dot{\Phi}_a \frac{\partial \rho_a}{\partial \mathbf{U}}\right) dxdy + \{a \to b\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{U}}. \tag{14}$$

Теперь заметим, что вдали от вихря либо $\dot{\rho}_{a,b}$ пренебрежимо малы, либо вариационные производные $\partial\rho_{a,b}/\partial\mathbf{R}$ пренебрежимо малы (а $\partial\rho_{a,b}/\partial\mathbf{U} = 0$ везде). Поэтому основной вклад в интегралы происходит от близкой окрестности вихря, где можно использовать приближенные формулы

$$\dot{A} \approx -\dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla A + iA(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{F}), \tag{15}$$

$$\dot{B} \approx -\dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla B + iB(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{G}). \tag{16}$$

Выразив отсюда временные производные плотностей и фаз и подставив их в (13) и (14), после несложных вычислений получим два векторных уравнения,

$$-M\dot{\mathbf{U}} + 2\pi[\hat{z} \times \dot{\mathbf{R}}]\rho(\mathbf{R}) \approx \partial H/\partial \mathbf{R}, \tag{17}$$

$$M\dot{\mathbf{R}} \approx \partial H/\partial \mathbf{U}, \tag{18}$$

причем скалярная величина M определяется из соотношения

$$M\delta_{ik} = \int (\rho_a F_{k,i} + \rho_b G_{k,i}) dxdy. \tag{19}$$

Очевидно, что гамильтониан $H(\mathbf{R}, \mathbf{U})$ квадратичен по $\mathbf{U}$ и должен иметь вид

$$H \approx M_{\rm tot}\frac{\mathbf{U}^2}{2} + W(\mathbf{R}). \tag{20}$$

Поэтому следует отождествить $\mathbf{U}$ со скоростью движения вихря $\dot{\mathbf{R}}$, и тогда M оказывается полной эффективной массой заполненного вихря, которая включает в себя как захваченную сердцевиной вихря массу светлой компоненты $M_{\rm br}$, так и присоединенную массу вихревой компоненты, обусловленную наличием дополнительной кинетической энергии при движении провала плотности сквозь конденсат.

В принципе, присоединенная масса $M_{\rm add}$ могла бы оказаться зависящей от $\mathbf{R}$, и тогда для сохранения консервативности системы следовало бы ввести вектор $\mathbf{P} = M(\mathbf{R})\mathbf{U}$ и переписать уравнения движения в "слегка подправленном" виде

$$-\dot{\mathbf{P}} + 2\pi[\hat{z} \times \dot{\mathbf{R}}]\rho(\mathbf{R}) = \partial H/\partial \mathbf{R}, \tag{21}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \partial H/\partial \mathbf{P}. \tag{22}$$

Возможно, такое обобщение пригодилось бы при рассмотрении сильно сплюснутых трехмерных конденсатов, находящихся в режиме Томаса–Ферми по всем трем координатам. Однако нетрудно показать, что в случае строго двумерных уравнений Гросса–Питаевского масса $M_{\rm add}$ в главном приближении не зависит от положения вихря.

Оценка коэффициентов. Если эффективный радиус вихря w существенно превышает толщину доменной стенки δ, то присоединенная масса может быть оценена по известной формуле из классической гидродинамики, т.е. $M_{\rm add} \approx \pi\rho(\mathbf{R})w^2$. С другой стороны, поскольку гидродинамические давления конденсатов равны $P_a = g_{11}\rho_a^2$ и $P_b = g_{22}\rho_b^2$, и по обе стороны от доменной стенки в главном порядке они совпадают (если не учитывать поверхностное натяжение σ), то сохранение массы светлой компоненты позволяет оценить зависимость величины $w(\mathbf{R})$ через условие

$$M_{\rm br} = \pi\rho_b w^2 = \pi\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\rho(\mathbf{R})w^2 = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}M_{\rm add}. \tag{23}$$

Кроме того, мы имеем отсюда оценку для эффективной массы

$$M = [1 + (g_{22}/g_{11})^{1/2}]M_{\rm br}. \tag{24}$$

Тот факт, что полная масса достаточно большого вихря оказалась не зависящей от его положения на пространственно неоднородном фоне плотности, делает выведенную систему уравнений (17)–(18) [с учетом выражения (20)] математически идентичной уравнению двумерного движения электрического заряда в магнитном и электрическом полях. "Электростатический потенциал" $W(\mathbf{R})$ при этом равен сумме трех частей. Во-первых, это та часть кинетической энергии, которая обусловлена градиентом вихревой фазы $\Phi_v(\mathbf{r})$. Во-вторых, это энергия нелинейных взаимодействий плюс потенциальная энергия вихря в поле ловушки. В-третьих, это энергия "квантового давления". Первый вклад в широко известном приближении локальной индукции можно оценить как

$$W_1 \approx \pi\Lambda_0\rho(\mathbf{R}), \qquad \Lambda_0 = \ln(R_*/w_0). \tag{25}$$

Заметим при этом, что в практически интересных случаях $\Lambda_0 \approx 2$. Второй и третий вклады можно оценить (с точностью до несущественной аддитивной константы), используя концепцию поверхностного натяжения,

$$W_2 + W_3 \approx 2\pi\sigma w + [1 - (g_{22}/g_{11})^{1/2}]M_{\rm br}U(\mathbf{R}) = \\ = [\pi C M_{\rm br}^{1/2} - [1 - (g_{22}/g_{11})^{1/2}]M_{\rm br}]\rho(\mathbf{R}), \qquad (26)$$

где коэффициент C – порядка единицы. Таким образом, все выражение для потенциальной энергии свелось к простой формуле

$$W(\mathbf{R}) = \pi\Lambda\rho(\mathbf{R}), \qquad (27)$$

где эффективный безразмерный параметр Λ нетривиально зависит от массы захваченной светлой компоненты,

$$\Lambda \approx \Lambda_0 + C M_{\rm br}^{1/2} - [1 - (g_{22}/g_{11})^{1/2}]M_{\rm br}/\pi. \qquad (28)$$

Второе слагаемое здесь обусловлено поверхностным натяжением на границе фаз, а третье отвечает за “массовый” вклад с учетом “силы Архимеда”. При этом следует сказать, что гидродинамический вклад Λ_0 по своей величине вполне может оказаться существенно меньшим, чем каждое из остальных слагаемых.

Скорость прецессии вихря. Если ввести комплексную координату вихря $Z(t) = X(t) + iY(t)$, то окончательное уравнение движения массивного вихря запишется следующим образом:

$$-\tilde{M}\ddot{Z} + i(\mu - |Z|^2/2)\dot{Z} + \frac{\Lambda}{2}Z = 0, \qquad (29)$$

где $\tilde{M} = M/2\pi$. Данное уравнение интегрируемо в квадратурах очевидным образом при переходе к полярным координатам. Мы не приводим здесь соответствующих формул. Заметим только, что существуют частные решения вида $Z(t) = R_0 \exp(-i\Omega t)$. Подстановка дает две ветви решения

$$\Omega_\pm(R_0) = -\Big[\frac{(\mu - R_0^2/2)}{2\tilde{M}} \pm \sqrt{\frac{(\mu - R_0^2/2)^2 - 2\Lambda\tilde{M}}{4\tilde{M}^2}}\Big]. \qquad (30)$$

Нас здесь интересует, главным образом, решение $\Omega_-(R_0)$, которое соответствует дрейфу заряда в скрещенных магнитном и электрическом полях. Видно, что большие положительные значения Λ способствуют быстрому дрейфу против часовой стрелки [отрицательная частота $\Omega_-(R_0)$]. Более того, обе ветви сливаются при некотором критическом значении радиуса, уменьшающемся с ростом Λ. Наоборот, при малых Λ дрейф замедляется, а при отрицательных Λ меняет свое направление на обратное (по часовой стрелке – положительная частота). В связи с этим, при взгляде на выражение (28) в глаза бросаются два свойства рассматриваемой системы, имеющие место при $g_{22} \neq g_{11} = 1$. Во-первых, при $g_{22} > 1$ параметр Λ довольно быстро растет при увеличении массы вихря, что должно сокращать область устойчивости движения. Во-вторых, если $g_{22} < 1$, то при увеличении массы достижимы отрицательные значения Λ и обратный дрейф.

Результаты численной проверки. Параметрическая область $\Lambda \gg 1$ будет исследована в другой работе. Здесь же путем прямого численного моделирования связанных двумерных уравнений Гросса–Питаевского проверено предсказание теории насчет обратного дрейфа. Проведенные вычисления были ориентированы на экспериментально реализуемые смеси ^{85}Rb-^{87}Rb [8], где $a_{12}/a_{22} \approx 2$, тогда как a_{11} можно изменять в широких пределах с помощью резонанса Фешбаха. Поэтому в наших численных экспериментах были взяты значения $g_{11} = g_{12} = 1$, $g_{22} = 0.5$. Используемый нами численный метод подобен тому, что применялся ранее в работах [37, 38, 50].

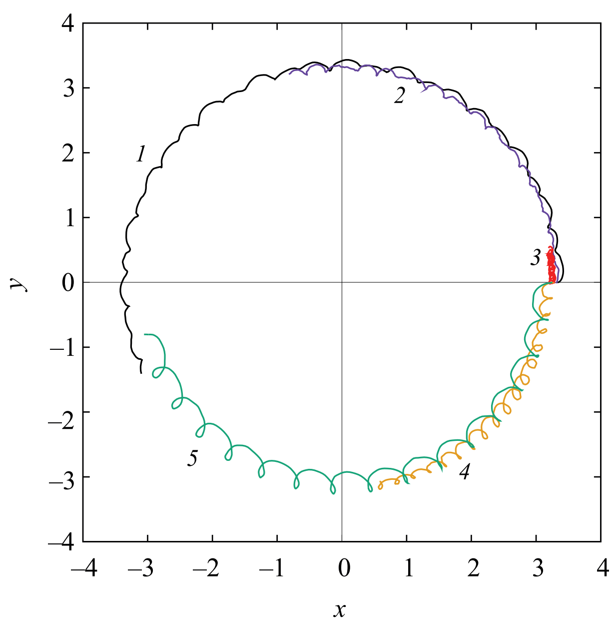

Рис. 2. (Цветной онлайн) Примеры траекторий массивного вихря на отрезке времени $[0 : 100]$ при $\mu = 30$ для различных значений массы светлой компоненты. Последовательным номерам траекторий от “*1*” до “*5*” соответствуют значения $M_{\rm br}/2\pi = 8.0$, 10.0, 12.0, 14.0, 16.0. Движение начинается приблизительно в одной точке, но направление и скорости дрейфа оказываются различными

Начальное состояние для численного интегрирования приготавливалось таким образом, что заполненный вихрь находился в некоторой точке $\mathbf{R}(0) = (X_0, 0)$ и имел при этом нулевую скорость. Далее отслеживалась его траектория (положение центра масс светлой компоненты) и вычислялась угловая скорость дрейфа. Примеры траекторий показаны на рис. 2. Видно, что на медленный дрейф накладываются быстрые осцилляции, характерные для движения заряда в магнитном поле. Зависимости угловой скорости дрейфа, подтверждающие возможность обратного движения, представлены на рис. 3.

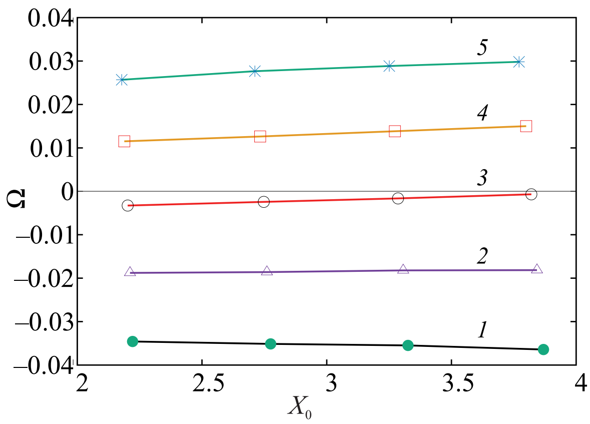

Рис. 3. (Цветной онлайн) Численные зависимости угловой скорости дрейфа от начальной координаты для различных значений светлой массы вихря при $g_{11} = g_{12} = 1$, $g_{22} = 0.5$, $\mu = 30$. Номерам линий от "*1*" до "*5*" соответствуют значения $M_{\rm br}/2\pi = 8.0$, 10.0, 12.0, 14.0, 16.0

Заключение. Таким образом, в данной работе выведено простое уравнение движения для массивного вихря в двумерном плавно неоднородном бинарном бозе-конденсате и численно подтверждена предсказываемая этим уравнением возможность обратного дрейфа. Уравнение отличается от подобного уравнения для безмассового вихря добавлением естественного слагаемого $M\ddot{\mathbf{R}}$ и изменением коэффициента в выражении для эффективной потенциальной энергии. Еще больше возможностей для контроля коэффициентов имеется в случае неравных масс атомов $m_1 \neq m_2$ и при различающихся внешних потенциалах $V_1(\mathbf{r}) \neq V_2(\mathbf{r})$.

Надо сказать, что система нескольких массивных вихрей может быть рассмотрена аналогичным образом. Техническая трудность там имеется только при вычислении парных взаимодействий. Но для некоторых специальных равновесных профилей плотности $\rho(x, y)$ эта трудность успешно преодолевается, как было показано в работах [51, 52] на примере однокомпонентных бозе-конденсатов.

Строго двумерный конденсат является идеализацией. Задачей на будущее остается подробная проверка режима обратной прецессии для сильно сплюснутых трехмерных конденсатов. Предварительные численные эксперименты уже показали качественное сходство с плоским случаем.

1. T.-L. Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996).
2. H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998).
3. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).
4. S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **87**, 140401 (2001).
5. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).
6. J. P. Burke, Jr., J. L. Bohn, B. D. Esry, and C. H. Greene, Phys. Rev. Lett. **80**, 2097 (1998).
7. G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo, J. Catani, F. Minardi, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **100**, 210402 (2008).
8. S. B. Papp, J. M. Pino, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **101**, 040402 (2008).
9. S. Tojo, Y. Taguchi, Y. Masuyama, T. Hayashi, H. Saito, and T. Hirano, Phys. Rev. A **82**, 033609 (2010).
10. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010)
11. E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998).
12. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).
13. B. van Schaeybroeck, Phys. Rev. A **78**, 023624 (2008).
14. A. A. Svidzinsky and S. T. Chui, Phys. Rev. A **68**, 013612 (2003).
15. S. Gautam and D. Angom, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 095302 (2010).
16. R. W. Pattinson, T. P. Billam, S. A. Gardiner, D. J. McCarron, H. W. Cho, S. L. Cornish, N. G. Parker, and N. P. Proukakis, Phys. Rev. A **87**, 013625 (2013).
17. K. Suthar, A. Roy, and D. Angom, Phys. Rev. A **91**, 043615 (2015).
18. K. Suthar and D. Angom, Phys. Rev. A **93**, 063608 (2016).
19. K. Suthar and D. Angom, Phys. Rev. A **95**, 043602 (2017).
20. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).
21. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).
22. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).
23. K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, Phys. Rev. A **80**, 063611 (2009).

24. S. Gautam and D. Angom, Phys. Rev. A **81**, 053616 (2010).
25. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. A **85**, 013602 (2012).
26. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 053606 (2011).
27. D. Kobyakov, V. Bychkov, E. Lundh, A. Bezett, and M. Marklund, Phys. Rev. A **86**, 023614 (2012).
28. D. K. Maity, K. Mukherjee, S. I. Mistakidis, S. Das, P. G. Kevrekidis, S. Majumder, and P. Schmelcher, Phys. Rev. A **102**, 033320 (2020).
29. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **91**, 150406 (2003).
30. K. Kasamatsu and M. Tsubota, Phys. Rev. A **79**, 023606 (2009).
31. P. Mason and A. Aftalion, Phys. Rev. A **84**, 033611 (2011).
32. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **93**, 250406 (2004).
33. H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Nitta, Phys. Rev. Lett. **109**, 245301 (2012).
34. M. Nitta, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **85**, 053639 (2012).
35. K. Kasamatsu, H. Takeuchi, M. Tsubota, and M. Nitta, Phys. Rev. A **88**, 013620 (2013).
36. S. B. Gudnason and M. Nitta, Phys. Rev. D **98**, 125002 (2018).
37. В. П. Рубан, ЖЭТФ **160**, 912 (2021).
38. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **113**, 848 (2021).
39. K. J. H. Law, P. G. Kevrekidis, and L. S. Tuckerman, Phys. Rev. Lett. **105**, 160405 (2010); *Erratum*, Phys. Rev. Lett. **106**, 199903 (2011).
40. M. Pola, J. Stockhofe, P. Schmelcher, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **86**, 053601 (2012).
41. S. Hayashi, M. Tsubota, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **87**, 063628 (2013).
42. A. Richaud, V. Penna, R. Mayol, and M. Guilleumas, Phys. Rev. A **101**, 013630 (2020).
43. A. Richaud, V. Penna, and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **103**, 023311 (2021).
44. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **113**, 539 (2021).
45. V. P. Ruban, W. Wang, C. Ticknor, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. A **105**, 013319 (2022).
46. M. M. Salomaa and G. E. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987).
47. G. E. Volovik and T. Sh. Misirpashaev, Pis'ma v ZhETF **51**, 475 (1990) [JETP Lett. **51**, 537 (1990)].
48. A. F. Andreev and E. P. Bashkin, ZhETF **69**, 319 (1975) [JETP **42**, 164 (1976)].
49. G. E. Volovik, Pis'ma v ZhETF **115**, 306 (2022).
50. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **108**, 638 (2018).
51. В. П. Рубан, ЖЭТФ **151**, 1092 (2017).
52. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **105**, 449 (2017).